This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Phys. 0 99 c 1

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Lehrbuch

der

Electricität und des Magnetismus

von

James Clerk Maxwell, M. A.

Autorisirte deutsche Uebersetzung

von

Dr. B. Weinstein.

In zwei Bänden.

Erster Band.

Mit zahlreichen Holzschnitten und 14 Tafeln.

BERLIN.

Verlag von Julius Springer.

1883.

Digitized by Google

Druck von Eduard Krause in Berlin.

Staatliche Bibliothek Bamberg

Digitized by Google

Vorwort des Verfassers.

Die Tatsache, dass gewisse Körper, wenn man sie reibt, andere Körper anzuziehen vermögen, war schon dem Altertume bekannt. Neuerdings hat man dann noch eine lange Reihe von Erscheinungen kennen gelernt, welche mit jenem Phänomen der Attraction eng verknüpft sind. Nach der griechischen Benennung des Bernsteins, ἤλεκτρον, bei dem man sie zuerst beschrieben hat, bezeichnet man all diese Erscheinungen als Electrische Phänomene.

Ferner weiss man schon seit langer Zeit, dass andere Körper, so namentlich Magneteisenstein, Eisen und Stahl, nachdem man sie gewissen Processen unterworfen hat, auf einander Fernwirkungen ausüben, die nebst einer Reihe anderer damit in Beziehung stehender Erscheinungen anders als die erwähnten electrischen Phänomene ausfallen. Man nennt diese Erscheinungen Magnetische Phänomene nach der im alten Thessalien gelegenen Stadt Magnesia, wo man früher den Magneteisenstein fand.

Später hat man die Erkenntnis gewonnen, dass die magnetischen Phänomene in engster Beziehung zu den electrischen stehen, und in der Untersuchung dieser Beziehung eine neue Wissenschaft, die des Electromagnetismus, aufgebaut.

Ich werde in dem Werke, das ich dem wissenschaftlichen Publicum vorlege, die wichtigsten der bezeichneten Erscheinungen qualitativ beschreiben, ich werde zeigen, wie man sie quantitativ messen kann, und die einzelnen dabei in Betracht kommenden Grössen mit einander durch analytische Ausdrücke verbinden. Nachdem ich so die Grundlage für die mathematische Theorie des Electromagnetismus erhalten habe, und nachdem ich gezeigt habe, wie man diese Theorie zur Vorausberechnung des Verlaufs betreffender Erscheinungen verwenden muss, werde ich so klar, als ich es nur irgend kann, die Beziehungen, die zwischen jener Theorie in ihrer mathematischen Form und der der Funda-

*

Digitized by Google

mentalwissenschaft, der Mechanik, bestehen, auseinandersetzen. Ich werde so die besondern mechanischen Erscheinungen einigermassen anzugeben im Stande sein, welche die electromagnetischen Phänomene illustriren oder gar erklären.

Bei der Beschreibung der einzelnen Erscheinungen werde ich zunächst die berücksichtigen, welche am meisten den Grundcharakter der Theorie kennzeichnen, und andere Erscheinungen entweder ganz übergehen, oder erst dann anführen, wenn der Leser mit der Materie schon genügend vertraut ist.

Bei jeder Erscheinung hat man vom mathematischen Standpunkte aus darauf zu achten, ob die dabei ins Spiel kommenden Grössen einer Messung unterworfen werden können. Daher werde ich die electrischen Erscheinungen hauptsächlich mit Rücksicht auf ihre Messbarkeit behandeln und dabei die Methoden, die man bis jetzt zur wirklichen Ausführung solcher Messungen kennen gelernt hat, vorführen und nachweisen, von welchen Einheiten man die einzelnen in Betracht kommenden Grössen abhängig machen kann.

In Anwendung der mathematischen Rechnungen wird meine erste Aufgabe in der Deduction der allgemeinsten Schlüsse aus den bis jetzt vorliegenden Daten bestehen. In zweiter Reihe werde ich dann die einzelnen Formeln auf die einfachsten Fälle anwenden. Fragen, die mehr die Geschicklichkeit des Mathematikers herausfordern, als die Erkenntnis in unserer Wissenschaft fördern, werde ich zu vermeiden suchen.

Auf der einen Seite bestehen in unserer Wissenschaft zwischen den einzelnen Zweigen, mit denen wir uns hier zu beschäftigen haben, mehr und complicirtere innere Beziehungen als zwischen denen irgend einer andern der bisher entwickelten Wissenschaften. Auf der andern Seite sind ihre äussern Beziehungen einerseits mit der Mechanik und andererseits mit der Lehre von der Wärme, vom Licht, von den chemischen Actionen und von der Constitution der Körper so mannigfach und tiefgreifend, dass sie auf eine ganz exceptionelle Wichtigkeit unserer Wissenschaft für die Erklärung der physikalischen Erscheinungen hinzuweisen scheinen.

Deshalb, glaube ich auch, hat das Studium des Electromagnetismus in seiner ganzen Ausdehnung als Mittel zur Förderung der Gesammtwissenschaft die höchste Bedeutung erlangt.

Digitized by Google

Man darf behaupten, dass die mathematischen Gesetze der einzelnen Erscheinungsclassen grösstenteils in befriedigender Weise eruirt worden sind. Auch die Verbindungen dieser einzelnen Erscheinungsclassen mit einander sind ziemlich sorgfältig untersucht worden, und die experimentellen Gesetze haben durch die ausgedehntere Kenntnis ihrer gegenseitigen Beziehungen beträchtlich an Wahrscheinlichkeit für ihre Exactheit gewonnen. Endlich hat man auch durch den Nachweis, dass kein electromagnetisches Phänomen der Annahme, dass sein Verlauf durch rein mechanische Actionen bestimmt wird, widerspricht, einige Fortschritte in der Verpflanzung der Theorie des Electromagnetismus auf das Gebiet der Mechanik gemacht.

Soviel man aber auch bis jetzt schon geleistet hat, so ist doch das Gebiet der electrischen Phänomene noch lange nicht vollständig ausgekundschaftet. Vielmehr hat man dieses Gebiet eigentlich erst erschlossen, indem man einerseits die Punkte, die einer Untersuchung bedürfen und einer solchen fähig sind, entdeckt und andererseits die Mittel zur Durchführung solcher Untersuchungen geschaffen hat.

Ich brauche mich nicht erst weitläufig über den hohen Nutzen, den die Schifffahrt aus den magnetischen Untersuchungen gezogen hat, auszulassen, über die Wichtigkeit der Kenntnis der wahren Richtung der Compassnadel und über die Bedeutung der Einwirkung, welche die Eisenteile eines Schiffes auf die Magnetnadel ausüben. Umgekehrt haben aber auch die Arbeiten derer, die, um die Sicherheit der Schifffahrt zu heben, magnetische Beobachtungen angestellt haben, ganz beträchtlich zum Fortschritt der Wissenschaft beigetragen.

Gauss hat als Mitglied des magnetischen Vereins die Macht seines Genius zum Aufbau einer Theorie des Magnetismus und zur Entdeckung von Beobachtungsmethoden für den magnetischen Zustand der Körper verwendet. Wir verdanken ihm nicht blos die grossen Fortschritte auf dem Gebiete der Attractionslehre, sondern auch fast alle Instrumente, deren wir uns bei der Anstellung magnetischer Observationen bedienen, wir verdanken ihm die Beobachtungsmethoden, und wir haben von ihm gelernt, wie man aus den erhaltenen rohen Beobachtungszahlen die Endresultate zu berechnen hat. Seine Untersuchungen über den Erdmagnetismus haben für die ganze Wissenschaft hohe Bedeutung erlangt, denn man kann sich ihrer überall in der Physik, wo man es mit der Messung von Kräften zu tun hat, bedienen.

Digitized by Google

Die Anwendungen, die der Electromagnetismus in der Telegraphie gefunden hat, haben wiederum auch für die reine Wissenschaft Früchte getragen, denn sowie genaue electrische Messungen eine commercielle Wichtigkeit erlangten, sind die Electriker in den Stand gesetzt worden, ihre Untersuchungen mit Apparaten und Einrichtungen durchzuführen, welche das Maass der in Laboratorien gewöhnlich benutzten weit überstiegen. Man kann die Bedeutung der practischen Anforderungen an unsere Wissenschaft und die günstige Lage, in die sie dadurch gekommen ist, schon jetzt nicht hoch genug schätzen, denn einerseits haben die Männer der Wissenschaft sich dem Ausbau der Electricitätslehre mit grosser Energie gewidmet, und andererseits haben die Männer der Praxis eingehende wissenschaftliche Kenntnisse zu schätzen gelernt. Letztere Tatsache wird aber sehr geeignet sein, die ganze Ingenieurkunde wissenschaftlich zu fördern.

Werke, in denen die Electricitätslehre populär behandelt ist, existiren schon in ziemlicher Anzahl. Inzwischen können populäre Bücher denen nicht genügen, welche sich mit wirklichen Messungen zu beschäftigen haben, oder welche bei Hörsaal-Experimenten nicht stehen bleiben wollen.

Auf der anderen Seite giebt es auch eine grosse Menge mathematischer, für unsere Wissenschaft hochbedeutender Abhandlungen, aber diese sind in den Zeitschriften und dickleibigen Berichten gelehrter Gesellschaften begraben. Sie stehen nicht notwendig in Beziehung zu einander, und sie sind auch sehr ungleich in ihrem Werte. Zudem sind sie, abgesehen von den Mathematikern, nur wenigen Menschen wirklich verständlich.

Ich habe daher geglaubt, dass ein Werk, das sich die methodische Darstellung unserer Wissenschaft zur Hauptaufgabe macht, und das gleichzeitig zeigen will, wie man die Lehren ihrer einzelnen Zweige einer Verification durch Messungen zu unterwerfen vermag, dass also ein solches Werk nicht unwillkommen sein dürfte.

Das Werk, das ich herausgebe, unterscheidet sich in seiner Gesammtanlage beträchtlich von den meisten der namentlich in Deutschland edirten Lehrbücher über Electricität, und es wird wol dem Leser so scheinen, als ob ich nicht immer den Speculationen mancher berühmter Physiker und Mathematiker volle Gerechtigkeit habe widerfahren lassen. Ich möchte deshalb darauf aufmerksam machen und

Digitized by Google

als Entschuldigung anführen, dass ich, als ich an das Studium der Electricität ging, mich entschloss, nicht eher mathematische Werke durchzuarbeiten, als bis ich Faradays Experimentelle Untersuchungen über Electricität *(Experimental Researches in Electricity)* vollständig gelesen habe. Ich war schon davon avertirt, dass eine gewisse Differenz zwischen der Art, wie Faraday die electrischen Phänomene auffasste und wie die Mathematiker sie zu behandeln gewohnt waren, bestand, und dass weder Faraday die Ausdrucksweise der Mathematiker genügend fand, noch die Mathematiker die Faradays billigen mochten. Ich hatte aber auch die Ueberzeugung, dass diese Discrepanz nicht davon herrührte, dass eine der beiden Parteien Unrecht hatte. Diese Ueberzeugung habe ich zunächst durch W. Thomson *) erlangt, dessen Beihilfe durch Rat und Tat ich nicht minder, wie seinen Abhandlungen alles das verdanke, was ich auf diesem Gebiete gelernt habe.

Je mehr ich fortfuhr Faradays Werke zu studiren, desto mehr erkannte ich, dass auch seine Art, die electrischen Phänomene aufzufassen und zu beschreiben, wenngleich er sich nicht der gewöhnlichen mathematischen Zeichensprache bediente, eine mathematische war.

So sah, zum Beispiel, Faraday in seinem geistigen Auge überall da Kraftlinien den Raum durchdringen, wo die Mathematiker in die Ferne wirkende Kraftcentren supponirten, und wo Diese nichts als die Abstände zwischen den Kraftcentren bemerkten, war für Jenen ein Zwischenmedium vorhanden. Faraday suchte die Ursache der Erscheinungen in Actionen, die im Zwischenmedium vor sich gehen sollten, die Mathematiker dagegen gaben sich damit zufrieden, dass sie sie in einer Fernwirkung auf die electrischen Fluida entdeckten.

Als ich nun Faradays Ideen, wie ich sie verstand, in mathematische Form brachte, fand ich, dass die aus denselben fliessenden Resultate im allgemeinen vollständig mit denen der Mathematiker zusammenfielen. Beide Methoden geben von dem Verlauf derselben Erscheinungen Rechenschaft und beide lieferten dieselben Wirkungsgesetze. Aber während die Faradaysche Methode in einer Deduction des Besondern aus dem Allgemeinen bestand, beruhte die mathematische

*) Ich benutze die Gelegenheit, um W. Thomson und Professor Tait für die mannigfachen Unterstützungen, die sie mir während des Druckes meines Werkes haben angedeihen lassen, meinen Dank auszusprechen.

Digitized by Google

Methode auf dem synthetischen Aufbau des Allgemeinen aus dem Besondern.

Ich fand ferner, dass manche der von Mathematikern entdeckten fruchtbarsten Untersuchungsmethoden sich weit besser durch Faradays Terminologie als durch ihre ursprüngliche Darstellung entwickeln liessen.

Beispielsweise gehört die Potentialtheorie, wenn man das Potential als eine Grösse betrachtet, welche einer gewissen partiellen Differentialgleichung genügt, der Hauptsache nach der von mir nach Faraday benannten Untersuchungsmethode an. Sieht man dagegen das Potential als Summe von Electricitätsmengen, deren jede durch die Entfernung ihrer Lage von einem gegebenen Punkt dividirt ist, an, so resultirt die Potentialtheorie aus der zweiten Untersuchungsmethode. Daraus erklärt sich, weshalb so viele Entdeckungen von Laplace, Poisson, Green und Gauss gerade in diesem nach Faradays Ideen geschriebenen Buche ihren geeigneten Platz und Ausdruck finden müssen.

Die Electricitätslehre ist von den Anhängern der Theorie einer Wirkung in die Ferne namentlich in Deutschland mächtig gefördert worden. Weber hat seine so bedeutenden electrischen Maassbestimmungen nach dieser Theorie interpretirt, und die von Gauss begonnenen und von Weber, Riemann, Neumann, Vater und Sohn, Lorenz und Andern fortgesetzten electromagnetischen Speculationen sind auf der Hypothese einer Wirkung in die Ferne aufgebaut. Doch hängen sie nebenbei entweder unmittelbar von relativen Geschwindigkeiten sich bewegender Partikel ab, oder sie werden durch die Supposition einer allmäligen Fortpflanzung von Partikel zu Partikel von irgend etwas, sei es von der eines Potentials oder einer Kraft bestimmt. Die grossen Erfolge, die die genannten hervorragenden Forscher bei der Anwendung ihrer Analyse auf electrische Phänomene erzielt haben, mussten naturgemäss ihren theoretischen Speculationen bedeutendes Gewicht verleihen, und es konnte nicht fehlen, dass diejenigen, welche bei diesen grössten Autoritäten auf dem Gebiete der mathematischen Electricitätslehre ihre Kenntnisse schöpften, je mehr sie sich mit ihren mathematischen Methoden vertraut machten, um so mehr auch von ihren physikalischen Hypothesen erfüllt wurden.

Diese physikalischen Hypothesen sind aber der Art und Weise, wie ich hier die einzelnen Gegenstände betrachten werde, gänzlich fremd. Ich lege gerade darauf Wert, dass meine Leser sich aus

Digitized by Google

meinem Werke überzeugen möchten, dass man unsere Wissenschaft noch mit ganz andern physikalischen Ansichten bearbeiten kann, die die einzelnen Phänomene nicht minder zu erklären im Stande sind, als jene genannte Hypothese einer Wirkung in die Ferne. Und wenn auch die hier auseinandergesetzte Theorie in manchen Fällen weniger klar und präcis erscheinen dürfte, so glaube ich doch, dass sie dem Stande unserer Kenntnisse besser sowohl in dem entspricht, was sie explicirt, als auch in dem, was sie unentschieden lässt.

Es ist für die Naturphilosophie von hoher Bedeutung, dass man in der Tat auf zwei verschiedenen Wegen die Haupterscheinungen des Electromagnetismus zu beschreiben und einen Versuch die Fortpflanzung des Lichtes als ein electrisches Phänomen aufzufassen und die Lichtgeschwindigkeit wirklich zu berechnen zu unternehmen vermochte, während doch die Fundamentalconceptionen und die meisten secundären Ansichten über die Bedeutung der einzelnen diesbezüglichen Grössen in beiden Fällen radical verschiedene sind.

Ich habe deshalb mein Werk nicht als Richter, sondern wie ein Advocat geschrieben. Doch habe ich keinen Versuch gemacht, beide Methoden unparteiisch nebeneinander zu beschreiben, sondern mich fast ausschliesslich auf die eine, die Faradaysche, beschränkt. Ich zweifle nicht, dass die andere Methode, die deutsche, wie ich sie nenne, auch ihre Vertheidiger finden und eine der Genialität ihrer Urheber würdige Bearbeitung erfahren wird.

Ich mache keinen Anspruch darauf, dass meine Aufzählung der electrischen Erscheinungen, Versuche und Apparate erschöpfend sein soll. Wer alles, was bis jetzt auf diesem Gebiete erkundet und erfunden worden ist, lesen will, wird sich namentlich durch de la Rives *Traité d'Electricité* und durch die deutschen Werke, durch Wiedemanns *Lehre von der Electricität*, Riess' *Reibungselectricität*, Beers *Einleitung in die Electrostatik* u. a. m. unterstützt finden.

Ich habe mich fast gänzlich auf die mathematische Bearbeitung unserer Wissenschaft beschränkt, ich empfehle aber dem Studirenden, nachdem er sich, wenn möglich durch Experimente, eine genügende Kenntnis von den zu beobachtenden Phänomenen verschafft hat, sorgfältig Faradays *Experimental Researches in Electricity**) zu lesen.

*) Zum Teil auch in *Pogg. Ann.* veröffentlicht.

Digitized by Google

Er wird daselbst streng historische Berichte über einige der wichtigsten Entdeckungen und Untersuchungen auf dem Gebiete der Electricität finden, die in ihrer Ordnung und Aufeinanderfolge kaum so von einem Manne hätten verfasst werden können, dem die Resultate von vornherein bekannt gewesen wären und der seine ganze Aufmerksamkeit darauf gelenkt hätte, die wissenschaftlichen Arbeiten und ihre Resultate möglichst genau zu beschreiben.

Es ist ja schon an sich ein Vorteil, wenn der Studirende sich möglichst mit den Originalabhandlungen über seine Wissenschaft vertraut macht, denn er wird ihre Lehren um so leichter in sich aufnehmen, je mehr er sie in seinem Geiste sich nochmals gewissermassen entwickeln lässt. Zu einer derartigen Lectüre von Faradays *Researches* wird man aber verhältnissmässig leicht kommen, weil sie in Form eines Werkes veröffentlicht sind und in ihrer Aufeinanderfolge gelesen werden können.

Ich würde einen meiner sehnlichsten Wünsche erfüllt sehen, wenn es mir durch das, was ich hier schreibe, gelungen sein sollte, dem einen oder dem anderen Studirenden das Verständnis der Faradayschen Ideen und Ausdrucksweise zu erleichtern, und wenn ich auch andern den Genuss verschafft haben sollte, den ich selbst empfand, als ich *Researches* des grossen Physikers las.

Ich habe das ganze Werk in vier Teile eingeteilt und jeden Teil mit einer die ersten Capitel ausfüllenden Beschreibung der betreffenden Phänomene und mit ihrer elementaren Theorie begonnen. Ich glaube, dass der Leser schon in den ersten Capiteln genügend Material zur Erlangung einer elementaren Kenntnis von dem gesammten Gebiete unserer Wissenschaft finden wird.

Die übrigen Capitel eines jeden Teiles umfassen die schwierigern und höhern Partieen der Theorie, Auseinandersetzungen für die numerische Auswertung der Formeln und Beschreibungen der bezüglichen Messinstrumente und Untersuchungsmethoden.

Die Beziehungen zwischen electromagnetischen und Strahlungsphänomenen und die Theorie der molecularen electrischen Ströme habe ich mit den Resultaten der Speculation über die Fernewirkung der Kräfte in die vier letzten Capitel des zweiten Bandes verwiesen.

1. Februar 1873.

Maxwell.

Digitized by Google

Vorwort des Uebersetzers.

Im vorliegenden Buche wird dem wissenschaftlichen Publicum eine nach der zweiten Auflage angefertigte Uebersetzung des ersten Bandes von Maxwells *Treatise on Electricity and Magnetism* unterbreitet. Maxwell ist leider durch seinen allzufrühen Tod verhindert worden, die neue Ausgabe seines Werkes selbst vollständig zu revidiren, er hat nur die neun ersten Capitel umarbeiten können; die zweite englische Ausgabe ist vom zehnten Capitel ab lediglich ein Abdruck der ersten.

Ich habe mich bestrebt, möglichst wortgetreu zu übersetzen und die Eigenart der Ausdrucksweise und des Gedankenganges Maxwells zu wahren. Doch verkenne ich nicht, dass mir dies bei den eminenten Schwierigkeiten, die das eigenartige Werk manchmal dem Verständnis bietet, nicht überall gelungen ist. Zusätze habe ich nur an wenigen Stellen, und nur da gemacht, wo ich selbst erst durch längeres Nachdenken zur richtigen Auffassung habe gelangen können. In der Anordnung des Stoffes und in Bezug auf die Auswahl aus den vom Herausgeber der zweiten englischen Auflage, Herrn Dr. Niven, hinzugefügten Erläuterungen bin ich mit etwas grösserer Freiheit vorgegangen. Die Rechnungen sind fast durchgängig nochmals durchgeführt worden, und der Leser darf die Maxwellschen Formeln mit Vertrauen hinnehmen. Die Literaturangaben habe ich durch grössere Berücksichtigung der deutschen Werke und Abhandlungen zu vervollständigen gesucht.

Zusammen mit dem jetzt in dritter Auflage erscheinenden Wiedemannschen Werke über Electricität bietet das Maxwellsche Buch das vollständigste Lehrgebäude, dessen sich ein Zweig der Physik zu rühmen vermag.

Bei der Uebersetzung und Redaction des Buches hat mir Herr Dr. Leopold Levy die ausgiebigste Unterstützung angedeihen lassen, wofür ich ihm meinen aufrichtigen Dank ausspreche.

Berlin, October 1882.

Weinstein.

Digitized by Google

Zu beachten.

Die Begriffe und Grössen, mit denen es unsere Wissenschaft zu tun hat, sind an den Stellen, wo sie ihre eigentliche Definition erfahren, durch cursiven Druck und grosse Anfangsbuchstaben hervorgehoben.

Im Text sind Brüche nach der jetzt auch in den Wiedemannschen Annalen adoptirten Schreibweise gedruckt, also $(a + b)/(c + \partial)$ für das bisher übliche $\frac{a+b}{c+\partial}$ gesetzt.

Partielle Differentiale sind nach Jacobi durch ein ∂, totale durch d charakterisirt.

Die Formeln sind in dem englischen Original ohne Rücksicht auf ihre Bedeutung für die betreffende Untersuchung durch jedes Capitel fortlaufend numerirt. Ich war in der Bezeichnung derselben bestrebt, dem Leser auch äusserlich die Ergebnisse hervorzuheben, welche in jedem Falle den Zielpunkt der Untersuchung bilden.

Die Hauptformeln sind durch arabische Ziffern, die Nebenformeln durch Buchstaben gekennzeichnet.

Zwei gleichwertige Formeln sind durch dieselbe Ziffer unter Hinzufügung von Buchstaben charakterisirt.

Die Bezeichnungen unentwickelter Formeln sind von denen gleichwertiger entwickelter durch Accente unterschieden.

Specielle Fälle einer Formel sind durch die betreffende Zahl der Formel unter Hinzufügung von Zahlen-Indices hervorgehoben.

Zum Schluss bitte ich den Leser noch die folgenden störenden Druckfehler zu beachten.

Auf Seite 66 hat der zweite Absatz durch falsche Stellung des Fürworts „welche“ seinen Sinn verloren. Er muss lauten:

> Die nach Aussen gerichtete electrische Verschiebung durch eine Kugelfläche, welche mit einer gleichmässig electrisirten Kugel denselben Mittelpunkt hat, ist gleich der Ladung dieser Kugel.

Auf Seite 78 sind in der Formel 1_1) die beiden — Zeichen zu streichen.

Ferner auf Seite

122 im zweiten Abschnitt des Art. 69 a) statt s lies τ,

232 in Formel 8 b) statt $A_m y^{m-1}$ lies $A_m x^m$.

236 in der Formel für α statt $1 + k^2 \sin^2\vartheta$ lies $1 - k^2 \sin^2\vartheta$.

Digitized by Google

Inhalt.

Einleitung.

Dimensionen der Grössen.

Art.		Seite
1-2.	Messung der Grössen	3
3-5.	Die drei fundamentalen Einheiten	4
6.	Abgeleitete Einheiten	6

Mathematische Definitionen und Lehrsätze.

7-8.	Physikalischer Begriff der Continuität und Discontinuität	8
8.	Discontinuität der Derivirten einer continuirlichen Function	9
9.	Periodische und vielfache Functionen	10
10-15.	Ueber die Beziehung von physikalischen Grössen zu den Richtungen im Raume	10
16.	Das Linienintegral	15
16-18.	Potential	16
18-20.	Zusammenhängende Flächen und Räume	18
21-22.	Das Flächenintegral	20
22.	Stromlinien und Stromfäden	23
22.	Flächenintegrale in mehrfachen Gebieten	23
23.	Rechts und Links im Raume	25
24.	Beziehung zwischen Flächen- und Linienintegralen	26
25-26.	Ueber die Operation ∇ an einer Vectorfunction	28

Erster Teil. — Electrostatik.

Cap. I.

Beschreibung der electrischen Erscheinungen.

27.	Electrisirung durch Reibung	33
28.	Electrisirung durch Induction oder Influenz	34
29.	Electrisirung durch Leitung	35
29.	Leiter und Nichtleiter oder Conductoren und Isolatoren	35
29-35.	Ladung	35
36.	Hypothese der Zwei Fluida	40
37.	Hypothese von Einem Fluidum	42
38.	Messung der Kraftwirkung zwischen electrisirten Körpern	43

Digitized by Google

Art. Seite
39. Abhängigkeit der Kraft von der Höhe der Ladung 44
40. Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung. 45
41. Definition der electrostatischen Electricitätseinheit. 45
42. Dimensionen der electrostatischen Electricitätseinheit 46
43. Verification des Gesetzes der electrischen Kraftwirkung. 46
44. Das electrische Feld 47
45. Electromotorische Kraft und electrisches Potential 48
46. Aequipotentielle Flächen oder Electrische Niveauflächen 49
47. Kraftlinien 51
48. Electrische Spannung 51
49. Electromotorische Kraft zwischen zwei Conductoren 51
50. Capacität eines Conductors. 52
50. Accumulatoren und Condensatoren 52
51. Widerstand der Körper gegen den Durchgang von Electricität . . . 52
52. Specifische inductive Capacität 54
53-54. Absorption der Electricität. 55
55. Disruptive Entladung. 57
55. Die electrische Lichthülle, Convective Entladung 57
56. Das electrische Büschellicht 59
57. Der electrische Funke 59
58. Pyroelectricität 61
59-62. Plan und Anlage dieses Buches 62

Cap. II.

Elementare mathematische Theorie der statischen Electricität.

63. Mathematische Definition der Electricitätsmenge 70
64. Verteilung der Electricität in einem Körper, Raumdichte 70
64. Verteilung auf einer Fläche, Flächendichte 71
64. Verteilung längs einer Linie, Liniendichte 71
64. Electricitätsmenge 72
65. Definition der Electricitätseinheit. 72
66. Kraftgesetz für electrisirte Körper 72
67-68. Resultirende Kraft zwischen zwei electrischen Körpern 73
69. Das Linienintegral der electrischen Kraftintensität 74
70. Potentialfunction 75
71. Darstellung der Kraftintensität und ihrer Componenten durch das Potential 76
72. Potential eines Conductors. 77
73. Potential eines electrischen Systems 78
74a-74b. Ueber den Beweis des Gesetzes vom umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung 78
74c-74e. Theorie des Experiments 81
75. Das Flächenintegral der electrischen Induction und die electrische Verschiebung durch eine Fläche 85
76. Induction eines einzelnen Kraftcentrums durch eine Fläche 86
77. Die Gleichungen von Laplace und Poisson 87
78a. Variation des Potentials an einer geladenen Fläche 88

Digitized by Google

Art. Seite
78b. Charakteristische Gleichung an einer electrischen Fläche 90
79-81. Mechanische Kraftwirkung an einer geladenen Fläche 91
82. Kraftlinien 95
83a. Berücksichtigung der dielectrischen Eigenschaften der Zwischenmedien 97
83b. Scheinbare Dichte 98

Cap. III.

Arbeit und Energie in einem electrischen System.

84-86. Arbeit bei der Electrisirung eines Systems 100
87. Theorie eines Systems von Conductoren 104
88. Dimensionen der Potential- und Inductionscoefficienten 108
89a. Bedingungen, denen die Potential- und Inductionscoefficienten genügen müssen 108
89b-91c. Sätze über Potential- und Inductionscoefficienten 108
92a-92b. Specielle Anwendungen 112
93a-93c. Arbeit während der Verschiebung eines Systems geladener Conductoren 115
94. Beziehungen zwischen Körpern, die in ihrer Form oder in ihrer Ladung sich ähnlich sind 117

Cap. IV.

Allgemeine Theoreme.

95a-95b. Vorbemerkungen 119
96a-97b. Der Greensche Satz 122
98. Die Greensche Function 129
99a-99b. Electrische Energie 131
100a-100c. Der Thomsonsche Satz 134
101a-101g. Componenten der Verschiebung und der electromotorischen Kraft . 139
101h. Allgemeine Form des Greenschen Satzes 144
102a-102c. Grenzwerte für die electrische Capacität 146

Cap. V.

Mechanische Kräfte zwischen zwei electrischen Systemen.

103-111. Mechanische Kräfte zwischen zwei electrischen Systemen 152

Cap. VI.

Punkte und Linien des Gleichgewichts.

112. Bedingungen an Stellen des electrischen Gleichgewichts. 166
113-114. Anzahl der Gleichgewichtspunkte und Gleichgewichtslinien. . . . 168
115. Durchschnitt einer Niveaufläche durch sich selbst 170
116. Earnshaw's Theorem 171

Cap. VII.

Aequipotentielle Flächen und Kraftlinien.

117-122. Beschreibung der Niveauflächen und Kraftlinien in einfachen Fällen 174
123. Anleitung zum Zeichnen von Niveauflächen und Kraftlinien . . . 179

Digitized by Google

Cap. VIII.

Einfache Fälle der electrischen Vertheilung.

Art. Seite

124. Zwei parallele unendlich ausgedehnte Ebenen 183
125. Zwei concentrische Kugelflächen 185
126. Zwei unendlich lange coaxiale Cylinderflächen 188
127. Drei coaxiale Cylinder 189

Cap. IX.

Harmonische Kugelfunctionen.

128. Vorbemerkung 191
129a-129c. Singuläre Punkte des Potentials 191
129c-130b. Harmonische Raum- und Flächenfunctionen 194
131. Potential einer Kugelschale 196
132. Darstellung der harmonischen Kugelfunctionen 197
133a-134b. Sätze über harmonische Kugelfunctionen 200
135. Entwickelung nach zonalen harmonischen Functionen 204
136. Conjugirte harmonische Functionen 206
137. Symmetrisches System harmonischer Functionen 207
138-139. Zonale Functionen 208
140a-141. Tesserale und Sectorielle Functionen 210
142a-142b. Entwickelung nach tesseralen harmonischen Functionen 216
143. Graphische Darstellung der Curven gleicher Werte von harmonischen Functionen 218
144a. Eine Kugel unter dem Einfluss eines electrischen Systems . . . 219
144b. Die Greensche Function einer inducirenden Kugel 220
145a-145b. Nahezu sphärische Conductoren 223
145c. Conductor innerhalb einer Schale 226
146. Zwei Kugeln 227

Cap. X.

Confocale Flächen zweiten Grades.

147-148. Krummlinige Coordinaten 234
149. Transformation der Laplace-Poissonschen Gleichung 237
150. Lösungen der Differentialgleichung 238
150. Zweischalige Hyperboloide 238
150. Einschalige Hyperboloide 240
150. Ellipsoide 240
151-152. Besondere Fälle 241
153. Cylindrische Flächen 244
154. Confocale Paraboloide 245

Cap. XI.

Theorie der electrischen Bilder und der electrischen Inversion.

155. Vorbemerkung 248
156-160. Theorie der electrischen Bilder 249

Digitized by Google

Art. Seite
161. Abbildung in einer leitenden unendlichen Ebene 257
162-164. Inversion 258
165a. Abbildung in zwei Ebenen 264
165b-168b. Abbildung in zwei sich schneidenden Kugeln 265
169. Drei orthogonale Kugeln im freien electrischen Felde 272
170a-170b. Vier orthogonale Kugeln 273
171. Zwei concentrische Kugelflächen 275
172-174. Zwei sich ausschliessende Kugelflächen 278
175. Zwei sich berührende Kugeln 285
176-181. Kugelkalotte 288

Cap. XII.

Electrische Probleme in zweidimensionalen Gebieten.

182. Vorbemerkung 293
183-187b. Conjugirte Functionen 294
188. Inversion in zweidimensionalen Gebieten 300
189-190. Electrische Bilder in zweidimensionalen Gebieten 301
191. Vertheilung der Electricität in der Nähe der Kante eines von zwei Ebenen begrenzten Conductors 305
192. Confocale Ellipsen und Hyperbeln als Niveau- und Kraftlinien . . 307
193-194. Strömung in zerteilten Streifen 309
195. Eine einseitig begrenzte Platte zwischen zwei unendlichen Ebenen . 311
196. Condensator aus drei Platten 312
197. Eine Reihe paralleler Halbebenen 315
198. Eine plane und eine gewellte Ebene 316
199. Durchfurchte Flächen 317
200. Abänderung der Conductoren durch Rotation 318
201. Theorie des Thomsonschen Schutzringes 320
202. Eine halbe Ebene gegenüber einer ganzen Ebene 321
203-206. Theorie des Schutzgitters 323

Cap. XIII.

Apparate für electrostatische Untersuchungen.

207. Electrisirmaschinen 330
208. Der Voltasche Electrophor 332
209-213. Influenzmaschinen 333
214. Classificirung der Electrometer und Electroskope 339
215. Die Coulombsche Torsionswage 340
216-218. Absolutes Scheibenelectrometer von Thomson 343
219-220. Thomsons Quadrantenelectrometer 350
221-222. Messung des Potentials an einem frei gelegenen Punkt 354
223-225. Theorie der Prüfungskörper; Probekugel, Probescheibchen . . . 356
226-228. Electrische Accumulatoren 361
229. Vergleichung der Capacitäten von Accumulatoren 365

*

Digitized by Google

Zweiter Teil. — Electrokinematik.

Cap. I.

Der electrische Strom.

Art. Seite

230-231. Bedeutung des electrischen Stromes 371
232. Stationäre Ströme 372
232-234. Die Voltasche Batterie 372
235. Bahn und Dauer des Stromes 374
236-238. Electrolytische Wirkung des Stromes 374
239-240. Magnetische Wirkungen des Stromes 376

Cap. II.

Leitung und Widerstand.

241. Vorbemerkung 378
241. Das Ohmsche Gesetz 378
242. Wärmeentwickelung durch den electrischen Strom 379
243-245. Analogieen und Unterschiede zwischen Wärme und Electricität . . . 380

Cap. III.

Electromotorische Kräfte bei der Berührung von Körpern.

246-248. Contactelectricität; Spannungsgesetz 383
249. Das Peltiersche Phänomen 384
250-254. Thermoelectricität 386

Cap. IV.

Electrolyse.

255. Electrolytische Leitung 392
256-260. Theorie der Electrolyse 394
261. Secundäre Vorgänge bei der Electrolyse 398
262-263. Erhaltung der Energie in electrolytischen Processen 400

Cap. V.

Electrolytische Polarisation.

264-266. Wirkung der Polarisation auf den primären Strom 403
267-270. Ursache, Energie und Entwickelung der Polarisation 404
271. Secundärbatterieen 407
272. Constante Elemente 410

Cap. VI.

Lineare electrische Ströme.

273. Definition eines linearen Leiters 415
274. Das Ohmsche Gesetz 415
275. System hintereinander gereihter Leiter 416
276. System nebeneinander gereihter Leiter 417
277. Körperliche Leiter von gleichförmigem Querschnitt 417
278-279. Dimensionen des Widerstandes und der Leitungsfähigkeit 418

Digitized by Google

Art. Seite
280-282. Allgemeine Theorie eines Systems linearer Leiter 419
283-284. Wärmemenge, welche in einer Drahtverbinduug durch einen Strom erzeugt wird 423

Cap. VII.

Ströme in körperlichen Leitern.

285-286. Zerlegung eines electrischen Stromes 425
287-289. Stromflächen 426
290-292. Stromröhren 428
293. Stromlinien 429
294. Stromschalen und Stromfunctionen 429
295. Continuitätsgleichung 430
296. Electricitätsmenge, welche durch eine gegebene Fläche hindurchgeht 431

Cap. VIII.

Widerstand und Leitung in körperlichen Leitern.

297-298. Allgemeinste Beziehungen zwischen Stromstärke und electromotorischer Kraft 433
299. Wärmeentwickelung im Leiter 435
300. Bedingung der Stabilität 436
301-302. Continuitätsgleichung in homogenen Medien 436
303. Transformation der Widerstandsgleichungen 437
304. Der Thomsonsche Satz in der Electrokinematik 438
305. Eindeutigkeit des Problems der Stromverteilung 440
306-309. Näherungsweise Berechnung des Widerstandes eines Conductors von gegebener Form 442

Cap. IX.

Leitung durch heterogene Media.

310. Bedingungen an der Trennungsfläche zweier leitenden Medien . . 450
311a. Strom aus einem isotropen in ein anisotropes Medium 451
311b. Strom aus einem isotropen in ein anderes isotropes Medium . . . 452
312. Isotrope Kugel in einem isotropen Conductor 452
313a. Isotrope Kugel umgeben von einer isotropen Schale in einem isotropen Conductor 453
313b-313c. Isotrope Kugelschale in einem isotropen unendlichen Conductor . . 454
314. Mehrere isotrope Vollkugeln in einem unendlichen isotropen Leiter . 456
315-316. Zwei isotrope durch eine Ebene getrennte Medien 457
317-318. Leitung durch eine zwei isotrope Medien trennende Platte 460
319-321. Geschichteter Leiter 462
322. Isotropes Medium mit eingestreuten parallelen Parallelepipeden . . 464
323. Parallelepiped von einem isolirten Draht diagonal durchsetzt . . . 465
324. Netzwerk linearer Leiter 466

Cap. X.

Leitung in Dielectricis.

325. Vorbemerkung 468
326-327. Ladung und Entladung eines Condensators 469

Digitized by Google

Art. Seite
328. Geschichtetes Dielectricum 471
329a-330. Electrisches Residuum 473
331. Strom durch ein System von Condensatoren 477
332-333. Telegraphische Kabel 479
334. Mechanische Versinnbildlichung der Eigenschaften eines Dielectricums 481

Cap. XI.

Messung des electrischen Widerstandes.

335-340. Normal-Widerstandseinheiten 485
341-344. Widerstandsrollen 488
345. Widerstandsvergleichung nach Ohm 491
346. Widerstandsvergleichung nach Becquerel 492
347a-350. Widerstandsvergleichung nach Wheatstone 497
351-352. Messung geringer Widerstände 504
353-355. Vergleichung von bedeutenden Widerständen 508
356. Thomsons Verfahren bei der Bestimmung des Widerstandes eines Galvanometers 510
357. Mances Methode zur Bestimmung des Widerstandes einer Batterie . 512
358. Vergleichung electromotorischer Kräfte 515

Cap. XII.

Electrischer Widerstand der Körper.

359. Classificirung der Körper 517
360-362. Electrischer Widerstand der Metalle 518
363-365. Electrischer Widerstand der Electrolyte 521
366-370. Electrischer Widerstand der Dielectrica 523

Digitized by Google

Einleitung.

Digitized by Google

Digitized by Google

Dimensionen der Grössen.

Messung der Grössen.

1. Jeder Ausdruck für eine Grösse besteht aus zwei Componenten oder Factoren. Der eine bezeichnet eine vorausbestimmte, ein für alle Mal als Vergleichseinheit dienende Quantität der zu messenden Grösse, während der andere angiebt, wie oft die Vergleichseinheit genommen werden muss, bis man den geforderten Betrag der betreffenden Grösse erhält. Man bezeichnet den ersten Factor kurzweg als *Einheit* der Grösse, den zweiten als ihren *Numerischen Betrag.*

Ist mithin jede Grösse mit einer aus Grössen ihrer eigenen Art entnommenen Einheit messbar, so kann man doch in den Zweigen der Wissenschaft, die ihre Grundlagen in der Mechanik finden, alle Grössen durch drei fundamentale oder absolute Einheiten, durch die der Länge, der Zeit und der Masse, bestimmen. Beispielsweise sind die Einheiten von Flächen und Körpern durch Quadrate und Würfel definirt, deren Seiten der Längeneinheit gleich sind.

In der Praxis benutzt man häufig verschiedene Einheiten zur Messung derselben Grösse. So dient in England zur Bestimmung eines Rauminhaltes neben dem Cubikfuss auch noch das Gallon (das Volumen von 10 Pfund Wasser), ein Raummaass, dass sich wol in manchen Fällen empfehlen mag, das aber theoretisch zu verwerfen ist, weil es in keiner rationalen Beziehung zu dem Längenmaass steht.

2. Da es sich für uns um ein mathematisch streng definirtes Maasssystem handelt, so werden wir jene drei fundamentalen obengenannten Einheiten der Länge, Zeit und der Masse zu Grunde zu legen und aus ihnen alle anderen Einheiten in der möglichst einfachen Weise abzuleiten haben. Die Ausdrücke, zu denen wir so gelangen, müssen dann so beschaffen sein, dass sie unabhängig von den in den verschiedenen Ländern gebräuchlichen Einheiten für die fundamentalen Maasse stets zu einem richtigen Resultate führen.

Digitized by Google

Es ist aber an sich von der grössten Wichtigkeit, wenn man schon andere Einheitssysteme in wissenschaftlichen Untersuchungen verwenden will, nur solche zu wählen, welche genügend definirt und in ihrem Verhältnis zu den absoluten Einheiten gehörig fixirt sind, so dass man mit Sicherheit von einem System zu dem anderen überzugehen vermag.

Am leichtesten lassen sich solche Uebergänge bewerkstelligen, wenn man für jede Grösse die Dimensionen angiebt, in denen die drei fundamentalen Einheiten in ihr vertreten sind.

Eine Grösse ist aber nach einer anderen Grösse von der $n$ten Dimension, wenn diese in ihr in der $n$ten Potenz enthalten ist. So ist die wissenschaftliche Einheit des Volumens der Würfel, dessen Seite der Längeneinheit gleich ist; variirt diese, so ändert sich der Würfel, wie die dritte Potenz, daher ist die Einheit des Volumens von der dritten Dimension in Bezug auf die Längeneinheit.

Die Kenntnis der Dimensionen der Grössen giebt ein bequemes Mittel die Zulässigkeit von Formeln, die durch längere Rechnung gewonnen sind, zu prüfen. Da nämlich das numerische Endresultat mit Aenderung der Einheiten für die fundamentalen Maasse nicht variiren darf, so müssen alle Glieder einer Gleichung nach derselben Einheit auch von derselben Dimension sein, wenn nicht die Gleichung in verschiedenen Ländern verschiedene Ergebnisse liefern soll.*)

Die drei fundamentalen Einheiten.

3. *Länge.* Als Einheit für die Länge wird bei wissenschaftlichen Untersuchungen in England der Fuss verwendet, der als der dritte Teil eines in den *Exchequer Chambers* aufbewahrten Prototyps für den Yard definirt ist.

In Frankreich, Deutschland, Italien und den anderen Ländern, welche das metrische System adoptirt haben, gilt als solche das *Meter.* Theoretisch sollte dasselbe der zehnmillionste Teil eines vom Pol zum Aequator der Erde führenden Quadranten sein. Tatsächlich ist es aber durch das von Borda angefertigte *mètre des archives,* das mit dem vorher von Delambre bestimmten Urmaasse bei der Temperatur des schmelzenden Eises gleiche Länge haben sollte, definirt. Die Länge des Meters ist auch nicht mit den neueren sichereren Bestimmungen der Dimensionen der Erde in Einklang gebracht worden, man drückt vielmehr umgekehrt die Länge eines Quadranten durch das einmal fixirte Meter aus.

Die Astronomen benutzen häufig die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne als Längeneinheit.

---

*) Die Theorie der Dimensionen der Grössen ist von Fourier begründet worden. *Théorie de la chaleur § 160.*

Digitized by Google

Bei dem gegenwärtigen Stand der Wissenschaft wäre die allgemeinste Längeneinheit, die wir annehmen könnten, die Wellenlänge im Vacuum einer bestimmten Lichtart, wie sie von einem weitverbreiteten Körper, etwa Natrium, das gut definirte Linien in seinem Spectrum hat, ausgesandt wird. Eine solche Einheit würde unabhängig von Aenderungen in den Dimensionen der Erde sein, und sollte deshalb von Denen angenommen werden, welche ihren Schriften eine grössere Lebensdauer zusprechen möchten als unserm Planeten.

Im Folgenden soll die Einheit der Länge durch $[L]$ bezeichnet werden. Ist dann l der numerische Betrag einer Länge, die in Einheiten $[L]$ gemessen werden soll, so giebt $l\,[L]$ den explicitern Ausdruck für ihre wirkliche Länge.

4. *Zeit.* Die Einheit der Zeit wird in allen civilisirten Ländern von der Rotationsdauer der Erde um ihre Achse hergeleitet. Der Sterntag oder die wahre Periode für die Umdrehung der Erde kann durch gewöhnliche astronomische Beobachtungen mit grosser Präcision bestimmt werden, und aus diesem lässt sich dann mit Hilfe der Jahreslänge leicht der mittlere Sonnentag berechnen.

Demgemäss wird in allen physikalischen Untersuchungen eine *Secunde* des mittleren Sonnentages als Zeiteinheit angewendet.

In der Astronomie gilt manchmal das Jahr als Zeiteinheit.

Auch hier lässt sich eine allgemeinere Einheit in der Oscillationsdauer der Lichtart angeben, deren Wellenlänge man als Längeneinheit benutzt hat.

Die Zeiteinheit als solche soll durch $[T]$ bezeichnet werden, während t den numerischen Betrag einer Zeitdauer festzusetzen hat.

5. *Masse.* Die Einheit der Masse ist in England das *avoirdupoids-pound*, welches in den *Exchequer Chambers* aufbewahrt wird. Das *Grain*, welches manchmal ebenfalls als Einheit benutzt wird, bildet den 7000sten Teil dieses Pfundes.

Im metrischen System ist das *Gramm* die Masseneinheit. Theoretisch sollte es gleich dem Gewicht eines Cubikcentimeters destillirten Wassers bei der Temperatur seiner grössten Dichte und unter dem Drucke von 760 mm sein, tatsächlich ist es der tausendste Teil eines in Paris aufbewahrten Urkilogramms.

Da die Genauigkeit, mit der Massen durch Wägungen verglichen werden können, verhältnismässig weit grösser ist, als die bei der Vergleichung von Längen erreichbare Präcision, so sollte man alle Massen, wo es nur angeht, direct mit dem Urgewicht vergleichen, statt ihre Beträge aus Experimenten an Wasser abzuleiten.

In der beschreibenden Astronomie setzt man die Einheit gleich der Masse der Sonne oder der Erde, in der theoretischen dagegen leitet man sie aus den Einheiten der Zeit und der Länge unter Zuziehung des

Digitized by Google

allgemeinen Gravitationsgesetzes ab. Die astronomische Einheit für die Masse ist dann diejenige Masse, welche einer anderen Masse durch ihre Anziehung in der Einheit der Entfernung eine Einheit der Beschleunigung erteilt.

Wir können nunmehr bei der Bildung unseres allgemeinen Systems von Einheiten die Einheit der Masse entweder in der oben angegebenen Weise aus den Einheiten für Zeit und Länge ableiten, wie das bis zu einer gewissen rohen Annäherung bei dem jetzigen Stande der Wissenschaft wirklich möglich ist, oder aber, wenn wir hoffen dürfen bald die Masse eines einzelnen Molekels einer Substanz bestimmen zu können*), so lange warten, bis wir diese als Masseneinheit zu benutzen vermögen.

Die Einheit der Masse als eine der drei fundamentalen Einheiten bezeichnen wir durch $[M]$. Wenn, wie im metrischen System, die Einheit der Masse durch das Gewicht eines bestimmten Volumens einer bestimmten Substanz, Wasser, definirt wird, so ändert sich die Masseneinheit wie die Volumeinheit oder wie $[L^3]$.

In der Astronomie, in der die Masseneinheit im Verhältnis zu der von ihr ausgeübten Attraction definirt wird, sind die Dimensionen von $[M]$ gegeben durch $[L^3 T^{-2}]$.

Wirkt nämlich während einer sehr kurzen Zeit die Attraction einer Masse m auf einen in der Entfernung r ursprünglich in Ruhe befindlichen Körper nach dem Newton'schen Anziehungsgesetz, so ist der Weg s, den der Körper in dieser Zeit t zurücklegt, nach der Galilei'schen Regel

$$s = \frac{1}{2} f t^2 = \frac{1}{2} \frac{m}{r^2} t^2$$

mithin $m = 2 r^2 s / t^2$. r und s sind beide Längen, t ist eine Zeit, die Dimensionen von m müssen daher, wofern jene Gleichung einen Sinn haben soll, durch $[L^3 T^{-2}]$ gegeben sein. Ganz dasselbe lässt sich aus jeder Gleichung der Astronomie, in der nicht alle Glieder die Masse m enthalten, nachweisen.**)

Abgeleitete Einheiten.

6. Ein Körper besitzt die Einheit der *Geschwindigkeit*, wenn er in der Zeiteinheit sich um eine Längeneinheit fortbewegt. Die Dimensionen der Geschwindigkeitseinheit sind mithin $[L T^{-1}]$.

---

*) J. Loschmidt, *Zur Grösse der Luftmolekel.* Berichte der Wiener Academie 1865 Oct. 12; G. J. Stoney, *The Internal Motions of Gases.* Phil. Mag. 1868 Aug.; W. Thomson, *The Size of Atoms.* Nature 1870 März 31.

**) Benutzt man Centimeter und Sekunde als Einheiten für Länge und Zeit, so ergiebt sich die astronomische Masseneinheit aus den Dimensionen der Erde, ihrer Dichte und der Intensität der Schwere auf ihrer Oberfläche zu $1{,}537 \times 10^7$ Gramm. Dabei ist für die Dichte der Erde die von Bailey aus allen seinen Bestimmungen deducirte Zahl 5,6604 angenommen worden.

Digitized by Google

Uebrigens würde die Einheit der Geschwindigkeit, wenn wir unsere Einheiten für Länge und Zeit von den Lichtvibrationen ableiten, gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes sein.

Die Einheit der *Beschleunigung* ist diejenige, bei welcher die Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um die Geschwindigkeitseinheit zunimmt. Ihre Dimensionen sind also $[LT^{-2}]$.

Die Einheit der *Dichte* ist die Dichte einer Substanz, von der in der Volumeneinheit die Masseneinheit enthalten ist. Die Dimensionen sind $[ML^{-3}]$.

Die Einheit des *Moments* giebt das Moment einer Masseneinheit, die sich mit der Geschwindigkeitseinheit fortbewegt. Die Dimensionen sind $[MLT^{-1}]$.

Die Einheit der *Kraft* erteilt einem Körper in der Zeiteinheit die Momenteinheit und hat die Dimensionen $[MLT^{-2}]$.

Dies ist die absolute Krafteinheit, wie sie durch jede Gleichung der Dynamik definirt ist. In manchen Lehrbüchern wird aber eine andere Einheit, nämlich das Gewicht der gerade gebräuchlichen Masseneinheit benutzt. Um dann den Gleichungen der Dynamik gerecht zu werden, wird diese Einheit wieder verlassen und eine künstliche dadurch eingeführt, dass man jene Einheit noch durch die Schwerkraft an dem betreffenden Orte dividirt. Dadurch wird aber sowohl die Masseneinheit als die Krafteinheit in Abhängigkeit von der Schwerkraft gebracht, und da diese von Ort zu Ort wechselt, so sind auch jene Einheiten immer an den Ort gebunden, an welchem sie bestimmt sind. Beziehungen, in denen sie vertreten sind, leiden also solange an Unvollständigkeit als nicht angegeben ist, an welchem Orte sie als richtig befunden worden sind.

Doch ist diese Art die Krafteinheit zu fixiren seit der Zeit, da man durch Gauss zunächst die magnetischen Kräfte in allen Ländern, in denen die Schwerkraft selbst verschieden ist, nach einer und derselben allgemeinen Methode zu messen gelernt hat, so ziemlich geschwunden. Man bestimmt jetzt in der Tat alle Kräfte nach jener streng dynamischen Definition, welche an allen Orten dieselben numerischen Resultate finden lässt.

Die Einheit der *Arbeit* ist gleich dem Producte aus der Krafteinheit in die in Richtung der Wirkung der Kraft genommenen Längeneinheit. Die Dimensionen sind $[ML^2T^{-2}]$.

Da die *Energie* eines Systems von Körpern gleich der in demselben aufgehäuften potentiellen Arbeit ist, so wird sie durch die Arbeitsmenge gemessen, die das System bis zur vollständigen Erschöpfung seines Energieinhalts leisten kann.

Von andern Grössen sollen die Definitionen und Dimensionen bei passender Gelegenheit angegeben werden.

Will man die Werte von physikalischen Grössen, die in einer Einheit ausgedrückt sind, auf eine andere Einheit beziehen, so darf man sich nur

Digitized by Google

erinnern, dass jeder Ausdruck für eine Grösse aus zwei Componenten besteht, aus der Einheit und aus einem Zahlenfactor, welcher angiebt, wie oft diese Einheit genommen werden soll. Der Zahlenfactor ändert sich daher umgekehrt wie die Einheit, er muss also den verschiedenen Potenzen der Fundamentaleinheiten, die in der abgeleiteten Einheit vertreten sind, umgekehrt proportional sein.

Mathematische Definitionen und Lehrsätze.

—×—

Physikalischer Begriff der Continuität und Discontinuität.

7. Eine Grösse ändert sich continuirlich, wenn sie bei dem Uebergange von einem Werte zu einem andern alle Zwischenwerte nacheinander annimmt.

Man kann sich den Begriff der Continuität unter Zuhilfenahme der Existenz eines Körperpartikels in Zeit und Raum klar machen. In der Tat kann ein solches Partikel nicht von einem Orte zu einem andern gelangen, ohne einen ununterbrochenen Weg im Raume zu beschreiben, und die Coordinaten seiner aufeinanderfolgenden Positionen müssen continuirliche Functionen der Zeit sein.

So drückt denn auch die sogenannte Continuitätsgleichung der Hydrodynamik nichts anderes aus, als dass Materie in keinem Volumenelement erscheinen und aus keinem verschwinden kann, ohne durch die Oberfläche desselben gegangen zu sein.

Eine Grösse ist eine continuirliche Function ihrer Variabeln, wenn sie bei continuirlicher Aenderung dieser Variabeln selbst continuirlich variirt.

Ist also u eine Function von x, welche während x von x_0 bis x_1 continuirlich abändert ohne Unterbrechung von u_0 zu u_1 übergeht, dagegen bei einer Aenderung des x von x_1 bis x_2 von u_1' bis u_2 gelangt, wo u_1' von u_1 verschieden ist, so hat u an der Stelle $x = x_1$ eine Discontinuität, weil es hier plötzlich vom Werte u_1 zu dem u_1' übergeht, ohne dass x selbst eine Aenderung erleidet.

Betrachtet man den Betrag des Differentialquotienten von u nach x für $x = x_1$ als den Grenzwert des Bruches $(u_2 - u_0)/(x_2 - x_0)$, wenn x_2 sowohl als x_0 ohne Ende dem x_1 genähert werden, dann ist, wenn x_2 und x_0 den Wert x_1 unendlich nahe einschliessen, der Wert des Zählers $u_1' - u_1$, und der des Nenners gleich Null. Ist u eine physikalisch continuirliche Grösse

Digitized by Google

so kann die Discontinuität nur in Bezug auf die besondere Variabele x stattfinden, und die Grösse hat dann bei $x = x_1$ einen unendlich grossen Differentialquotienten. Ihre Differentiation ist aber überhaupt sinnlos, wenn sie auch physikalisch nicht continuirlich ist.

Man kann sich in physikalischen Fragen zunächst von der Berücksichtigung der Discontinuität befreien, ohne deshalb die Bedingungen eines vorliegenden Falles ändern zu müssen. Man nimmt erst x_0 nur sehr wenig kleiner und x_2 nur sehr wenig grösser als x_1, so dass u_0 sehr nahe gleich u_1 und u_2 sehr nahe gleich u_1' wird, dann setzt man voraus, dass u in dem Bereiche $x_0 - x_2$ zwar beliebig, aber continuirlich von u_0 zu u_2 übergeht und untersucht, zu welchem Resultat man gelangt, wenn man das Unstetigkeitsgebiet immer enger macht bis x_0 und x_2 mit x_1 zusammenfallen. Findet sich das Resultat unabhängig von dem Wege, auf dem man die Function u von dem Werte u_0 zu dem u_2 übergeführt hat, so darf man schliessen, dass es auch noch richtig ist, wenn u discontinuirlich ist.

8. Wenn wir in einer Function F von mehreren Variabeln $x, y, z, \ldots$ zunächst x allein als Veränderliche betrachten, $y, z \ldots$ aber als Constanten ansehen, so kann F für gewisse Werte von x discontinuirlich werden. Indem wir uns diese Werte von x mit denen der andern Variabeln durch eine Gleichung

$$\Phi = \Phi(x, y, z, \ldots) = 0$$

verbunden denken, wird also die Function F dann unstetig werden, wenn $\Phi = 0$ ist. Ihre Werte F_2, F_1 für positive bezüglich negative Beträge von Φ brauchen in keiner Weise mit einander zusammenzuhängen. Man kann diese Art der Discontinuität leicht durch mathematische Symbole fixiren, indem man eine Function herstellt, die für positive Φ nahe gleich F_2 und für negative nahe gleich F_1 ist. Dazu kann z. B. die folgende dienen

$$F = \frac{F_1 + e^{n\Phi} F_2}{1 + e^{n\Phi}},$$

in der man sich die Variabele x durch Φ, y, z ersetzt zu denken hat. Solange n endlich bleibt, mag es auch noch so gross genommen werden, ist F stetig, sowie aber n positiv unendlich ist, hat F für positive Φ den Wert F_2, für negative den Wert F_1.

Discontinuität der Derivirten einer continuirlichen Function.

Es mögen die Werte der Variabeln $x, y, z, \ldots$, für welche in den ersten Derivirten einer Function F derselben Discontinuitäten auftreten sollen, mit einander durch eine Gleichung

$$\Phi(x, y, z, \ldots) = 0$$

Digitized by Google

verbunden sein. Drückt man die Werte der Function F für positive bezüglich negative Werte von Φ, also nach unserer frühern Bezeichnung F_2 und F_1, durch Φ und $n-1$ andere Variabeln, etwa $y, z, \ldots$ aus, so muss, da F continuirlich sein sollte, $F_2 = F_1$ sein, wenn Φ verschwindet. Daraus aber ergiebt sich, dass für $\Phi = 0$ wohl die Derivirten nach Φ, nämlich $\partial F_2/\partial\Phi$ und $\partial F_1/\partial\Phi$ von einander verschieden sein können, nicht aber die nach einer andern Variabeln, wie $\partial F_2/\partial y$ und $\partial F_1/\partial y$. Es kann also nur die Derivirte nach Φ unstetig werden, während die Derivirten nach allen andern Variabeln stetig bleiben müssen.

Periodische und vielfache Functionen.

9. Hat eine Function u von x für alle Werte ihrer Variabeln, die sich um eine und dieselbe Grösse a von einander unterscheiden, also für x, $x+a$, $x+2a$, $\ldots x+pa\ldots$, denselben numerischen Betrag, so heisst sie periodisch in Bezug auf diese Variabele x und hat a zur Periode. Daraus ersieht man, dass umgekehrt x für einen bestimmten Wert von u unendlich viele um Vielfache von a differirende Werte haben muss; x wird deshalb eine vielfache Function von u genannt und hat a zur cyclischen Zahl. Der Differentialquotient dx/du hat nur eine begrenzte Anzahl von Werten für ein und dasselbe u.

Ueber die Beziehung von physikalischen Grössen zu den Richtungen im Raume.

10. Es war einer der grössten Fortschritte in der Mathematik als Des Cartes durch die Einführung der Coordinaten die analytische Geometrie begründete und so an Stelle der gewöhnlichen geometrischen Methoden rein rechnerische Operationen setzte. Er machte die Lage eines Punktes im Raume von der Länge dreier Geraden abhängig, welche in bestimmte Richtungen verliefen, und liess jede Linie zwischen zwei Punkten als die Resultante dreier Strecken erscheinen.

Für die Physik hat sich die Des Cartes'sche analytische Methode, so namentlich zur Unterscheidung der einzelnen physikalischen Grössen von einander, von einer nicht hoch genug zu schätzenden Bedeutung erwiesen. Für manche Untersuchungen, die sich ziemlich scharf von den eigentlichen Rechnungen trennen, ist es aber von Vorteil, sich von den Cartesischen Coordinaten frei zu machen, also direct einen Punkt selbst anstatt seiner drei Coordinaten oder eine Kraft und ihre Richtung statt ihrer drei Componenten in Betracht zu ziehen. In der Tat ist auch diese letztere Art geometrische und physikalische Grössen so zu sagen in ihrer Totalität aufzufassen das Ursprünglichere und Natürlichere. Doch hat sie ihre eigentliche Ausbildung

Digitized by Google

erst durch Hamiltons Erfindung des Quaternionen-Calculs, die die zweite Etappe in der Erforschung räumlicher Beziehungen bezeichnet, erhalten.

Da aber die Des Cartes'sche Methode einerseits den der Wissenschaft beflissenen weit geläufiger ist als die Hamiltonsche und andererseits bei Rechnungen weitaus die grössten Vorteile bietet, so sollen in der Folge alle Resultate nach ihren Vorschriften gegeben werden. Ich hege jedoch die Ueberzeugung, dass die Einführung der Begriffe und Operationen der Quaternionenrechnung auf vielen Gebieten unserer Aufgabe für uns von bedeutendem Nutzen sein wird. Es gilt das namentlich für die Electrodynamik, wo wir mit einer grossen Anzahl von physikalischen Grössen zu tun haben, deren Beziehungen zu einander sich nach keiner anderen Methode so kurz und so klar auseinander setzen lassen, als nach der Hamiltonschen. Ich lasse daher zunächst einiges aus den Grundlagen des Quaternionen-Calculs folgen.

11. Charakteristisch und von der grössten Bedeutung für die Hamiltonsche Methode ist die Einteilung aller Grössen in Zahlen- und Richtungsgrössen, in Scalaren und Vectoren.

Ein *Scalar* ist vollständig durch eine einzige numerische Angabe definirt, und sein Wert hängt in keiner Weise von den Richtungen etwaiger Coordinatenaxen ab.

Ein *Vector* dagegen bedarf als Richtungsgrösse zu seiner völligen Festsetzung dreier numerischer Angaben, die man zu den Richtungen der Coordinatenachsen in Beziehung setzen mag.

Scalaren haben also nichts mit Richtungen zu schaffen.

Der Inhalt einer geometrischen Figur, die Masse und Energie eines Körpers, der hydrostatische Druck in einem Punkte einer Flüssigkeit, das Potential an einer Stelle im Raume sind Beispiele für Scalaren.

Vectoren haben sowohl Richtung als Grösse und wechseln ihr Zeichen, so oft ihre Richtung umgekehrt wird. Die Lagenänderung eines Punktes gemessen durch eine gerade Linie von der Anfangs- bis zur Endlage kann als Typus eines Vectors betrachtet werden, da ihr der Name Vector entlehnt ist. Die Geschwindigkeit eines Körpers, das Moment desselben, die dabei wirkende Kraft, der electrische Strom, die Magnetisirung eines Eisenstückchens geben Beispiele für Vectoren ab.

Andere physikalische Grössen werden zwar auch auf Richtungen im Raume bezogen, sind aber doch keine Vectoren.

Dahin gehören Druck und Zug in festen Körpern und manche Eigenschaften der Körper, die in der Theorie der Elasticität und Doppelbrechung behandelt werden.

Grössen dieser Art verlangen zu ihrer gehörigen Festsetzung neun Bestimmungen. In der Sprache der Quaternionen heissen sie lineare Vectorfunctionen eines Vectors.

Digitized by Google

Zwei Vectoren derselben Art werden genau so addirt, wie in der Statik Kräfte summirt werden. In der Tat ist der Beweis, den Poisson für das Parallelogramm der Kräfte giebt, für die Zusammensetzung aller Grössen anwendbar, bei denen eine Zeichenänderung mit einer Drehung um 180^0 gleichbedeutend ist.

Wenn wir einen Vector durch ein einziges Symbol bezeichnen und namentlich darauf aufmerksam machen wollen, dass wir es eben mit einem Vector zu tun haben, demnach Richtung sowohl als Grösse beachten müssen, so werden wir die grossen deutschen Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ... benutzen.

In der Methode der Quaternionen wird die Lage eines Punktes im Raume dadurch fixirt, dass man von einem festen Punkte aus bis zu ihm einen Vector zieht. Haben wir nun an der Stelle dieses Punktes im Raume eine physikalische Grösse zu betrachten, welche von der Lage dieses Punktes abhängt, dann behandeln wir sie als Function des vom fixen Punkte gezogenen Vectors. Die Function kann dabei ein Scalar oder ein Vector sein. Die Dichtigkeit eines Körpers, seine Temperatur, sein hydrostatischer Druck, sein Potential in einem bestimmten Punkte sind scalare Functionen. Dagegen sind die resultirende Kraft in einem Punkte, die Geschwindigkeit eines Stromes, die Rotationsgeschwindigkeit eines Elementes und das die Rotation hervorbringende Kräftepaar Vectorfunctionen.

12. Man kann die physikalischen Vector-Grössen in zwei Klassen einteilen, je nachdem sie zu Linien oder zu Flächen in Beziehung gebracht werden.

So lässt sich die Grösse einer in bestimmter Richtung wirkenden Anziehungskraft durch das Verhältnis ihrer Arbeitsleistung, während sie einen Körper in ihrer Wirkungsrichtung verschiebt, zu der Grösse der Verschiebung messen. Die attrahirende Kraft ist dann zu einer Linie in Beziehung gebracht. Andererseits definirt man die Intensität eines in einem Körper in bestimmter Richtung verlaufenden Wärmestroms als das Verhältnis der Wärmemenge, welche durch eine zum Wärmestrom senkrechte kleine Fläche in der Zeiteinheit durchgeht, zu der Grösse dieser Fläche. Hier ist also die Strömung unter Zuhilfenahme einer Fläche gemessen.

Doch giebt es Fälle, in denen eine Quantität sowohl auf eine Linie als auf eine Fläche bezogen werden kann. So wird man bei der Betrachtung der elastischen Verschiebung in einem Körper entweder seine Aufmerksamkeit auf die ursprüngliche und nachherige Lage eines Partikels richten, also die Verschiebung durch die Länge der Strecke von der ersten zur zweiten Lage des Teilchens messen; oder man wird untersuchen, welche Summe von Partikelchen des Körpers während der Dauer der Verschiebung durch eine bestimmte Fläche hindurchgeht.

Ebenso mag man die Geschwindigkeit einer Flüssigkeitsbewegung dadurch bestimmen, dass man die Geschwindigkeit der einzelnen Teilchen in ihren Bahnen untersucht, oder die Flüssigkeitsmenge eruirt, welche während einer bestimmten Zeit durch eine bestimmte Fläche strömt.

Digitized by Google

Die erste Methode haben wir anzuwenden, wenn wir sowohl die Dichtigkeit eines Körpers als auch die in ihm stattfindenden Verschiebungen und auftretenden Geschwindigkeiten der Partikel kennen lernen wollen, die zweite dagegen, wenn es sich um eine moleculare Theorie der Bewegungen handelt.

Bei einem electrischen Strome wissen wir weder etwas von der Dichte der Electricität, noch von der Geschwindigkeit, mit der die Strömung vor sich geht, wir kennen einzig den Wert einer Grösse, welcher in der Hydrodynamik das Product aus der Dichte und Geschwindigkeit entsprechen würde. Hier haben wir also die allgemeinere Methode der Messung der Stromstärke unter Zuhilfenahme einer Fläche anzuwenden.

Electromotorische und magnetische Kräfte gehören, weil man sie auf Linien bezieht, zu der ersten Klasse von Vectoren; so oft wir auf diese Tatsache namentlich aufmerksam zu machen haben, werden wir sie Kraftintensitäten nennen.

Andererseits definirt man die Stärke der electrischen und magnetischen Induction ebenso wie die des galvanischen Stromes unter Zuhilfenahme von Flächen, man hat sie also zur zweiten Klasse der Vectoren zu rechnen. Wir werden sie deshalb zu den Stromgrössen zählen.

Jede jener Kraftintensitäten ist bestrebt, eine ihr entsprechende strömende Bewegung hervorzubringen, oder bringt wirklich eine solche zu Stande. Electromotorische Kräfte zum Beispiel setzen die Electricität in Leitern in Bewegung und suchen sie in Fluss zu bringen in dielectrischen Medien. Sie verursachen eine electrische Induction in Dielectricis und wahrscheinlich auch in Conductoren; in demselben Sinne bringen auch magnetische Kräfte magnetische Induction hervor.

13. In manchen Fällen ist eine Strömung proportional der sie verursachenden Kraft und findet auch in Richtung dieser statt, häufig aber weiss man nur, dass sie in Grösse und Richtung von Grösse und Richtung der Kraft abhängt.

In dem Capitel über die Bewegungsgleichungen der Electricität in Leitern, Art. 296, werden wir den Fall betrachten, wo die Stromcomponenten lineare Functionen der Kraftcomponenten sind, und dabei finden, dass im allgemeinen neun Constanten erforderlich und hinreichend zur Herstellung der Beziehungen zwischen den Componenten der Strömung und denen der Kraft sind. In gewissen Fällen kann man vermuten, dass sechs jener Constanten sich paarweise gleich sind; dann ist die Beziehung zwischen der Richtung der Kraft und der einer zur Stromrichtung senkrechten Ebene dieselbe, wie die zwischen der Richtung eines Durchmessers eines Ellipsoids und der Richtung der ihm conjugirten Diametralebene. In der Ausdrucksweise des Quaternionencalculs sagt man, dass der eine Vector eine lineare Vectorfunction des andern ist, und zwar eine selbstconjugirte Function, wenn eben der Fall eintritt, dass sechs Coefficienten zu drei Paaren zusammenfallen.

Digitized by Google

Bei der magnetischen Induction in Eisen ist die Strömung, d. h. die Magnetisirung des Eisens, keine lineare Function der magnetisirenden Kraft. Doch ist in allen Fällen das wissenschaftlich wichtige Product aus der Kraft und der in ihrer Richtung genommenen Stromcomponente eine scalare Grösse.

14. Jene beiden Klassen von Vectoren sind auch durch besondere mathematische Operationen charakterisirt, die bei ihrer Behandlung häufig auftreten.

Bei Kräften haben wir meist das Integral längs einer Linie von dem Product eines Elements dieser Linie und der in Richtung dieses Elements fallenden Kraftcomponente zu nehmen. Das Resultat dieser Operation nenne ich das *Linienintegral* der Kraft. Es repräsentirt die Arbeit, welche bei der Bewegung eines Körpers auf dieser Linie geleistet wird. Hängt dasselbe nicht von der Gestalt der Linie selbst ab, sondern nur von der Lage der beiden Endpunkte derselben, so wird das Linienintegral als *Potential* bezeichnet.

Bei Strömungen tritt uns ein Integral über eine Fläche von dem Product eines Elements derselben und der normal zu ihr auftretenden Stromcomponente entgegen. Wir erhalten durch dieses Integral, das *Flächenintegral*, die Menge eines Agens, welche durch die Fläche in bestimmter Zeit hindurchgeht.

Es giebt Flächen, durch welche hindurch keine Strömung stattfindet. Schneiden sich zwei solche Flächen, so bildet ihr Durchschnitt eine Stromlinie, welche auch als Kraftlinie bezeichnet wird, wenn die Strömung in Richtung der Kraft verläuft.

Man tut aber gut in der Lehre von der statischen Electricität und vom Magnetismus die Bezeichnung Inductionslinien festzuhalten und den Namen Stromlinien für die Electrokinematik zu reserviren.

15. Ein anderes Unterscheidungsmerkmal zwischen Vectoren, nämlich ein aus den Eigenschaften einer translatorischen im Gegensatz zu einer rotatorischen Bewegung abgeleitetes, ist für die Physik zwar in mancher Hinsicht sehr wichtig, hat aber keine besondere Bedeutung bei mathematischen Untersuchungen.

Gehen wir auch hierauf mit einigen Worten ein, so kann die Richtung und Grösse einer Quantität von irgend einer Action oder Wirkung, die ganz längs einer gewissen Linie sich manifestirt, abhängen, oder sie kann durch irgend etwas bestimmt sein, was eine Rotation um diese Linie als Achse charakterisirt. Die Composition von Vectoren geschieht stets nach denselben Gesetzen, mögen sie translatorischer oder rotatorischer Natur sein, so dass in der mathematischen Behandlung beider Klassen sich kein Unterschied geltend machen kann. Bei physikalischen Untersuchungen verraten aber gewisse Umstände die Klasse, zu der wir eine Grösse zu rechnen haben. So besteht die Electrolyse in dem Transport zweier Substanzen auf Linien nach entgegengesetzten Richtungen, und das charakterisirt ein translatorisches

Digitized by Google

Phänomen, so dass offenbar keine rotatorische Wirkung um die Kraftrichtung in Action tritt. Daraus müssen wir schliessen, dass der electrische Strom, welcher Electrolysen verursacht oder begleitet, ein translatorisches Phänomen ist, kein rotatorisches.

Andererseits unterscheiden sich Nord- und Südende einer Magnetnadel nicht wie Sauerstoff und Wasserstoff, welche bei der Electrolyse an entgegengesetzten Stellen erscheinen, so dass wir daraus translatorische Eigenschaften des Magnetismus nicht entnehmen können. Im Gegenteil zeigt die Tatsache, dass der Magnetismus die Polarisationsebene des Lichtes zu drehen im Stande ist, dass wir es bei ihm mit einem rotatorischen Phänomen zu tun haben.

Das Linienintegral.

16. Im Anschluss an die früheren Bemerkungen über die bei Rechnung mit Vectoren namentlich auftretenden mathematischen Operationen lasse ich nunmehr einige Bemerkungen zunächst über die in der Physik eine grosse Rolle spielenden Linienintegrale folgen.

Es seien x, y, z die Coordinaten eines Punktes P auf einer Linie, und s die Länge dieser Linie von einem fixen Punkte A bis zu diesem Punkte P. Weiter sei R der Wert eines Vectors im Punkte P und ε der Winkel, den die Richtung dieses Vectors mit der Tangente der Linie s in P bildet. $R\cos\varepsilon$ giebt dann die Componente des Vectors längs der Linie s im Punkte P, und

$$1_a) \qquad L = \int_0^s R\cos\varepsilon\, ds$$

das *Linienintegral* des Vectors.

Betrachtet man die Coordinaten x, y, z als Functionen der Variabeln s, so geht das Linienintegral nach bekannter Transformation über in

$$1_b) \qquad L = \int_0^s \left\{ X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} \right\} ds,$$

wo X, Y, Z die Componenten von R nach den Coordinatenaxen angeben.

Im allgemeinen hängt dieses Integral von der Form der Linie zwischen A und P, längs welcher integrirt werden soll, ab. Es kann aber vorkommen, dass in gewissen Bezirken der Factor von ds in unserm Linienintegral ein vollständiger Differentialquotient ist, so dass

$$X dx + Y dy + Z dz = -d\Psi$$

wird, dann haben wir

$$1_c) \qquad L = \Psi_A - \Psi_P,$$

auf welchem Wege wir auch von dem Punkte A zu dem Punkte P übergehen mögen, vorausgesetzt dass der Integrationsweg die Grenzen unseres Bezirkes nicht überschreitet.

Digitized by Google

Potential.

Die Grösse Ψ ist eine scalare Function der Lage des Punktes P, also unabhängig von etwaigen Richtungen und heisst das *Potential* in diesem Punkte. Ein Vector R hat ein Potential, wenn seine Componenten X, Y, Z Differentialquotienten ein und derselben Function sind, so dass

$$1) \qquad X = -\frac{\partial \Psi}{\partial x},\ Y = -\frac{\partial \Psi}{\partial y},\ Z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

wird. Existirt ein solches Potential, so heissen Flächen, in denen dasselbe constant bleibt, *Aequipotentielle* oder *Niveauflächen*. Sie haben die Eigenschaft, dass ihre Normalen n die Richtungen des Vectors R anzeigen, und dass in ihren Punkten

$$2) \qquad R = -\frac{\partial \Psi}{\partial n}$$

wird.

Laplace ist der Erfinder dieser Methode, Vectorcomponenten als erste Derivirte einer gewissen Function zu betrachten.*) Doch stammt der Name Potential von Green her, der diese Function zur Grundlage seiner Electricitätstheorie gemacht hat.**) Greens Arbeiten blieben aber bis zum Jahre 1846 unbeachtet, so dass inzwischen die meisten seiner Resultate von Gauss, Chasles, Sturm und Thomson neu entdeckt wurden***).

In der Gravitationstheorie wird dem Potential das entgegengesetzte Zeichen von dem hier benutzten gegeben, und die Kraft in einer Richtung durch die in dieser Richtung für die Längeneinheit stattfindende Zunahme der Potentialfunction gemessen. Bei electrischen und magnetischen Untersuchungen setzt man dagegen die Kraft gleich der Abnahme des Potentials für die Längeneinheit in Richtung ihrer Wirkung. Dadurch kommt das Zeichen des Potentials in Uebereinstimmung mit dem der potentiellen Energie, welch letztere stets abnimmt, wenn ein Körper in Richtung der ihn angreifenden Kraft bewegt wird.

17. Viel Licht wird auf das Verhältnis der Kraft als Vector- zur Potentialfunction als Scalarengrösse durch die Hamiltonsche Entdeckung der formalen Operation, mit Hilfe deren jene aus dieser abgeleitet wird, geworfen.

Wir haben nämlich gesehen, dass die Componente des Vectors nach einer bestimmten Richtung gleich dem negativen Differentialquotienten der Potentialfunction nach der Coordinate, die in jener Richtung verläuft, ist. Sind also i, j, k drei zu einander senkrechte Vectoreinheiten, und X, Y, Z die Componenten eines Vectors $\mathfrak{F}$ nach jenen drei Vectoren, dann ist

$$\mathfrak{F} = iX + jY + kZ;$$

---

*) *Méc. Cél. liv. III.*

**) *Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism.* Nottingham 1828. In Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 39, 44, 47 von Thomson mitgeteilt.

***) Thomson u. Tait: *Theoretische Physik* § 483.

Digitized by Google

mithin, wenn Ψ das Potential bezeichnet,

$$\mathfrak{F} = -\left\{ i\frac{\partial \Psi}{\partial x} + j\frac{\partial \Psi}{\partial y} + k\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\}.$$

Benutzt man für die Operation

$$i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

das Symbol ∇, so wird

$$\mathfrak{F} = -\nabla \Psi.$$

Das Operationszeichen ∇ weist uns also an, zunächst das Anwachsen von Ψ für die Längeneinheit in drei zu einander senkrechten Richtungen zu bestimmen, und dann die so eruirten Verhältnisse wie Vectoren zu einem einzigen zusammenzuziehen. Man kann aber auch die durch ∇ bezeichnete Operation so auffassen, dass erst die Richtung eruirt werden soll, in der Ψ am raschesten anwächst, und dass dann nach dieser Richtung ein Vector zu ziehen ist, der den Betrag, um den Ψ für die Längeneinheit zunimmt, repräsentirt.

Lamé bezeichnet in seinem *Traité des fonctions inverses* den Betrag dieses grössten Anwuchses als Differential-Parameter, doch giebt weder diese Bezeichnung selbst noch auch die Art und Weise, wie Lamé von ihr Gebrauch macht, von der Tatsache Rechenschaft, dass es sich hier um Grössen handelt, die neben Quantität auch Richtung haben.

In den seltenen Fällen, in denen jene Beziehung in rein geometrischem Sinne zu berücksichtigen sein wird, werde ich den Vector $\mathfrak{F}$ als die *Raum-Variation* der scalaren Function Ψ bezeichnen, um auszudrücken, dass es sich sowohl um die Grösse als um die Richtung der raschesten Abnahme von Ψ handelt.

18. In gewissen Fällen sind die Bedingungen dafür, dass $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential ist, also die Gleichungen

$$\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} = 0$$

in einem bestimmten Raumbezirk erfüllt, ohne dass die Integration von A bis P auf zwei verschiedenen in diesem Bezirke liegenden Wegen zu demselben Resultate führt. Das trifft z. B. bei einem ringförmigen Integrationsgebiet ein, wenn die Integrationswege durch entgegengesetzte Segmente gehen. Charakteristisch für diesen Fall ist dann, dass man die Integrationswege nicht in einander überführen kann, ohne durch einen Raum zu gelangen, der nicht mehr zum Integrationsgebiet gehört. Wir kommen so zu Betrachtungen, die der Geometrie der Lage angehören, deren Wichtigkeit durch Leibniz und namentlich Gauss oft genug betont worden ist, bis sie in der neuern Zeit durch Listing eine ziemlich erschöpfende Bearbeitung gefunden haben.*)

*) *Der Census räumlicher Complexe.* Gött. Abh. Bd. X. S. 97 (1861).

Digitized by Google

Zusammenhängende Flächen und Räume.

Werden im Raume p Punkte durch l Linien so verbunden, dass kein Punkt ausgelassen ist und keine zwei Linien sich gegenseitig schneiden, so soll die dadurch entstehende Figur als *Diagramm* bezeichnet werden. Es genügen nun zunächst $p - 1$ Linien, um die Punkte mit einander vollständig zu verbinden und jede neu hinzukommende Linie vervollständigt einen in sich zurücklaufenden Weg, den wir *Cykel* nennen können. Die Anzahl der Cykeln in dem Diagramm beträgt $l - p + 1$. Jeder geschlossene Weg in dem Diagramm setzt sich aus diesen von einander unabhängigen Cykeln zusammen, von denen jeder beliebig oft und in beliebiger Richtung durchlaufen werden kann.

Die Existenz der Cykeln bezeichnen wir als *Cyklose* und die Anzahl derselben in einem Diagramm als die *Cyklomatische Zahl* des Diagramms.

Flächen sind entweder geschlossen oder begrenzt und die geschlossenen können unendlich oder endlich sein. Die unvollständigen Flächen werden durch eine oder mehrere geschlossene Linien begrenzt und sie umfassen auch die unendlichen und geschlossenen Flächen insofern, als bei jenen die Grenzlinien unendlich lang werden, bei diesen zu Punkten zusammenschrumpfen.

Ein endliches Stück des Raumes wird durch eine oder mehrere geschlossene Flächen begrenzt. Eine dieser Flächen kann als äussere Oberfläche betrachtet werden, während die andern Flächen sich gegenseitig ausschliessen und die inneren Begrenzungsflächen bilden.

Hat ein Raum nur eine begrenzende Fläche, so kann man diese beliebig zusammenziehen ohne ihre Continuität zu gefährden. Ist derselbe auch noch einfach zusammenhängend, *Acyklisch*, wie eine Kugel, so geht die Fläche schliesslich in einen Punkt über, ist er zweifach zusammenhängend, wie etwa ein Ring, so wird die Fläche bei fortdauernder Contraction zur geschlossenen Curve, ist er endlich mehrfach zusammenhängend, *Cyklisch*, so entsteht schliesslich ein Diagramm, dessen cyklomatische Zahl gleich der des Raumes, also um eine Einheit kleiner als seine Zusammenhangszahl ist. Der vom zusammenhängenden Gebiet ausgeschlossene Raum hat dieselbe cyklomatische Zahl wie das Gebiet selbst, und hieraus folgt, dass, wenn das zusammenhängende Gebiet durch innere und äussere Flächen begrenzt wird, seine cyklomatische Zahl gleich der Summe der Zahlen ist, wie er sie den einzelnen Flächen verdankt.

Schliesst eine Region mehrere andere Gebiete ein, so heisst sie mehrfach oder *Periphractisch*. Die periphractische Zahl ist gleich der Anzahl der begrenzenden Flächen, sie wird gleich 1 bei acyklischen Flächen.

Die cyklomatische Zahl einer geschlossenen Fläche ist doppelt so gross als die des Raumes, welchen sie begrenzt. Um die cyklomatische Zahl einer begrenzten Fläche zu erhalten, denkt man sich alle Begrenzungen ohne Unterbrechung der Continuität so lange gegen einander nach Innen

Digitized by Google

zusammengezogen bis sie sich schneiden. Die Fläche wird dann zum Punkt, wenn sie acyklisch und zum linearen Diagramm, wenn sie cyklisch ist. Die cyklomatische Zahl des Diagramms ist gleichzeitig die der Fläche.

Nach diesen Auseinandersetzungen über das Zusammenhängen von Flächen und Räumen beweisen wir noch einige wichtige Sätze über das Linienintegral.

19. I.) *Wenn in einem einfach zusammenhängenden Raume*

$$Xdx + Ydy + Zdz = -d\Psi$$

ist, so ergiebt die Integration dieses Ausdrucks zwischen zwei Punkten längs allen Linien, die ganz in dem bezeichneten Raume liegen, denselben Wert.

Wir beweisen zunächst, dass man bei der Integration stets Null erhält, wenn der Integrationsweg in sich zurückläuft.

Denken wir uns nämlich die äquipotentiellen Flächen gezogen, so werden sie entweder alle geschlossen sein, oder von der Oberfläche unseres Raumes vollständig begrenzt werden. Jede geschlossene Linie in unserem Raume, die eine dieser Flächen beim Durchgehen schneidet, muss sie daher bei der Rückkehr an einer andern Stelle in entgegengesetzter Richtung treffen. Da das für alle noch so nahe aneinander gezogenen äquipotentiellen Flächen gilt, so werden sich immer zwei Elemente des Linienintegrals gleich und entgegengesetzt sein, so dass die Summe aller Elemente, also das ganze Integral, verschwindet.

Sind demnach AQP und $AQ'P$ zwei Integrationswege von A nach P, so ist das Linienintegral auf dem geschlossenen Wege $AQPQ'A$ gleich Null, daher das längs AQP gleich und entgegengesetzt dem längs $PQ'A$ oder gleich dem längs $AQ'P$.

Es ergiebt sich hieraus, dass wenn das Potential in einem einfach zusammenhängenden Raume für einen Punkt gegeben ist, dass es dadurch für jeden andern Punkt des Raumes unzweideutig bestimmt ist.

20. II.) *In jedem mehrfach zusammenhängenden Raum, in welchem die Beziehung*

$$Xdx + Xdy + Zdz = -d\Psi$$

überall erfüllt wird, ist der Wert des Linienintegrals zwischen A und P im allgemeinen erst bestimmt, wenn der Verlauf des Integrationsweges näher angegeben ist.

Ist der betrachtete Raum $k+1$fach zusammenhängend, so kann man ihn durch k Schnitte oder Diaphragmen in einen einfach zusammenhängenden verwandeln ohne seine Continuität zu zerstören. Solange der Integrationsweg von A nach P keines der Diaphragmen durchschneidet, ist der Wert des Linienintegrals von seinem besondern Verlauf unabhängig. Es mögen nun die beiden Punkte A und P einander unendlich nahe zu entgegengesetzten Seiten eines Diaphragmas liegen und dasselbe möge von zwei andern Punkten A', P' gelten, von denen A' dem A und P' dem P unendlich nahe liegt.

Digitized by Google

Das Linienintegral über $APP'A'A$ muss dann verschwinden, und weil die Wege PP' und $A'A$ sich gleich und entgegengesetzt sind, haben die beiden Integrale über AP und $A'P'$ ebenfalls gleiche Werte. Hieraus folgt, dass das Linienintegral längs einer geschlossenen Curve stets denselben Wert hat, wo auch die Curve das Diaphragma schneiden mag.

Ist dieser Wert bei einem einmaligen Durchschneiden des Diaphragmas gleich K_1, und geht die Curve p mal in positiver und p_1 mal in negativer Richtung durch das Diaphragma, so ist der Wert des Linienintegrals gleich $(p - p_1) K_1 = n_1 K_1$. Aehnliche Betrachtungen ergeben, dass, wenn der Integrationsweg l Diaphragmen durchschneidet, das Linienintegral längs demselben gleich

$$n_1 K_1 + n_2 K_2 + \ldots + n_l K_l$$

sein muss, wo n_i den Ueberschuss der positiven Durchgänge durch das $i$te Diaphragma über die der negativen angiebt.

Zwei Curven, die in einander continuirlich übergeführt werden können, ohne jemals das Gebiet, in welchem ein Potential existirt, zu verlassen, sind einander äquivalent *).

Die Bedingung der Existenz eines Potentials, also die, dass $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential ist, tritt in vielen physikalischen Untersuchungen und namentlich da auf, wo das Potential zu andern physikalischen Deutungen führt als die aus ihm abgeleitete Vectorgrösse.

Betrachtet man bei rein kinematischen Fragen X, Y, Z als Componenten der Verschiebung eines Partikels in einem continuirlichen Körper, so sagt jene Bedingung aus, dass diese Verschiebung eine rotationslose Deformation hervorbringen soll **).

Entsprechend geschieht auch die Bewegung einer Flüssigkeit, deren Geschwindigkeitscomponenten ein Potential haben, ohne Rotation.

Handelt es sich um Kräfte, so drückt jene Bedingung die Tatsache aus, dass die Arbeit, die bei der Ueberführung eines Körperpartikels von einer Position in eine andere geleistet werden muss, gleich der Differenz der Potentiale in den beiden Endpositionen ist, und für alle äquivalenten Wege einen und denselben Wert hat.

Das Flächenintegral.

21. Bezeichnet dS das Element einer Fläche S und ε den Winkel der nach dem Innern von S gezogenen Normale mit der Richtung der Vectorgrösse R, so nennt man $\int\int R \cos\varepsilon\, dS$ das *Flächenintegral* von R über S. Es seien wie bisher X, Y, Z die Componenten von R und l, m, n die Rich-

*) W. Thomson, *On Vortex Motion.* Trans. R. S. Edinb. 1867–1868.
**) Thomson u. Tait, Theoret. Physik, § 190 *i*.

Digitized by Google

tungscosinusse der Normale zu S, dann giebt die Zerlegung des Flächenintegrals

$$\iint R\cos\varepsilon\, dS = \iint Xl\, dS + \iint Ym\, dS + \iint Zn\, dS$$
$$= \iint X\, dy\, dz + \iint Y\, dx\, dz + \iint Z\, dx\, dy,$$

wo die Integrationen sich auf die Fläche S beziehen.

Ist die Fläche geschlossen, so hat die Coordinate x für jedes Wertepaar der y und z eine gerade Anzahl von Werten, weil jede der xAxe parallele Linie ebenso oft aus dem von S umschlossenen Raum austreten muss, als sie in denselben eintritt. Bezeichnen demnach $x_1, x_3, x_5 \ldots$ die Eintrittspunkte und $x_2, x_4, x_6, \ldots$ die Austrittspunkte für eine solche unendlich lange Grade, so ist an den Stellen x_{2i+1} das Element ldS positiv und an den x_{2i} negativ zu nehmen, also wird

$$\iint X\, dy\, dz = \iint \{(X_1 - X_2) + (X_3 - X_4) + \ldots\}\, dy\, dz.$$

Ich füge noch die Bedingung hinzu, dass die Vectorcomponente X in dem von der Fläche eingeschlossenen Raume endlich ist und stetig verläuft. Man darf dann

$$X_{i+1} - X_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial X}{\partial x}\, dx$$

setzen, und erhält

$$\iint X\, dy\, dz = -\iiint \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy\, dz,$$

wo die dreifache Integration sich auf den ganzen von der Fläche S umspannten Raum erstreckt.

Sind demnach überhaupt X, Y, Z in dem Raume endlich und stetig, so ist das Flächenintegral

$$\text{III}_1) \qquad \iint R\cos\varepsilon\, dS = -\iiint \left\{\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right\} dx\, dy\, dz.$$

Trifft die Bedingung der Stetigkeit nicht zu, weil die Componenten X, Y, Z beim Durchgang von der negativen zur positiven Seite einer innerhalb S liegenden Fläche $F(x, y, z) = 0$ plötzlich von den Werten X, Y, Z auf die X', Y', Z' springen, so ist, wenn F zwischen x_{i+1} und x_i liegt,

$$X_{i+1} - X_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{\partial X}{\partial x} dx + (X' - X)$$

mithin

Digitized by Google

III) $$\iint R\cos\varepsilon\, dS = -\iiint\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right\} dx\, dy\, dz$$
$$+\iint(X'-X)\, dy\, dz+\iint(Y'-Y)\, dz\, dx+\iint(Z'-Z)\, dx\, dy,$$

oder, wenn l', m', n' die Richtungscosinusse der positiven Normale der Discontinuitätsfläche S' angeben,

III) $$\iint R\cos\varepsilon\, dS = -\iiint\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right\} dx\, dy\, dz$$
$$+\iint\left\{(X'-X)\, l'+(Y'-Y)\, m'+(Z'-Z)\, n'\right\} dS',$$

wo das Doppelintegral sich auf die Discontinuitätsfläche bezieht.

Findet für jeden Punkt des Raumes die Gleichung

a) $$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

statt und gilt für jeden Punkt der Discontinuitätsfläche die Beziehung

b) $$X'l'+Y'm'+Z'n'=Xl'+Ym'+Zn',$$

so verschwindet das Flächenintegral ganz.

Die Vectorgrösse ist dann auf dünnen Cylindern oder Röhren verteilt, und deshalb wird die Gleichung a) als allgemeine, die Gleichung b) als superficielle *Sphondyloidale Bedingung* bezeichnet werden.

22. Wir verfolgen den Fall, dass für jeden Punkt innerhalb der Fläche S die Gleichung

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

erfüllt ist. Wenn keine Discontinuitätsflächen vorhanden sind, ist das Flächenintegral gleich Null, wie auch die geschlossene Fläche sonst beschaffen sein mag. Nun möge S aus 3 Teilen S_1, S_0, S_2 bestehen. S_1 sei ganz beliebig geformt und werde durch eine geschlossene Curve L_1 begrenzt, S_0 entstehe dadurch, dass von allen Punkten von L_1 Linien gezogen werden, deren Tangenten überall mit den Richtungen der Vectoren R zusammenfallen, endlich sei S_2 eine beliebige durch ihre Schnittcurve L_2 mit S_0 begrenzte Fläche. Unser Flächenintegral zerfällt entsprechend den drei Teilflächen in drei Teile Q_1, Q_0, Q_2, und es wird

$$\iint = Q = Q_1 + Q_0 + Q_2 = 0.$$

Da aber zufolge der Definition von S_0

$$R\cos\varepsilon = Xl + Ym + Zn$$

für alle Punkte dieser Fläche verschwinden muss, so ist Q_0 für sich schon gleich Null und deshalb

III$_2$) $$Q_0 = 0,$$
$$Q_2 = -Q_1.$$

Digitized by Google

Das Flächenintegral über Q_2 ist also entgegengesetzt gleich dem über Q_1 wie auch S_2 und S_1 sonst beschaffen sein mögen, wenn nur die Verbindungsfläche S_0 keine andern Linien zu Tangenten hat als die Richtungen der Vectoren R.

Je kleiner die durch die geschlossene Linie L_1 begrenzte Fläche ist, desto mehr entspricht die Fläche S_0 einem dünnen Cylinder oder einer Röhre, und wir können uns den ganzen Raum als aus solchen Röhren zusammengesetzt denken. Für jede solche Röhre hat das Flächenintegral über alle vollständigen Querschnitte, wenn die Gleichung a) erfüllt ist, einen und denselben Betrag, und daraus erhellt, weshalb ich

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

als *sphondyloidale Bedingung**) bezeichnet habe.

Stromlinien und Stromfäden.

Man kann sich den Raum auch noch specieller derartig in sehr dünne Röhren oder Fäden zerteilt denken, dass das Flächenintegral für den Querschnitt einer jeden solchen Röhre der Einheit gleich ist.

Das Flächenintegral bezogen auf irgend eine endliche durch eine geschlossene Linie L begrenzte Fläche S ist dann gleich der Anzahl derjenigen Röhren, welche in positiver Richtung durch die Fläche gehen, oder, was dasselbe ist, gleich der Anzahl derjenigen, welche die Grenzlinie L treffen.

Das Flächenintegral hängt also nicht von der Form der Fläche, sondern nur von der ihrer Begrenzung ab.

Flächenintegrale in mehrfachen Gebieten.

Allgemein gilt die Behauptung, dass das Flächenintegral in einem Raume, in welchem die Bedingung

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0$$

erfüllt ist, für jede geschlossene Fläche verschwindet und für jede begrenzte Fläche nur von der Form der Begrenzungslinie abhängt, dann, wenn dieser Raum nur von einer Fläche begrenzt ist. Sobald das nicht der Fall ist, kann das Gebiet S andere Gebiete $S_1, S_2, S_3 \ldots$ in sich fassen, für welche die sphondyloidale Bedingung nicht erfüllt ist, und für diese verschwinden die Flächenintegrale $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ nicht mehr. Der obige Satz gilt dann nur für die Flächen S' des Gebietes S, welche alle Gebiete $S_1, S_2 \ldots$, in denen die sphondyloidale Bedingung nicht erfüllt ist, ausschliessen. Für Flächen, welche

*) Maxwell benutzt das Wort *solenoidal*, da aber bei uns *Solenoid* schon eine ganz feste Bedeutung hat, so habe ich die ursprüngliche Faraday'sche Bezeichnung wieder hergestellt.

Digitized by Google

einzelne der Gebiete $S_1, S_2 \ldots$ umfassen, ist das Flächenintegral gleich der Summe der Flächenintegrale für die Begrenzungsflächen der bezeichneten Gebiete. Daraus folgt auch, dass es für zwei durch ein und dieselbe geschlossene Linie begrenzte Flächen nur dann denselben Wert hat, wenn diese continuirlich, das heisst lediglich durch Biegung und Dehnung ohne Ueberschreitung der hervorgehobenen Gebiete in einander übergeführt werden können.

So oft wir es aber mit einem mehrfachen Gebiete zu tun haben, müssen wir dasselbe durch Linien, welche die verschiedenen innern Begrenzungsflächen mit der äussern in Verbindung setzen, in ein einfaches Gebiet verwandeln. Jede solche Linie, die zwei sonst ganz getrennt liegende Flächen verbindet, reducirt die Anzahl der unabhängigen Gebiete um eins, so dass die Zahl der zu ziehenden Linien der periphraktischen Zahl des ganzen Gebietes oder der Anzahl der inneren Begrenzungsflächen gleich wird.

Wir gewinnen nunmehr die präcisere Behauptung:

III) *Das Flächenintegral verschwindet in dem Gebiete S, wo die sphondyloidale Bedingung erfüllt ist, für jede geschlossene Fläche, welche die Verbindungslinien der Partialgebiete mit der äussern Grenzfläche gar nicht, oder eine gerade Anzahl Mal durchschneidet. Hat die Fläche mit der Verbindungslinie eines Partialgebietes zur äussern Grenzfläche eine ungerade Anzahl von Durchschnittspunkten, so ist ihr Flächenintegral gleich dem der Grenzfläche des betreffenden Partialgebietes.*

Das bekannteste Beispiel eines mehrfachen Gebietes, in welchem die sphondyloidale Bedingung erfüllt ist, bietet die Region, welche einen Massenpunkt umgiebt, der eine Attraction oder Repulsion im verkehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung ausübt.

Man hat für diesen Fall

$$X = m\frac{x}{r^3},\quad Y = m\frac{y}{r^3},\quad Z = m\frac{z}{r^3},$$

wo m die im Coordinatenursprung concentrirt gedachte Masse angiebt.

Für jedes endliche r ist daher

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0.$$

Im Massenpunkt selbst aber werden die Componenten und ihre Derivirten unendlich. Demgemäss ist das Flächenintegral gleich Null, wenn die Fläche, um die es sich handelt, den Massenpunkt nicht miteinschliesst, und, wie eine weitere analytische Behandlung ergiebt, gleich $4\pi m$, wenn der Massenpunkt innerhalb der Integrationsfläche liegt.

Wollen wir das Gebiet um den Massenpunkt wie ein einfaches behandeln, so haben wir von diesem aus eine Linie bis in die Unendlichkeit zu ziehen, und bei Auswertung des Flächenintegrals jedesmal $4\pi m$ zu addiren, wenn diese Linie von der negativen zur positiven Seite der Integrationsfläche übergeht.

Digitized by Google

Rechts und Links im Raume.

23. Alle Translationsbewegungen längs einer Axe und alle Rotationsbewegungen um diese Axe sollen in diesem Werke als gleichsinnig angeschen werden, wenn ihre Richtungen mit denen der Translation bezüglich Rotation einer rechts drehenden Schraube übereinstimmen*). Nimmt man zum Beispiel die Rotationsbewegung der Erde, welche von Westen nach Osten vor sich geht, als positiv an, so muss man sich ihre Axe von Süden nach Norden gerichtet denken. Für Jeden, der nach Norden, also nach der positiven Richtung sieht, findet dann die Rotation vom Kopfe zur rechten Hand zu den Füssen zur linken Hand statt.

Befinden wir uns auf der positiven Seite einer Oberfläche, so läuft die positive Richtung ihrer Grenzlinie entgegen dem Zeiger einer Uhr, die uns ihr Zifferblatt zuwendet.

Dieses Rechts-System ist von Thomson und Tait in ihrer Theoretischen Physik § 243 adoptirt, das Links-System dagegen ist in Hamiltons Quaterniontheorie massgebend. Listing bezeichnet den Uebergang von dem einen zum andern System als Perversion. Als typisches Beispiel für einen solchen Uebergang kann die Reflexion eines Gegenstandes von einem Spiegel gelten.

Entsprechend dem von uns adoptirten System werden wir also bei Benutzung von Cartesischen Coordinaten x, y, z die Axen stets so uns gelegt denken, dass die übliche cyklische Folge der Symbole für die Coordinaten zu einem Rechts-System im Raume führt. Ist also die x Axe nach Osten, die y Axe nach Norden gezogen, so muss die z Axe nach dem Zenith gehen. Den Inhalt einer Fläche werden wir als positiv bezeichnen, wenn die Ordnung der auszuführenden Integrationen der cyklischen Folge der Coordinatenzeichen sich anschliesst. Daher ist der Inhalt eines von einer geschlossenen Curve begrenzten Stückes der xy-Ebene

$$\text{entweder } \int x\,dy \text{ oder } -\int y\,dx,$$

*) Eine bessere Versinnbildlichung als durch Worte gewinnt man für die Bewegung einer rechtsdrehenden Schraube, wenn man die Hand nach vorwärts stösst und sie gleichzeitig um das Gelenk so dreht, dass die Handfläche von unten nach oben zu liegen kommt. Ein gewöhnlicher Pfropfenzieher kann mit demselben Vorteil benutzt werden, um dem Gedächtnis den Lauf einer Rechtsschraube einzuprägen.

Prof. W. H. Miller teilt mir mit, dass die schraubenartigen Ranken beim Wein rechts, die beim Hopfen links gedreht sind, und so kann man wol die beiden bezeichneten Systeme in Beziehung zum Wein und zum Hopfen bringen.

Das System, das wir beim Wein antreffen, ist mit Ausnahme von Japan in allen civilisirten Ländern beim Schneiden von Schrauben adoptirt. De Candolle bezeichnete übrigens die Hopfenranken als rechtsgedreht, und darin sind ihm Listing und alle, die über die Circular-Polarisation des Lichtes geschrieben haben, gefolgt. Schrauben nach Art der Hopfenranken werden zur Kuppelung der Eisenbahnwagen und zur Befestigung der Räder der linken Seiten gewöhnlicher Wagen verwendet. Sie werden aber auch stets von ihren Verfertigern selbst als links gedrehte Schrauben bezeichnet.

Digitized by Google

da in dem ersten Ausdrucke die Integration über x, in dem zweiten dagegen die über y zuerst ausgeführt worden ist.

Diese Beziehung zwischen den beiden Producten $dx\,dy$ und $dy\,dx$ entspricht dem Verhältnis zwischen den Producten zweier zu einander senkrechter Vectoren in der Quaternionentheorie, wo das Zeichen ebenfalls von der Ordnung, in der sich die Operationen folgen, abhängt. Aehnlich ändert auch eine Determinante ihr Zeichen, wenn zwei parallele Reihen mit einander vertauscht werden.

Ein Volumintegral ist positiv, wenn die Integrationenfolge der Folge der Coordinaten entspricht, und negativ, wenn sie dieser entgegengesetzt ist.

Beziehung zwischen Flächen- und Linienintegralen.

Wir lassen nunmehr den Beweis eines Satzes folgen, der sich deshalb als sehr nützlich herausgestellt hat, weil er eine Beziehung zwischen dem Integral über eine endliche Fläche und dem über die Begrenzungslinie der Fläche festsetzt.

24. IV.) *Das Linienintegral längs einer geschlossenen Curve kann durch ein Flächenintegral über eine Fläche ersetzt werden, welche von dieser Curve begrenzt ist.*

Es seien X, Y, Z die Componenten einer Vectorgrösse $\mathfrak{A}$, deren Linienintegral längs der geschlossenen Curve s genommen werden soll, und es bezeichne S eine durch die Curve vollständig begrenzte Fläche. Das Flächenintegral soll sich auf eine andere Vectorgrösse $\mathfrak{B}$ beziehen, deren Componenten ξ, η, ζ mit denen des Vectors $\mathfrak{A}$ durch die Gleichungen

$$1) \qquad \xi = \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z},\quad \eta = \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x},\quad \zeta = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}$$

verbunden sind.

Aus der Definition der ξ, η, ζ erhellt, dass sie der sphondyloidalen Bedingung

$$2) \qquad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0$$

genügen.

Sind l, m, n die Richtungscosinusse der zu dem Elemente dS der Fläche S gezogenen positiven Normale, so kann das Flächenintegral von $\mathfrak{B}$ geschrieben werden

$$3) \qquad \iint (\xi l + \eta m + \zeta n)\, dS$$

oder, indem man ξ, η, ζ durch ihre Werte ersetzt

$$3_1) \qquad \iint\int\left(m\frac{\partial X}{\partial z} - n\frac{\partial X}{\partial y} + n\frac{\partial Y}{\partial x} - l\frac{\partial Y}{\partial z} + l\frac{\partial Z}{\partial y} - m\frac{\partial Z}{\partial x}\right) dS.$$

Digitized by Google

Wir transformiren dieses Integral dadurch, dass wir für das Flächenelement andere Ausdrücke einführen. Es seien die Coordinaten x, y, z für jeden Punkt der Fläche S Functionen zweier von einander unabhängiger Variabeln α, β. Ist β constant und α variabel, so beschreibt der Punkt (x, y, z) eine Curve auf der Fläche, zu einer Reihe von Werten des β gehört also eine Reihe von Curven (α), die alle auf der Fläche S liegen. Ganz ebenso gehört zu einer Reihe von Werten des α eine Reihe von Curven (β), die sich ebenfalls auf der Fläche S befinden. Indem sich die Curven (α) und (β) schneiden, zertheilen sie die Fläche S in einzelne Elemente, die wir beliebig klein halten und für unsere dS substituiren können. Die Projection eines solchen Elements auf die Ebene der y, z, also ldS, ist aber nach bekannten Regeln

a) $$ldS = \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} - \frac{\partial y}{\partial \beta}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) d\alpha\, d\beta,$$

und ähnliche Ausdrücke erhält man für mdS und ndS durch cyklische Vertauschung der x, y, z.

Wir haben daher für den Teil unseres Flächenintegrals, der von X abhängt

$$\iint\left\{\frac{\partial X}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial z}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial X}{\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} - \frac{\partial x}{\partial \beta}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)\right\} d\alpha\, d\beta,$$

oder nach Addition und Subtraction von $\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \alpha}\dfrac{\partial x}{\partial \beta}$

$$\iint\left\{\frac{\partial x}{\partial \beta}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial x}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)\right\} d\alpha\, d\beta$$

b) $$= \iint\left(\frac{\partial X}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} - \frac{\partial X}{\partial \beta}\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right) d\alpha\, d\beta.$$

Wir setzen nunmehr voraus, dass die Curven (β) eine Reihe von geschlossenen Linien bilden, deren letzte unsere Grenzlinie s, für welche α den Wert α_1 haben soll, ist, und welche den Punkt der Oberfläche einschliessen, in dem α seinen kleinsten Wert α_0 erreicht. Die Curven (α) ziehen wir dann von dem Punkte $\alpha = \alpha_0$ zu unserer Grenzlinie s, so dass die erste β_0 und die letzte β_1 zusammenfallen. Integrirt man in dem Ausdruck b) das erste Glied partiell nach α, das zweite partiell nach β, so heben sich zunächst die dabei auftretenden Doppelintegrale auf. Da ferner die Curve $\alpha = \alpha_0$ nur in einem Punkte besteht, wo X nur einen Wert haben kann, so muss

$$\int_{\beta_0}^{\beta_1}\left(X\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)_{\alpha=\alpha_0} d\beta$$

verschwinden. Endlich fällt der Punkt (α, β_1) mit dem (α, β_0) zusammen und deshalb heben sich die beiden Integrale

Digitized by Google

$$-\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(X\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)_{\beta=\beta_1}d\alpha \text{ und } \int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\left(X\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)_{\beta=\beta_0}d\alpha$$

auf und es bleibt für den Ausdruck unter b) nur

$$\int_{\beta_0}^{\beta_1}\left(X\frac{\partial x}{\partial\beta}\right)_{\alpha=\alpha_1}d\beta$$

übrig. Hier ist aber α_1 der Wert von α für unsere Grenzcurve, somit wird aus dem Ausdruck unter b)

b_1) $$\int X\frac{\partial x}{\partial s}ds,$$

wo die Integration längs der Grenzlinie s auszuführen ist. In ganz derselben Weise können wir auch die andern von Y bezüglich Z abhängigen Teile unseres Flächenintegrals behandeln und erhalten schliesslich

IV) $$\iint(\xi l+\eta m+\zeta n)\,dS=\int\left(X\frac{\partial x}{\partial s}+Y\frac{\partial y}{\partial s}+Z\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds.$$

Das Integral links ist auf die Fläche S, das rechts auf die Grenzlinie s zu beziehen. *)

Ueber die Operation ▽ an einer Vectorfunction.

25. Wir haben an einer andern Stelle gesehen, dass die Operation ▽ an einem Potential ausgeführt, einen Vector kennen lehrt. Man kann aber auch dieselbe Operation auf Vectorfunctionen, wie namentlich Tait**) gezeigt hat, ausdehnen und gelangt dann zu Resultaten, die mit den Theoremen unter III und IV in Verbindung stehen.

Es sei σ eine Vectorfunction von ρ, dem Vector eines variabeln Punktes. Wie üblich schreiben wir

$$\rho=ix+jy+kz,$$
$$\sigma=iX+jY+kZ,$$

wo X, Y, Z die Componenten von σ sind.

Führen wir an σ die Operation ▽ aus und beachten die bekannten Regeln ***) für die Multiplication der Grössen i, j, k miteinander, so erhalten wir für ▽σ zwei Teile, einen Scalar $S\nabla\sigma$ und einen Vector $V\nabla\sigma$.

---

*) Der gegebene Satz rührt von Stokes her. Smith's Price Examination. 1854. *Question* 8. Den Beweis findet man in Thomson und Tait, *Theoretische Physik* § 190 (*j*).

**) Proc. R. S. Edin. 1862 April 28. Sehr bemerkenswert ist die Abhandlung *On Green's and other allied Theorems* in den Trans. R. S. Edin. 1869—70 und *On some Quaternion Integrals* Proc. R. S. Edin. 1870—71.

***) $i.j=k,\ j.k=i,\ k.i=j;\ j.i=-k,\ k.j=-i,\ i.k=-j;\ i.i=j.j=k.k=-1.$

Digitized by Google

Der erstere ist

$$S\nabla\sigma = -\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

der zweite

$$V\nabla\sigma = i\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+j\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial z}\right)+k\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right),$$

oder, indem wir die in dem Theorem IV definirten Grössen ξ, η, ζ einführen,

$$V\nabla\sigma = i\xi + j\eta + k\zeta.$$

Es erhellt hieraus, dass die Functionen, welche in den Theoremen III und IV eine so grosse Rolle spielten, gleichzeitig durch die Operation ∇ an dem Vector mit den Componenten X, Y, Z erhalten werden. Jene Theoreme lassen sich aber nunmehr kurz ausdrücken durch

$$\text{III}_1) \qquad \iiint S\nabla\sigma\, d\tau = \iint S\nabla\sigma\, U\nu\, ds;$$

$$\text{IV}) \qquad \int S\sigma\, d\rho = \iint S.\nabla\sigma\, U\nu\, ds,$$

wo $d\tau$ ein Volum-, ds ein Flächen- und $d\rho$ ein Linienelement angiebt, $U\nu$ aber die Einheit eines Vectors in Richtung der Normale bezeichnet.

Die folgende Bemerkung wird die Bedeutung dieser beiden Functionen eines Vectors dem Verständnis näher bringen. Legt man um einen Punkt P, in welchem σ den Wert σ_0 hat, eine geschlossene Fläche und rechnet bei der Bildung des Flächenintegrals von σ die Normale nach dem Innern der Fläche als positiv, so ist $S\nabla\sigma$ positiv. Der Vector $\sigma-\sigma_0$ muss dann in der Nähe von P überall nach diesem Punkte hin gerichtet sein, wie die nebenstehende Fig. 1 versinnbildlichen soll.

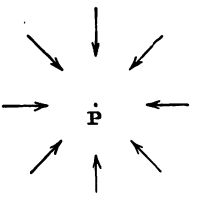


Fig. 1.

Ich schlage daher vor, den Scalar-Teil von $\nabla\sigma$ die *Convergenz* von σ nach dem Punkte P zu nennen.

Um in ähnlicher Weise den Vectorteil zu deuten, stellen wir uns vor, dass wir in Richtung des Vectors sehen, dessen Componenten ξ, η, ζ sind. Wir bemerken dann, dass die Vectoren $\sigma-\sigma_0$ in der Nähe von P tangential angeordnet sind und entgegengesetzt laufen wie der Zeiger einer Uhr, wie die Fig. 2 andeutet.

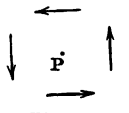


Fig. 2.

Ich schlage deshalb (freilich mit geringer Zuversicht) vor, diesen Teil von $\nabla\sigma$ die *Rotation* des σ um den Punkt P zu nennen.

Die Fig. 3 stellt die Verbindung einer Rotation mit einer Convergenz dar.

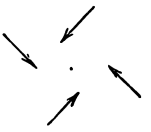


Fig. 3.

Verschwindet der Vectorteil der Operation ∇, ist also

$$V\nabla\sigma = 0$$

Digitized by Google

so heisst das, dass $\nabla\sigma$ ein Scalar oder dass σ die Raumvariation einer scalaren Function Ψ sein soll.

26. Eine der bemerkenswertesten Eigenschaften der Operation ∇ besteht darin, dass ihre Wiederholung zu der so wichtigen Operation

$$\nabla^2 = \Delta = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

führt, die in fast allen Zweigen der Physik ausgeführt werden muss, und die man wol passend als die Laplacesche Operation bezeichnen kann.

Die Operation ∇^2 ist an sich eine scalare und ihr Resultat ist ein Scalar bezüglich Vector, je nachdem sie an einer Scalar- oder Vectorfunction ausgeführt wird.

Bezeichnet q_0 den Wert einer Grösse q in einem Punkt P und $\bar{q}$ den Mittelwert derselben Grösse innerhalb einer sehr kleinen um P mit dem Radius r geschlagenen Kugel, so ist

$$q_0 - \bar{q} = \tfrac{1}{10} r^2 \nabla^2 q,$$

so dass der Wert des q im Centrum ein wenig grösser oder kleiner ist als der Mittelwert $\bar{q}$ innerhalb der Kugel, je nachdem $\nabla^2 q$ positiv oder negativ ist. Die Operation $\nabla^2 q$ bestimmt also den Ueberschuss des Wertes von q in einem Punkte über den Mittelwert dieser Grösse für die ihm benachbarten Punkte, sie zeigt also gewissermassen an, dass die Grösse q sich in dem Punkte P *concentrirt*. Für eine Scalarfunction ist die Bildung des Mittelwerts bekannt genug. Bei einer Vectorfunction gelangt man zu demselben mit Hilfe der für die Integration von Vectorfunctionen geltenden Regeln. Das Resultat ist natürlich ein Vector.

Digitized by Google

ERSTER TEIL.

Electrostatik.

Digitized by Google

Digitized by Google

Cap. I.

Beschreibung der electrischen Erscheinungen.

—x—

Electrisirung durch Reibung.

27. Experiment I*). Reibt man zwei vollkommen electricitätsfreie Stücke von Glas und Harz gegeneinander und lässt sie zunächst mit ihren Reibungsflächen in gegenseitiger Berührung, so bemerkt man noch keine electrische Eigenschaft an ihnen. So wie man sie aber von einander trennt, ziehen sie sich an.

Führt man dieselbe Operation bei zwei andern Stücken von Glas und Harz aus und hängt sie getrennt in der Nähe der beiden ersten Stücke auf, so treten die folgenden Erscheinungen zu Tage:

1) Die beiden Glasstücke stossen einander ab.
2) Jedes Glasstück zieht jedes der beiden Harzstücke an.
3) Die beiden Harzstücke stossen sich gegenseitig ab.

Man bezeichnet die nach den angegebenen Operationen auftretenden Phänomene der Anziehung und Abstossung als *Electrische Erscheinungen*, und betrachtet die betreffenden Körper als *Electrisch* oder *mit Electricität geladen*.

Doch kann man einen Körper ausser durch Reibung gegen einen andern auch noch durch sehr viele andere Manipulationen electrisiren.

Da Glas die Körper anzieht, welche Harz abstösst, und die abstösst, welche dieses anzieht, so verhält sich ein Glasstück ähnlich wie ein anderes Glasstück, aber entgegengesetzt wie ein Harzstück.

Ein Körper ist mit *Glaselectricität* geladen, wenn er unabhängig von der Operation durch die er electrisirt ist, Glas abstösst und Harz anzieht. Ein Körper ist dagegen mit *Harzelectricität* geladen, wenn er Harz abstösst und Glas anzieht.

*) William Thomson, *On the Mathematical Theory of Electricity.* Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 1848 März.

Digitized by Google

Andere Arten der Electricität als die beiden eben genannten giebt es nicht, denn man findet, dass das electrische Verhalten aller Körper entweder dem des Glases oder dem des Harzes entspricht.

Wissenschaftlich bezeichnet man die Glaselectricität als *Positive Electricität* und die Harzelectricität als *Negative Electricität.* Das entgegengesetzte Verhalten der beiden Electricitätsarten rechtfertigt auch vollkommen diese beiden Gegensätze ausdrückenden Bezeichnungen, doch beruht es selbstverständlich auf Willkür, wenn wir gerade die Glaselectricität positiv nennen, wie ja auch in der analystischen Geometrie nach Rechts verlaufende Strecken rein conventionell positiv heissen.

Zwischen einem electrisirten und einem nichtelectrisirten Körper kann man keine Kraftwirkung, weder eine Anziehung noch eine Abstossung bemerken. Wo man dennoch eine solche Wirkung zwischen electrisirten und ursprünglich nichtelectrisirten Körpern findet, da sind die letztern durch *Induction* oder *Influenz* electrisch geworden.

Electrisirung durch Induction oder Influenz.

28. Experiment II*). Man hängt ein Metallgefäss an Fäden von weisser Seide auf und bringt an seinem Deckel ebensolche Fäden an, um ihn, ohne das Gefäss zu berühren, leicht abnehmen und aufsetzen zu können. Hängt man an die untere Seite des Deckels mit Seidenfäden ein in der oben angegebenen Weise electrisirtes Glasstück, und setzt den Deckel vorsichtig auf das ursprünglich electricitätsfreie Gefäss, so dass das Glas nirgend die Metallwand desselben berührt, so zeigt sich die Aussenseite des Gefässes mit Glaselectricität geladen, und es lässt sich nachweisen, dass diese Electrisirung des Gefässes unabhängig von der Lage, die das Glasstück in seinem Innern einnimmt, ist. So wie man das Glasstück ohne das Gefäss zu berühren herausnimmt, verschwindet die Electricität der Aussenseite des Gefässes, das Glas dagegen befindet sich in demselben electrischen Zustande wie zuvor.

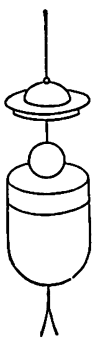


Fig. 4.

Diese Art der Electrisirung, die direct von der Gegenwart des Glases in dem Gefässe abhängt und aufhört, wenn das Glas entfernt ist, wird als Electrisirung durch *Induction* oder *Influenz* bezeichnet.

Ein ähnliches Resultat erhält man, wenn das Glasstück aussen neben das Gefäss aufgehängt wird, doch wird dabei ein Teil der Aussenseite des Gefässes mit Glaselectricität ein anderer mit Harzelectricität geladen, während im vorigen Fall, wo das Glasstück sich in dem Innern des Gefässes befand, die Glaselectricität die ganze Aussenseite bedeckte, und die Harzelectricität die ganze innere Seite des Gefässes einnahm.

*) Dieses und noch manches der folgenden Experimente verdankt man Faraday. *On Static Electrical Inductive Action.* Phil. Mag. 1843 oder Exp. Res. vol. II. pag. 279.

Digitized by Google

Electrisirung durch Leitung.

29. Experiment III. Wir electrisiren das Metallgefäss wie in dem letzten Versuche durch Induction, hängen in seine Nähe ein anderes Metallgefäss an Seidenfäden auf und verbinden beide Gefässe durch einen Metalldraht mit einander.

Dadurch erreichen wir, dass auch das zweite Gefäss sich mit Glaselectricität ladet, und dass die Glaselectricität des ersten sich vermindert.

Der Draht bildet also die Brücke für den Uebergang des electrischen Zustandes von dem einen Gefäss zu dem andern und heisst demgemäss ein *Leiter* oder *Conductor* der Electricität.

Das zweite Gefäss aber ist durch *Leitung* geladen.

Leiter und Nichtleiter oder Conductoren und Isolatoren.

Experiment IV. Hätten wir die beiden Gefässe statt durch einen Draht mit Hilfe eines Glasstabes, einer Harzstange oder eines Fadens von weisser Seide verbunden, so würde keine Hinüberleitung von Electricität von dem einen zu dem andern stattgefunden haben. Man nennt deshalb diese Körper *Nichtleiter* oder, weil man sich ihrer bei electrischen Experimenten bedient, um Körper so aufzustellen oder aufzuhängen, dass sie ihre Electricität bewahren, *Isolatoren*.

Metalle sind gute Leiter; Luft, Glas, Guttapercha, Harz, Kautschuk, Paraffin u. s. f. gute Isolatoren. Wir werden aber später sehen, dass einerseits alle Körper dem Durchgange der Electricität einen gewissen Widerstand entgegensetzen, und andererseits auch alle, wenn auch in sehr verschiedenem Grade, sie fortleiten. Die genauere Untersuchung über diese Verhältnisse können wir erst bei der Lehre von der Bewegung der Electricität durchführen. Für jetzt teilen wir alle Körper nur in zwei Klassen ein, in gute Leiter oder Conductoren und in gute Nichtleiter oder Isolatoren.

Wir haben eben bemerkt, dass Luft zu den Nichtleitern gehört, und doch zeigte das zweite Experiment, dass das Metallgefäss sich mit Electricität lud, trotzdem es von dem Glasstücke durch die Luft getrennt war. Faraday hat solche Körper, welche den electrischen Zustand von Ort zu Ort fortpflanzen, ohne doch die Electricität zu leiten, *Dielectrica* oder *Dielectrische Medien* genannt. Der Process der bei dieser Art der Verteilung der Electricität sich abspielt, heisst Induction oder Influenz.

Ladung.

Beim dritten Experiment haben wir mit Hilfe eines Drahtes Glaselectricität vom ersten Gefäss auf das zweite übergeführt. Entfernen wir nunmehr den Draht, nehmen das electrische Glasstück aus dem ersten Gefässe heraus und bringen es möglichst weit von demselben fort, so behält

Digitized by Google

das zweite Gefäss noch weiter seine Glaselectricität, das erste aber findet sich mit Harzelectricität geladen. Verbinden wir jetzt wieder beide Körper durch den Draht, so tritt durch denselben eine Leitung beider Electricitätsarten ein, und die Gefässe werden unelectrisch. Daraus folgt aber, dass sie zuletzt gleich stark und mit entgegengesetzten Electricitäten geladen gewesen sind.

30. Experiment V. Wir haben ferner beim zweiten Versuche gesehen, dass wenn man ein durch Reibung mit einem Harzstück electrisirtes Glasstück in ein Metallgefäss hineinhängt, die Electrisirung der Aussenseite des Gefässes unabhängig von dem Orte ist, an welchem das Glasstück sich in dem Innern befindet. Führen wir nun auch das Harzstück, mit dem wir das Glas gerieben haben, in das Gefäss ein ohne dieses oder das Glas zu berühren, so erweist sich die Aussenseite des Gefässes als unelectrisch. Das Gefäss wird also durch das Harzstück ebenso stark, aber entgegengesetzt electrisirt wie durch das Glasstück.

Hängen wir eine beliebige Anzahl von electrisirten Körpern in das Gefäss hinein, so werden wir immer die Electrisirung seiner Aussenseite gleich der algebraischen Summe der Electrisirungen aller Körper finden, wenn wir unserer früheren Festsetzung gemäss eine Ladung mit Harzelectricität als eine negative ansehen. Wir erlangen so eine praktische Methode, die electrischen Wirkungen einer Reihe von Körpern zu summiren, ohne ihre bezüglichen Ladungen ändern zu müssen.

31. Experiment VI. Wir isoliren die beiden Gefässe A und B, die uns in dem dritten Experiment gedient haben, bringen in A das Glasstück, in B das Harzstück und verbinden die Gefässe mit einander durch einen Metalldraht. Es verschwindet dann jede Spur von Electricität an den Gefässen. Entfernen wir den Draht und ziehen die Stücke Glas und Harz aus den Gefässen ohne sie zu berühren heraus, so finden wir A mit Harzelectricität und B mit Glaselectricität geladen.

Bringt man dann das Gefäss A und das Glasstück oder das Gefäss B und das Harzstück in ein anderes weiteres Gefäss C ohne dasselbe zu berühren, so bemerkt man, dass die Aussenseite von C unelectrisch bleibt. Daraus folgt, dass die jetzige Electrisirung von A genau gleich und entgegengesetzt der des Glasstückes und dass die von B genau gleich und entgegengesetzt der des Harzstückes ist. Wir haben so die Möglichkeit erlangt irgend ein Gefäss mit Electricität zu laden, die an Menge gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt der eines andern Körpers ist, ohne die Electrisirung des letztern ändern zu müssen. Nach derselben Methode lassen sich auch eine Reihe von Gefässen mit ein und derselben Menge Electricität irgend einer Art laden, die wir dann als provisorische Masseinheit benutzen können.

32. Experiment VII. Wir laden das Gefäss B mit einer Einheit positiver Electricität und bringen es in das isolirte Gefäss C ohne dasselbe

Digitized by Google

zu berühren. Die Aussenseite des letztern erhält dadurch ganz so wie in dem zweiten Experiment eine positive Ladung. Diese Ladung ändert sich auch nicht, wenn wir die Innenseite des Gefässes C mit dem Gefässe B in Berührung bringen. Nehmen wir aber nunmehr das letztere heraus, so zeigt es sich, dass es jede Spur von Electricität verloren hat, wohingegen das Gefäss C eine Einheit positiver Electricität, also alles, was dem Gefäss B angehört hat, besitzt. Wir haben also die Ladung des einen Körpers auf einen andern übertragen.

Führen wir dieselbe Operation nochmals aus, laden also B mit einer zweiten Einheit positiver Electricität, bringen es in C, berühren B mit C und nehmen B wieder fort, so wird B wieder unelectrisch, C aber hat eine zweimal so grosse Ladung wie früher.

Wir können den Process beliebig oft wiederholen, ohne etwas anderes zu finden, als dass B seine Ladung stets vollständig an C abgiebt, wie es auch electrisirt sein mag und wie hoch auch schon die Ladung von C ist, wofern nur B zuerst vollständig in C ohne dasselbe zu berühren hineingesenkt, dann mit C zur Berührung gebracht und endlich ohne C zu berühren wieder herausgenommen wird.

Wir werden später in der practischen Durchführbarkeit dieser Methode, einen Körper mit einer beliebigen Anzahl von electrischen Einheiten zu laden, den untrüglichsten Beweis für die Richtigkeit der jetzigen mathematischen Theorie der Electricität finden.

33. Ehe wir zu einer genauen Untersuchung der Gesetze übergehen, nach welchen die electrische Kraft wirkt, wollen wir nochmals die eruirten Tatsachen kurz zusammenfassen.

Bringen wir ein System irgend wie electrisirter Körper in ein isolirtes leitendes Gefäss, so lehrt eine Untersuchung der Electricität der Aussenseite des Gefässes unmittelbar den Gesammtcharakter der Electricität des in seinem Innern befindlichen Systems kennen, ohne dass wir die Electritätsarten der verschiedenen Körper mit einander in Verbindung zu setzen brauchen.

Die Art der Electrisirung der Aussenseite des Gefässes lässt sich aber mit grosser Präcision bestimmen, wenn man dieselbe mit einem Electroskop verbindet.

Als solches Electroskop können wir einen Streifen Blattgold benutzen, welcher zwischen zwei gleich und entgegengesetzt geladenen Kugeln hängt. Wird der Goldstreifen electrisirt, so neigt er sich der Kugel zu, die ihm entgegengesetzt geladen ist. Indem man die Kugeln stark ladet und dem Blattgold eine möglichst hindernisfreie Aufhängung giebt, kann man so die minimalsten Spuren von Electricität auf dem Streifen entdecken und dem Zeichen nach bestimmen.

Wir werden freilich später bei der Beschreibung der Electrometer und Condensatoren noch weit delicatere Methoden zur Entdeckung von Electricität und zur Verification unseres Satzes kennen lernen, einstweilen aber

Digitized by Google

benutzen wir noch zur Prüfung des electrischen Zustandes des Gefässes ein Blattgold-Electroskop, das wir uns mit ihm in Verbindung gesetzt denken. Hat sich doch Faraday desselben in der angegebenen Weise bei seinen bewunderungswürdigen Untersuchungen über die Gesetze, denen die electrischen Phänomene gehorchen, bedient *).

34. I.) Die Gesammtelectricität eines Körpers oder eines Systems von Körpern ändert sich nur insoweit, als es Electricität an andere Körper abgiebt oder von ihnen empfängt.

Man findet freilich in allen auf Electricität bezüglichen Versuchen, dass die Electrisirung eines Körpers sich mit der Zeit ändert, allein es lässt sich dann auch stets eine mangelhafte Isolation desselben nachweisen. In der Tat verliert auch ein Körper um so weniger von seiner Ladung je besser er isolirt ist, und man darf annehmen, dass jeder Körper seine Electricität ungeschmälert behalten würde, wenn man ihn in ein vollkommen nichtleitendes Medium bringen könnte.

II.) Wird ein Körper durch Leitung von einem andern electrisirt, so ist die Ladung beider Körper zusammen gleich der früher von dem einen Körper allein innegehabten Electricitätsmenge; der eine Körper verliert soviel an positiver und gewinnt soviel an negativer Electricität als der andere an jener gewinnt und an dieser verliert.

Den Beweis für diese Behauptung können wir darin sehen, dass wenn man beide Körper in ein Metallgefäss bringt, die Herstellung einer leitenden Verbindung zwischen ihnen keine Aenderung in der Electrisirung der Aussenseite des Gefässes verursacht.

III.) Bei jeder Electricitätserregung durch Reibung oder durch irgend eine andere Operation tritt ebensoviel positive als negative Electricität auf.

Dieser Satz lässt sich dadurch beweisen, dass man entweder die ganze erregte Electricität auf ihren Trägern in ein Metallgefäss bringt, oder überhaupt die Electrisirung in diesem Gefässe vornimmt. Immer wird das Electroskop anzeigen, dass die Summe der auf der Aussenseite des Gefässes erregten Electricitäten Null ist.

Die electrische Erregung eines Körpers oder seine Electricitätsmenge ist daher eine physikalische der Messung zugängliche Grösse, so dass das Resultat der Addition mehrerer Electrisirungen ganz dem Ergebnis einer algebraischen Summation der einzelnen Electrisirungen entspricht. Demnach sind wir auch berechtigt Ausdrücke einzuführen, die die Electrisirung eines Körpers nicht blos als Qualität, sondern auch als Quantität charakterisiren, so dass ein electrisirter Körper als „geladen mit einer gewissen Menge positiver oder negativer Electricität“ erscheint.

35. Indem wir aber die Electricität in die Klasse der messbaren Grössen bringen, dürfen wir natürlich nicht übereilt jetzt schon sagen, was sie

*) *On Static Electrical Inductive Action* Phil. Mag. 1843 oder *Exp. Res.* vol. II p. 249.

Digitized by Google

eigentlich ihrer Natur nach ist oder nicht ist, ob sie eine Substanz oder eine Energie oder sonst eine der bekannten physikalischen Quantitäten vorstellt. Alle bisher angeführten Erfahrungen zeigen nur, dass Electricität weder geschaffen noch vernichtet werden kann, so dass die Gesammtelectricität eines durch eine Fläche eingeschlossenen Körpersystems nur dadurch zu vermehren oder zu vermindern ist, dass man Electricität durch die Fläche einströmen bezüglich herausfliessen lässt.

Genau dasselbe gilt auch für Materie und findet in der Hydrodynamik z. B. seinen Ausdruck in der sogenannten Continuitätsgleichung.

Es gilt aber nicht für die Wärme, da diese innerhalb der Fläche selbst durch Verwandlung von Energie einer andern Art in Wärme oder von Wärme in Energie anderer Art vermehrt bezüglich vermindert werden kann.

Lassen wir zwischen Körpern eine Wirkung in die Ferne zu, so gilt jener Satz nicht einmal für die Energie in ihrer allgemeinsten Bedeutung, denn dann kann ein Körper innerhalb einer Fläche mit einem ausserhalb befindlichen Energie austauschen, ohne dass dieser je sich in der Fläche selbst noch so kurze Zeit befunden zu haben braucht. Sobald wir jedoch die Wirkung in die Ferne als nur scheinbar zu betrachten und jede Wirkung zwischen zwei Körpern auf Actionen, die zwischen den kleinsten Teilchen eines Zwischenmediums vor sich gehen, zurückzuführen im Stande sein werden, dann ist es wol möglich, dass wir mit Hilfe einer klaren Vorstellung von den intermediären Vorgängen bei allen Aenderungen, welche Energie innerhalb einer Fläche erleidet, den Durchgang der Energie durch dieselbe werden verfolgen können.

Auch noch aus andern Gründen können wir die Electricität, als physikalische Grösse synonym mit der Electrisirung eines Körpers, nicht wie die Wärme als eine Form der Energie betrachten. Ein electrisirtes System hat allerdings eine gewisse Summe von Energie, aber diese Energie wird dadurch berechnet, dass man die Electricitätsmenge jedes Teiles des Systems mit dem ihm zugehörigen Potential, das selbst eine andere physikalische Grösse bildet, multiplicirt und von der Summe der so erhaltenen Producte die Hälfte nimmt. Die Energie entspricht also hier dem Producte der beiden physikalischen Grössen „Electricität“ und „Potential“, und deshalb können Electricität und Energie unmöglich Grössen derselben Art sein. Electricität ist eben nur einer der beiden Factoren der Energie, der zweite Factor ist das Potential.

Uebrigens tritt die Energie nicht blos in der Electricitätslehre als das Product zweier Factoren auf. So ist sie z. B. auch noch gleich

Einer Kraft $\times$ der Entfernung, durch die die Kraft wirkt.
Einer Masse $\times$ der Schwere, die diese längs einer gewissen Fallhöhe angreift.
Einer Masse $\times$ dem halben Quadrate ihrer Geschwindigkeit.
Einem Drucke $\times$ dem Volumen einer Flüssigkeit, die unter diesem Drucke in ein Gefäss einströmt.

Digitized by Google

Einer chemischen Verwandschaft $\asymp$ einer chemischen Veränderung, gemessen durch die Zahl der electrochemischen Aequivalente, welche in die Verbindung eintritt.

Wir könnten aber aus dem Begriffe der Energie, falls wir je auch für das electrische Potential eine mechanische Vorstellung gewinnen sollten, die physikalische Kategorie aufsuchen, in welche wir die Electricität zu versetzen haben.

36. Die meisten Theorieen behandeln die Electricität als eine Substanz. Da aber einerseits offenbar zwei Arten von Electricität existiren, die in ihrer Combination sich gegenseitig vernichten, und andererseits zwei Stoffe, die sich zu Nichts zusammensetzen, nicht denkbar sind, so hat man sich gezwungen gesehen, zwischen freier und gebundener Electricität zu unterscheiden.

Hypothese der Zwei Fluida.

In der Hypothese der zwei Fluida nimmt man an, dass jeder Körper in seinem unelectrischen Zustand mit gleichen Mengen positiver und negativer Electricität geladen ist. Dabei sollen diese Mengen so gross sein, dass kein Electrisirungsprocess bis jetzt einen Körper gänzlich einer Electricitätsart hat berauben können. Die Electrisirung eines Körpers besteht dann nach dieser Hypothese in der Uebertragung einer gewissen Menge P positiver Electricität von einem Körper A auf einen andern Körper B, oder einer gewissen Menge N negativer Electricität von B nach A, oder auch in einer Combination beider Processe.

Es hat also A nach der Electrisirung $P + N$ Einheiten negativer Electricität mehr im Verhältnis zu der ihm noch gebliebenen positiven Electricität. Letztere denkt man sich mit einer gleichen Menge negativer Electricität verbunden und bezeichnet sie zusammen mit dieser als *Gebundene* oder *Latente Electricität*. $P + N$ aber heisst die *Freie Electricität* des Körpers A.

Da die beiden Electricitätsarten nach dieser Theorie von einem Körper zu einem andern übergeführt werden können und zudem in Leitern eine ausserordentliche Beweglichkeit zeigen, so bezeichnet man sie meistenteils als *Fluida*. Aber abgesehen von der Beweglichkeit schreiben ihnen diejenigen, welche die Theorie nach ihrer mathematischen Seite verfolgen, fast keine einzige der sonstigen Eigenschaften der Flüssigkeiten zu, also weder Trägheit, noch Gewicht, noch Elasticität. Das Wort Fluidum hat jedoch viele, und unter ihnen auch Gelehrte, welche wenig an naturphilosophisches Denken gewöhnt waren, anzunehmen verleitet, dass es ganz unentbehrlich für den Ausbau der ihnen fasslich scheinenden Theorie sei.

Digitized by Google

Wir werden später sehen, dass die mathematische Behandlung unseres Gegenstandes gerade von denen am meisten gefördert worden ist, welche sich der Terminologie der Theorie von zwei Fluidis bedienten. Ihre Resultate sind aber unabhängig von jener Hypothese, weil sie aus Daten erhalten sind, die jederzeit durch das Experiment verificirt werden können, also keinen Zweifel an ihrer Richtigkeit zulassen. Deshalb ist auch die Bestätigung der mathematischen Resultate durch die Erfahrung kein Prüfstein für die Richtigkeit der speciellen Lehren jener Theorie, aber auch keiner gegen dieselbe.

Die Einführung der beiden Fluida gestattet uns die negative Electrisirung von A und die positive Electrisirung von B in dreifacher Weise mit demselben Endresultat zu erreichen. Früher haben wir sie dadurch zu Stande gebracht, dass wir P Einheiten positiver Electricität von A nach B und N Einheiten negativer Electricität von B nach A übergeführt haben. Bringen wir jetzt $P+N$ Einheiten positiver Electricität von A nach B, oder $P+N$ Einheiten negativer Electricität von B nach A, so müssen offenbar A und B ebensoviel freie Electricität erhalten, wie nach der zuerst angegebenen Operation, aber die in A gebundene Electricitätsmenge ist im zweiten Fall kleiner und im dritten grösser, als sie im ersten war.

Demnach würde man nach dieser Theorie nicht blos die freie Electricität eines Körpers, sondern auch seine gebundene ändern können. Bis jetzt hat man noch keine besonderen Eigenschaften an einem Körper, wenn sein Inhalt an gebundener Electricität geändert wurde, in Erscheinung treten sehen. Wir müssen daher schliessen, dass entweder die gebundene Electricität überhaupt keine Eigenschaften besitzt, oder dass ihre Menge in einem Körper nicht verändert werden kann. Die erste dieser Alternativen bietet den Mathematikern weiter keine Schwierigkeiten, denn da diese den Fluidis keine andern Eigenschaften zuschreiben, als die der Attraction und Repulsion, so müssen sich die beiden Electricitätsarten, wenn sie sich binden, in ihren Wirkungen aufheben und so jeder Beobachtung entgehen. Wer jedoch mit dem Worte Fluidum substantielle Eigenschaften verbinden zu müssen glaubt, dem wird es immer undenkbar bleiben, dass die Combinirung der zwei Fluida sie gänzlich jeder Eigenschaft berauben sollte, so dass sie weder das Gewicht, noch die Masse, noch sonst eine Qualität des Körpers, in dem sie sich befinden, zu ändern vermögen. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, haben daher einige angenommen, dass jede Electrisirung in einem Transport genau gleicher Quantitäten der beiden Fluida nach entgegengesetzten Richtungen bestehe, so dass die absolute Summe der beiden Fluida in einem Körper sich stets gleich bliebe. Durch dieses neue Gesetz retten sie zwar den Schein, vergessen aber vollständig, dass sie es sehr wol entbehren könnten, wenn sie nicht darauf ausgingen, die zwei Fluida auf alle Fälle mit den Tatsachen in Einklang zu bringen und ihre Theorie davor zu bewahren, Phänomene vorauszusagen, die in der Tat nicht existiren.

Digitized by Google

Hypothese von Einem Fluidum.

37. Die Hypothese von einem Fluidum unterscheidet sich von der der zwei Fluida eigentlich nur dadurch, dass sie für das eine Fluidum der letztern, im allgemeinen für das negative, alle Eigenschaften der gewöhnlichen Materie vindicirt, und nur das zweite, das positive, als electrisches Fluidum bezeichnet.

Die Teilchen dieses Fluidums sollen sich untereinander im verkehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung abstossen, dagegen die Teilchen des Körpers, in dem sie sich befinden, nach demselben Gesetze anziehen. Aehnlich sollen die Teilchen der Materie gegen einander eine Abstossung und gegen das electrische Fluidum eine Anziehung ausüben. Doch nimmt man an, dass die Attraction zwischen Einheiten der Materie und Electricität etwas grösser ist, als die gegenseitige Repulsion gleicher Einheiten von Materie bezüglich Electricität. Eine Einheit Materie in Verbindung mit einer Einheit Electricität soll also eine entsprechende Combination anziehen. Die Kraft der Attraction zwischen Combinationen von Electricität und Materie wird aber als sehr gering gegen die der Attraction freier Electricität gegen freie Materie betrachtet. Sie soll übrigens dazu dienen, die allgemeine Gravitation zu erklären.

Enthält ein Körper soviel Fluidum, dass seine Electricität ein ausserhalb befindliches electrisches Partikel ebenso stark abstösst, als seine materiellen Teilchen es anziehen, so heisst er electrisch *Gesättigt*. Enthält er mehr Fluidum, so besitzt er einen Ueberfluss an Electricität und ist *Ueberladen*. Enthält er weniger, so ist er nicht gesättigt oder *Unterladen* und hat ein Deficit an Electricität. Zur Sättigung eines Gramms gewöhnlicher Materie scheint eine grosse Electricitätsmenge zu gehören, denn wenn man ein Gramm Gold, was leicht auszuführen ist, zu einem Blatt von einem qm Flächeninhalt auswalzt, so kann es mindestens eine Ladung von 60000 Einheiten negativer Electricität fassen. Es gehört also sicher noch mehr Electricität dazu, um es zu sättigen.

Diese Theorie lehrt, unähnlich der von den zwei Fluidis, nicht mehr als die Erfahrung bestätigen kann. Sie setzt aber voraus, dass die Dichtigkeit der Electricität so gering ist, dass keine bisher erreichbare Electrisirung die Masse oder das Gewicht eines Körpers zu verändern vermag. Zudem ist sie auch nicht im Stande zu erklären, weshalb gerade die Glaselectrisirung in einem Ueberschuss an Electricität im Verhältnis zur Materie bestehen soll.

Ganz ungerechtfertigt ist aber ein anderer Vorwurf, der dieser Theorie selbst von competenter Seite gemacht worden ist. Man sagte nämlich, dass die Lehre von der Repulsion zweier von Electricität freier materieller Teilchen in directem Gegensatze zu der allgemeinen Erfahrung stehe, dass materielle Teilchen sich im ganzen Universum anziehen, denn nach jener Lehre müsste gerade das Gegenteil stattfinden. Das würde richtig sein, wenn eben die Welt-

Digitized by Google

körper ganz frei von Electricität wären, denn dann hätten sie die höchste negative Ladung und müsten sich gegenseitig abstossen. Zu einer solchen Annahme liegt aber nicht der geringste Grund vor. Man wird vielmehr mit grösserer Wahrscheinlichkeit voraussetzen dürfen, dass die Erde und alle andern Weltkörper sich in einem unelectrischen Zustande befinden, das heisst ebensoviele Einheiten Electricität als Materie besitzen, ihre gegenseitige Anziehung wird dann, wie wir schon bemerkt haben, durch den Ueberschuss der Attraction ungleichnamiger Substanzen über der Repulsion gleichnamiger verursacht. Inzwischen ist nicht zu leugnen, dass die Einführung dieses Ueberschusses etwas gekünstelt erscheint, und dass sie einen mächtigen Vorwurf gegen die Theorie bildet.

Ich werde in diesem Werke bei Gelegenheit verschiedener Untersuchungen die einzelnen Theorieen in dem Lichte neuer Klassen von Phänomenen, die uns die Electricität bietet, zu prüfen haben. Doch glaube ich meinerseits, dass wir die meiste Aufklärung über die Natur der Electricität aus einem Studium der Vorgänge in dem Raume zwischen den electrisirten Körpern schöpfen werden. Ein derartiges Studium charakterisirt auch die Untersuchungen, die Faraday in seine *Experimental Researches* niedergelegt hat. Demnach habe ich vor, die Resultate, zu denen Faraday, W. Thomson und andere gelangt sind, mit einander zu verbinden und in mathematische Form zu bringen, so dass wir die Erscheinungen, welche durch alle Theorieen ihre Erklärung finden, leicht von denen, welche den einzelnen Hypothesen Schwierigkeiten bereiten, werden trennen können.

Messung der Kraftwirkung zwischen electrisirten Körpern.

38. Ich führe von den zahlreichen Methoden, die Kraft, welche electrisirte Körper auf einander ausüben, zu messen, zunächst die folgende als die wichtigste an. Man tarirt einen Körper auf einer feinen Waage aus und legt unter die Schale, welche diesen Körper enthält, in bekannter Entfernung einen andern Körper hin. Electrisirt man beide Körper, so werden sie sich anziehen oder abstossen, und man muss, um an der Waage das Gleichgewicht wieder herzustellen, zu der Tara Gewichte zulegen oder von ihr wegnehmen.

Drückt man diese Gewichtszulagen oder Abnahmen in dynamischem Mass aus, so erhält man die Grösse der Kraftwirkung zwischen den beiden Körpern. Dieser Methode hat sich zunächst W. Snow Harris bedient, und auf ihr basirt auch das absolute Electrometer, welches W. Thomson angegeben hat, und von dem in Art. 217 weiter die Rede sein wird.

Meist bedient man sich jetzt bei Ausführung dieser Methode statt einer gewöhnlichen Waage der Torsionswaage.

Man bringt an das untere Ende eines oben eingeklemmten Drahtes oder Fadens einen horizontalen Arm an, der um diesen als Axe

Digitized by Google

schwingen kann. Befestigt man dann den einen Körper an ein Ende des Armes und stellt den andern seitlich von ihm auf, so dreht der tangentiale Teil der electrischen Kraft, welche zwischen den beiden Körpern wirkt, den Arm um die vertikale Axe und tordirt dadurch den Draht oder Faden um einen gewissen Winkel. Aus diesem Torsionswinkel kann man dann die Anziehungs- oder Abstossungskraft berechnen, wenn der Torsionscoefficient des Drahtes und das Trägheitsmoment der Waage bestimmt sind.

Die Torsionswaage ist von Michell zur Bestimmung der Gravitation zwischen kleinen Körpern vorgeschlagen und von Cavendish zu diesem Zwecke verwendet worden.

Coulomb erfand sie dann nochmals unabhängig von jenen Naturforschern und eruirte mit ihrer Hilfe die Gesetze, nach denen die electrischen und magnetischen Kräfte wirken. Seitdem ist sie in allen Untersuchungen, die eine Messung von kleinen Kraftwirkungen erheischten, verwendet worden. Ihre Theorie und Benutzungsweise werde ich in Art. 215 auseinandersetzen.

Abhängigkeit der Kraft von der Höhe der Ladung.

39. Wir wollen nunmehr voraussetzen, dass uns irgend eine Methode zur Messung electrischer Kräfte zu Gebote steht. Bei der Ausführung einer solchen Messung nehmen wir aber die beiden electrisirten Körper möglichst klein im Verhältnis zu ihrem gegenseitigen Abstand, so dass das Resultat unabhängig von etwaigen Ungleichartigkeiten in der Verteilung der Electricität auf einem der Körper ist. Gleichzeitig entfernen wir alle Körper, auf welche unsere Versuchskörper inducirend wirken könnten.

Wir finden dann durch eine solche Messung, dass zwei Körper, welche mit den bezüglichen Electricitätsmengen e, e', die wir uns in irgend einer Einheit ausgedrückt denken, geladen sind, sich in bestimmter Entfernung mit einer Kraft proportional dem Producte von e und e' abstossen, wenn die Zeichen von e und e' gleich, und anziehen, wenn sie entgegengesetzt sind.

Der erste Körper, A, soll m Einheiten positiver und n Einheiten negativer Electricität besitzen, die wir uns wie in dem Experiment V. von einander getrennt denken können.

Der zweite, B, besitze m' Einheiten positiver Electricität und n' Einheiten negativer.

Jede der m positiven Einheiten in A wird dann jede der m' positiven Einheiten in B mit einer Kraft f abstossen. Der Totaleffect ist also $mm'f$. Dagegen wird sie jede der negativen n' Einheiten mit derselben Kraft anziehen, und das giebt eine Kraftwirkung von der Grösse $mn'f$. Aehnlich werden die n negativen Einheiten in A die m' positiven in B anziehen und die n' negativen abstossen.

Digitized by Google

Die gesammte zwischen den Körpern wirkende Abstossungskraft ist also $(mm' + nn')f$ und die gesammte Anziehungskraft $(mn' + m'n)f$.

Die Resultante beider Kräfte, die wir uns als Abstossung denken wollen, ist also

$$(mm' + nn' - mn' - m'n)f \text{ oder}$$
$$(m - n)(m' - n')f.$$

Nun ist aber $m - n = e$ der algebraische Wert der Ladung von A und ebenso $m' - n' = e'$ der der Ladung von B, somit wird die resultirende Abstossung gleich $ee'f$, wo wir den e die Zeichen zu verleihen haben, welche ihnen als algebraischen Werten zukommen.

Abhängigkeit der Kraft von der Entfernung.

40. Haben wir die Abhängigkeit der Kraftwirkung zweier in constanter Entfernung gehaltener Körper von der Höhe ihrer Ladung eruirt, so können wir durch Variation dieser Entfernung und Constanthaltung der Ladung auch die Abhängigkeit der Kraft von dem Abstand, in dem die Körper auf einander wirken, bestimmen.

Nach diesem Princip ausgeführte directe Messungen haben ergeben, dass die Kraftwirkung, gleichgiltig ob sie sich als Anziehung oder Abstossung äussert, im umgekehrten Verhältnis zu dem Quadrate der Entfernung der beiden Körper von einander steht. Bezeichnen wir demnach durch f die Kraft zwischen zwei Einheiten Electricität, wenn sie sich in der Einheit der Entfernung befinden, so ist ihre Wirkung auf einander in dem Abstande r gleich fr^{-2}. Allgemein ist also die Anziehung oder Abstossung zwischen zwei Electricitätsmengen e und e', die auf sehr kleinen Körpern concentrirt sind, gegeben durch

$$fee'r^{-2}.$$

Definition der electrostatischen Electricitätseinheit.

41. Wir sind bis jetzt von einer ganz willkürlichen Electricitätseinheit ausgegangen, indem wir die Electricitätsmenge des Glasstückes, welches wir am Beginn unserer Versuche gerade zur Hand hatten, allen Messungen zu Grunde legten. Das oben entwickelte Gesetz für die Kraftwirkung zwischen Electricitätsmengen setzt uns aber in Stand bei der Definition der electrischen Einheit ein ganz bestimmtes Princip zu befolgen, so dass wir sie stets wieder zu finden vermögen. Wir definiren sie nämlich so, dass die Grösse f gleich 1 wird. Also:

Die electrostatische Einheit der Electricität ist diejenige positive Electricitätsmenge, welche eine ihr gleiche positive Electricitätsmenge in der Einheit der Entfernung mit der Einheit der Kraft abstösst.

Digitized by Google

Wie die Definition schon ausdrückt, bezeichnet man diese Einheit als *Electrostatische* zur Unterscheidung von der Elèctromagnetischen Einheit, von der später die Rede sein wird.

Das allgemeine Gesetz der electrischen Wirkung vereinfacht sich also in

$$F = ee'r^{-2}.$$

Die Abstossungskraft zwischen zwei sehr kleinen Körpern, die mit den in electrostatischen Einheiten gemessenen Electricitätsmengen e bezüglich e' geladen sind, ist direct gleich dem Verhältnis des Productes der Ladungen zu dem Quadrate der Entfernung, in der sich die beiden Körper von einander befinden.

Dimensionen der electrostatischen Electricitätseinheit.

42. Ist $[Q]$ die Electricitätsmenge, welche in der electrostatischen Electricitätseinheit enthalten ist, geben e, e' die numerischen Beträge specieller electrischer Quantitäten an, bezeichnet man weiter mit $[L]$ die Längeneinheit, mit r den numerischen Betrag einer Entfernung; mit $[F]$ die Krafteinheit und mit F den numerischen Betrag einer Kraft, so haben wir

$$F[F] = e\,e'\,r^{-2}\,[Q^2]\,[L^{-2}],$$

somit

$$[Q] = [L\,F^{\frac{1}{2}}]$$
$$= [L^{\frac{3}{2}}\,T^{-1}\,M^{\frac{1}{2}}],$$

und dadurch sind die Dimensionen der electrostatischen Einheit bestimmt.

Man mag wol in der Praxis und auf andern Gebieten der Electricitätslehre andere Einheiten zu Grunde legen, in der Electrostatik sind aber Electricitätsmengen nur nach der electrostatischen Einheit zu messen, wie ja auch in der Astronomie die Masseneinheit durch das Gravitationsgesetz definirt ist, und keineswegs mit den sonst üblichen Einheiten zusammenfällt.

Verification des Gesetzes der electrischen Kraftwirkung.

43. Man darf das oben angeführte electrische Wirkungsgesetz durch die bekannten Versuche Coulombs an der Torsionswaage als in gewisser Annäherung als richtig erwiesen ansehen. Inzwischen erschweren die vielen störenden Ursachen, die nur bei grösster Sorgfalt vermieden werden können, die Ausführung solcher Experimente und rauben den Resultaten einen Teil ihres Wertes.

Zunächst ist man gezwungen den zu electrisirenden Körpern Dimensionen zu verleihen, die nicht gerade klein im Verhältnis zu ihrer Entfernung sind, weil allzu kleine Körper nicht im Stande sind Ladungen aufzunehmen und zu behalten, die messbare Kraftwirkungen aufeinander ausüben. Dadurch

Digitized by Google

bringt aber jeder der Körper in dem andern eine Verteilung der Electricität hervor, welche die gleichmässige Bedeckung ihrer Oberflächen mit Electricität aufhebt. Man darf dann auch nicht die Ladungen als in den Schwerpunkten der Körper concentrirt betrachten. Man muss also diese Verteilung selbst bestimmen, und das kann meist nur durch den feinsten theoretischen Calcul bewerkstelligt werden. Für zwei Kugeln hat Poisson eine solche Berechnung in der ingeniösesten Weise durchgeführt. Später hat dann W. Thomson mit Hilfe seiner Theorie der electrischen Bilder, wie wir in den Artt. 172—175 sehen werden, denselben Fall in beträchtlicher Vereinfachung behandelt.

Eine andere Schwierigkeit bereitet die in die Wände des Gehäuses, welches die Torsionswaage gegen Luftströmungen schützen soll, inducirte Electricität, doch kann man ihren Einfluss rechnerisch bestimmen, wenn man die Innenseite des Gehäuses möglichst regelmässig und aus Metall herstellt.

Ferner ist es nicht möglich die Körper so vollständig zu isoliren, dass sie nicht doch fortwährend Electricität verlören. Coulomb hat sich daher gezwungen gesehen über diese Zerstreuung der Electricität specielle Untersuchungen anzustellen, um mit Hilfe der für ihren Verlauf eruirten Gesetze die nötigen Correctionen ableiten zu können.

Seitdem hat man freilich, namentlich durch W. Thomson, im Isoliren und im Messen electrischer Kräfte beträchtliche Fortschritte gemacht, aber der strenge Nachweis für die Giltigkeit des Coulombschen Kraftgesetzes ist nicht durch directe Messungen und Versuche (die eher zu seiner Demonstration dienen können), sondern durch die mathematische Verfolgung der von uns in dem Experiment VII. angeführten Tatsache geführt worden, derzufolge ein geladener Leiter B gänzlich entladen wird, wenn man ihn erst vollständig in ein Gefäss C versenkt, dann mit der Innenseite des Gefässes berührt und zuletzt ihn herauszieht ohne wieder mit dem Gefässe in Berührung zu kommen. Durch feine Electroskope kann man leicht nachweisen, dass auf B nach der angegebenen Operation keine Spur von Electricität mehr vorhanden ist, wie auch die Aussenseite von C geladen sein mag, und der mathematische Calcul, den ich im Art. 74 dem Leser vorzuführen gedenke, zeigt, dass das nur dann stattfinden kann, wenn die Kraft im umgekehrten Verhältnis zum Quadrat der Entfernung steht, und dass nach jedem andern Kraftgesetz B eine gewisse Electricitätsmenge würde behalten müssen.

Das electrische Feld.

44. Man bezeichnet den Raum in der Umgebung eines electrisirten Körpers, insofern sich in demselben die electrischen Phänomene abspielen, als *Electrisches Feld.* Es ist dabei gleichgiltig, ob der Körper sich in der

Digitized by Google

Luft oder in irgend einem anderen Medium befindet, oder ob er in ein sogenanntes Vacuum, das heisst in einen Raum, aus dem wir mit den uns zu Gebote stehenden Mitteln alles Körperliche entfernt haben, gebracht ist. Befindet sich ein electrisirter Körper in irgend einem Teile des electrischen Feldes, so wird er von einer Kraft angegriffen, deren Grösse im Allgemeinen von seiner Gestalt und von seiner Ladung abhängt, der Körper bringt seinerseits eine Störung in der Electrisirung der andern Körper des electrischen Feldes hervor. Ist er so klein und seine Ladung so unbedeutend, dass er die Electrisirung anderer Körper nicht fühlbar zu alteriren vermag, so braucht man seine Anwesenheit nur insofern zu berücksichtigen als sein Schwerpunkt, einen Punkt des electrischen Feldes darstellt.

Die den Körper angreifende Kraft ist dann proportional seiner Ladung und wirkt im entgegengesetzten Sinne, wenn das Zeichen seiner Ladung ins entgegengesetzte verwandelt wird.

Sei also e die Ladung des Körpers und F die auf ihn in bestimmter Entfernung wirkende Kraft. So lange der Körper sehr klein ist, haben wir

$$F = Re,$$

wobei R nur von der Configuration und Lage der übrigen im electrischen Felde befindlichen Körper abhängt. Kann man dem kleinen Körper ohne das electrische Feld zu stören eine Einheit von Electricität mitteilen, so wird $F = R$. Wir nennen deshalb R die *Resultirende Electrische Kraftintensität* in dem betrachteten Punkte des electrischen Feldes.

Electromotorische Kraft und electrisches Potential.

45. Führen wir den betrachteten kleinen Körper von einem Punkte A des electrischen Feldes zu einem andern Punkte B, so greift ihn in jeder seiner aufeinanderfolgenden Lagen eine Kraft Re an, die insofern variirt, als R von Punkt zu Punkt der Bahn des Körpers seinen Wert ändert. Bezeichnen wir die gesammte Arbeit, welche geleistet werden muss, um unsern Körper von A bis B zu bringen, durch Ee, so heisst E die gesammte *Electromotorische Kraft* längs der Bahn AB. Läuft die Bahn AB in sich zurück, ohne dass die gesammte electromotorische Kraft längs derselben verschwindet, so kann die Electricität nicht im Gleichgewicht sein, sondern sie befindet sich in Strömung. Die Electrostatik beschäftigt sich also nur mit solchen Zuständen des electrischen Feldes, wo die gesammte electromotorische Kraft längs jeder geschlossenen Bahn gleich Null ist. Bricht man eine geschlossene Bahn in einem solchen Felde in zwei Teile, so hat die electromotorische Kraft für beide Teile denselben Betrag. Da man nun jeden Teil für sich beliebig transformiren kann, so folgt hieraus:

Die gesammte electromotorische Kraft zwischen zwei Punkten eines im Gleichgewicht befindlichen electrischen Feldes ist unabhängig von der Bahn, auf der man von dem einen zu dem andern Punkt übergeht.

Digitized by Google

Bezieht man die Lage aller Punkte auf die eines einzigen Punktes B, so heisst die electromotorische Kraft von A zu B das *Potential* in A. Gewöhnlich rückt man B in die Unendlichkeit. Kann man also einen Körper, ohne die schon oft genannten Bedingungen zu verletzen, mit einer Electricitätseinheit laden, so giebt das Potential in einem Punkte des electrischen Feldes direct die Arbeit, die man verwenden muss, um denselben von diesem Punkte bis in die Unendlichkeit zu führen.

Ein Körper mit einer positiven Ladung hat das Bestreben von Orten grössern positiven Potentials zu solchen kleinern positiven oder grössern negativen Potentials überzugehen. Ein negativ geladener sucht sich in der entgegengesetzten Richtung zu bewegen.

Es ergiebt sich hieraus die wichtige Folgerung, dass in einem Conductor nur dann electrisches Gleichgewicht herrschen kann, wenn das Potential in allen seinen Punkten einen und denselben Wert hat. Denn da in einem Conductor die Electricität sich vollkommen frei bewegen kann, so wird beispielsweise positive Electricität so lange sich von Orten grössern Potentials zu solchen kleinern Potentials bewegen, als noch Differenzen zwischen den Potentialwerten der einzelnen Punkte des Conductors vorhanden sind. Das Potential in den Punkten des Conductors nach Eintritt des Gleichgewichts heisst das *Potentialniveau* des Conductors oder kürzer das *Potential* des Conductors.

Aequipotentielle Flächen oder Electrische Niveauflächen.

46. Der Name bezeichnet schon, dass man unter einer *Aequipotentiellen Fläche* oder *Niveaufläche* des electrischen Feldes eine Fläche versteht, in deren allen Punkten das Potential einen und denselben Wert hat.

Ein Punkt, den man auf einer aequipotentiellen Fläche zu bleiben zwingt, hat, weil das Potential auf der ganzen Fläche von derselben Grösse ist, kein Bestreben von einem Punkte der Fläche auf derselben zu einem andern ihrer Punkte überzugehen.

Aequipotentielle Flächen sind also Gleichgewichtsflächen, und verdanken dieser Eigenschaft die Bezeichnung als Niveauflächen.

Dagegen wirkt normal zu einer solchen Fläche die ganze electrische Kraft. Die Grösse dieser resultirenden Kraft bestimmt sich dadurch, dass die Arbeit bei Ueberführung einer Electricitätseinheit von der äquipotentiellen Fläche V zu der V' gleich $V - V'$ sein muss.

Zwei Niveauflächen verschiedenen Potentials können sich niemals schneiden, weil in einem Punkt nur ein Potential existiren kann. Dagegen kann eine Niveaufläche sich selbst beliebig oft schneiden. Die Schnittlinien sind dann *Gleichgewichtslinien*.

Aus dem frühern Satze über das Gleichgewicht der Electricität in einem Conductor folgt, dass die Oberfläche eines Leiters notwendig eine Niveaufläche

Digitized by Google

sein muss. Ist dabei die Electrisirung positiv, so nimmt das Potential mit wachsender Entfernung von dem Conductor ab. Der Conductor wird daher von Niveauflächen umgeben, deren Potentiale niedriger sind als sein Potential. Wenn aber in Folge der Anwesenheit anderer electrisirter Körper der Conductor auf einem Teile positive, auf einem andern negative Electricität besitzt, so besteht die vollständige äquipotentielle Fläche aus der Oberfläche des Conductors und aus einem System anderer Flächen, die den Conductor in den Linien schneiden, welche die positiv geladenen Gebiete von den negativ electrisirten trennen. Solche Linien sind also Gleichgewichtslinien, und ein Punkt, der sich auf einer solchen befindet, wird nach keiner Richtung hingezogen.

Damit aber ein Conductor in einigen Teilen entgegengesetzt geladen sein kann als in andern, muss mindestens ein electrisirter Körper in seiner Nähe und ausserhalb seiner Oberfläche sich befinden. Denn wenn wir einen positiv geladenen Punkt von einem positiv electrisirten Teile der Oberfläche des Conductors aus stets in Richtung der auf ihn wirkenden Kraft sich bewegen lassen, so wird das Potential auf ihn so lange continuirlich abnehmen, bis er entweder eine negativ geladene Fläche, welche ein kleineres Potential besitzt als der Conductor, trifft, oder bis er sich unendlich weit entfernt hat. Da aber in der Unendlichkeit das Potential gleich Null ist, so kann der letztere Fall nur dann eintreten, wenn der ganze Conductor positiv geladen ist.

Ebenso muss ein negativ electrisirter Punkt, von einem negativ geladenen Teile des Conductors ausgehend, entweder einen andern positiv geladenen Körper erreichen, oder bis in die Unendlichkeit wandern, wo das Potential wiederum verschwindet, und die letztere Alternative ist nur möglich, wenn der ganze Conductor negativ electrisirt ist.

Hieraus aber ergiebt sich die Richtigkeit der obigen Behauptung, dass wenn ein Körper positiv und negativ geladen sein soll, notwendig ausser ihm noch ein anderer electrischer Körper vorhanden sein muss, dessen Potential numerisch grösser, aber von demselben Zeichen wie das des Conductors ist. Befindet sich ein Conductor allein in einem Felde, so ist die Electrisirung in jedem Teile von demselben Zeichen wie das Potential des Conductors.

Die Innenfläche eines hohlen leitenden Gefässes, innerhalb dessen sich keine electrischen Körper befinden, ist stets vollständig frei von Electricität. Wäre nämlich ein Teil der Innenfläche positiv geladen, so müsste ein von ihm ausgehender in Richtung der Kraft sich bewegender positiv geladener Punkt irgendwo einen negativ geladenen Teil der Innenfläche von geringerem Potential treffen. Die Innenfläche besitzt aber als einem Conductor angehörig überall dasselbe Potential, sie kann also keine geladenen Teile haben.

Bringt man einen Conductor in ein leitendes Gefäss und setzt ihn mit diesem in Verbindung, so kann seine Oberfläche als zur Innenfläche des

Digitized by Google

Gefässes gehörig angesehen werden. Der Conductor wird also durch das Gefäss vollständig gegen alle von Aussen kommenden electrisirenden Einflüsse geschützt, und bleibt stets ungeladen.

Kraftlinien.

47. Die Bahn eines Punktes, der sich in Richtung der auf ihn wirkenden Kraft fortbewegt, heisst *Kraftlinie*. Aus der Definition der Niveauflächen folgt, dass die Kraftlinien die äquipotentiellen Flächen rechtwinklig schneiden. Die Conception der Kraftlinien als Hilfsmittel zur Bestimmung der Grösse und Richtung der Kraft in einem electrischen Felde rührt von Faraday her, der mit ihrer Hilfe vielen der von ihm für die electrische Action entdeckten Gesetzen präcisen Ausdruck verliehen hat. Wir werden daher in der Folge ihre Eigenschaften eingehend zu entwickeln haben.

Electrische Spannung.

48. Da die Oberfläche eines Conductors eine Niveaufläche sein muss, so wirkt die resultirende Kraft in jedem Punkte normal zu derselben. Sie ist ausserdem, wie wir später, Art. 78, sehen werden, proportional der Dichte der Electricität an der betreffenden Stelle. Infolge dessen hat die Electricität eines Oberflächenelements das Bestreben, sich mit einer Kraft proportional dem Producte der resultirenden electrischen Kraft und der Dichte der Electricität, also proportional dem Quadrate der Dichte von dem Conductor fortzubewegen. Dieses nach Aussen gerichtete Streben muss notwendig eine Spannung der Electricität auf dem Conductor bewirken und heisst darum auch die *Electrische Spannung*.

Man hat freilich das Wort Spannung oft in anderer und vielfach in sehr vager Bedeutung gebraucht, so auch namentlich zur Bezeichnung des Potentials. Ein Ueberblick über die Fälle, in denen es benutzt worden ist, lehrt aber, wie ich glaube, dass man darunter, entsprechend seiner gewöhnlichen Bedeutung nach Analogieen aus der Mechanik besser eine forttreibende Kraft versteht, die dem Druck so und so vieler Kilogramm pro Quadratmeter der Oberfläche des Conductors entspricht. Nach Faraday soll diese electrische Spannung nicht blos an der Oberfläche des Conductors wirken, sondern überall im electrischen Felde, und wir werden finden, dass sie in dieser Conception uns zu einer Theorie führt, welche die electrischen Phänomene aus Zwangzuständen in dem Zwischenmedium erklärt.

Electromotorische Kraft zwischen zwei Conductoren.

49. Verbindet man zwei Conductoren verschiedenen Potentials durch einen dünnen Leitungsdraht, so hat die Electricität das Bestreben, diesen entlang mit einer Kraft zu fliessen, die durch die Potentialdifferenz der

Digitized by Google

beiden Conductoren gemessen wird. Die Potentialdifferenz zweier Conductoren heisst deshalb die zwischen ihnen wirkende *Electromotorische Kraft*. In der Theorie der statischen Electricität werden wir es nur mit dieser durch die Potentialdifferenz definirten electromotorischen Kraft zu thun haben; es giebt aber Fälle, die wir später bei Betrachtung der electrischen Störungen durch chemische Wirkungen, Bewegungen von Magneten und durch Temperaturungleichheiten untersuchen werden, in denen die electromotorische Kraft nicht als eine Potentialdifferenz ausgedrückt werden kann.

Capacität eines Conductors.

50. Isolirt man einen Conductor und hält die Potentiale aller andern noch etwa vorhandenen electrischen Körper durch leitende Verbindung derselben mit der Erde auf Null, so heisst das Verhältnis der Ladung des Conductors zu dem Potential, das er unter diesen Umständen hat, seine *Capacität*. Schliesst man einen Conductor in einen andern vollständig ein ohne diesen irgendwo zu berühren, dann ist die Ladung des eingeschlossenen Conductors gleich und entgegengesetzt der der innern Fläche des einschliessenden. Ihre Grösse ist durch das Product aus der Capacität des eingeschlossenen Conductors in die Potentialdifferenz gegen den einschliessenden Conductor gegeben.

Accumulatoren und Condensatoren.

Man bezeichnet ein System von zwei Conductoren, deren gegenüberstehende Flächen durch eine dünne Lage eines isolirenden Mediums getrennt sind, als einen electrischen *Accumulator*. Die beiden Conductoren des Accumulators heissen *Electroden*, und das isolirende Zwischenmedium nennt man das *Dielectricum*.

So ist eine Leydener Flasche ein Accumulator, in welchem Glas als isolirendes Medium zwei Conductoren aus Metallfolie trennt. Man nennt übrigens die Accumulatoren oft auch *Condensatoren*, doch soll diese Bezeichnung für diejenigen Apparate reservirt werden, die nicht sowohl zur Aufbewahrung von Electricität, als vielmehr zu ihrer Verdichtung bestimmt sind. Die Capacität eines Accumulators ist direct proportional der Grösse der beiden sich gegenüberstehenden Conductorflächen und steht im umgekehrten Verhältnis zur Dicke der isolirenden Schicht.

Widerstand der Körper gegen den Durchgang von Electricität.

51. Teilt man irgend einem Teile einer Metallmasse eine Ladung positiver Electricität mit, so geht dieselbe mit grosser Rapidität von Stellen höhern zu solchen niederern Potentials so lange über, bis das Potential in

Digitized by Google

der ganzen Masse einen und denselben Wert hat. Die Geschwindigkeit, mit der diese Verteilung Platz greift, ist in Metallstücken, wie man sie in den gewöhnlichen electrischen Experimenten benutzt, so gross, dass sie sich jeder Beobachtung entzieht. Aber in den langen, dünnen Drähten, die in der Telegraphie gebraucht werden, wird das Potential erst nach einer messbaren Zeit constant, weil der Draht dem Durchgange der Electricität einen gewissen *Widerstand* entgegensetzt.

Die Tabellen, die ich bei der Behandlung der electrischen Ströme in den Art. 362, 366 und 369 anführen werde, zeigen, dass die Widerstände der einzelnen Substanzen sehr verschieden sind.

Alle Metalle sind gute Leiter, doch ist der Widerstand von Blei zwölfmal, der des Eisens sechsmal und der des Quecksilbers sechzigmal so gross, als der von Kupfer oder Silber. Der Widerstand der Metalle wächst mit steigender Temperatur.

Das krystallinische Selen kann ebenfalls noch als Leiter angesehen werden, obgleich sein Widerstand $3{,}7 \times 10^{12}$ mal so gross als der eines entsprechend grossen Kupferstückes ist. Auch sein Widerstand wächst mit der Temperatur. Das amorphe Selen aber ist ebenso wie der Schwefel ein guter Isolator.

Von den Flüssigkeiten gestatten einige der Electricität den Durchgang durch *Electrolyse,* eine Art der Leitung, die wir im zweiten Teile dieses Werkes betrachten werden. Einstweilen können wir alle wasserhaltigen Flüssigkeiten und alle dampfförmigen Körper als Leiter, wenn auch als sehr viel schlechtere Leiter wie die Metalle, deshalb ansehen, weil sie die Electricität nicht einmal während der zu ihrer Messung nötigen Zeit zu isoliren vermögen.

Im Gegensatz zu dem, was wir bei den Metallen gefunden haben, nimmt der Widerstand dieser als *Electrolyte* oder *Leiter zweiter Klasse* bezeichneten Körper mit steigender Temperatur ab.

Andererseits sind Gase sowohl im trocknen als feuchten Zustand bei gewöhnlichem Atmosphärendruck für kleine Ladungen so nahe vollkommene Isolatoren, dass man bis jetzt durch sie noch keinen Durchgang der Electricität durch Leitung hat bemerken können. Die continuirliche Abnahme der Ladung eines electrisirten Körpers wird wol in allen Fällen der mangelhaften Isolirung seiner Träger zur Last gelegt werden müssen, indem die Electricität entweder durch diese hindurch oder längs ihrer Oberfläche sich verliert. Als Beweis dafür kann die Tatsache gelten, dass zwei geladene, nebeneinander hängende Körper ihre Electricitäten besser bewahren, wenn sie entgegengesetzt, als wenn sie gleichnamig electrisirt sind. Denn wenn die Leitung der Luft den Verlust an Electricität verursachen würde, müsste gerade bei entgegengesetzter Ladung die Zerstreuung grösser sein, weil in diesem Falle die electromotorische Kraft, welche die Electricitäten durch die Luft treibt, grösser ist als im andern. Für den Durchgang der Electricität durch die Träger ist dagegen der electromotorische Antrieb bei gleichnamiger

Digitized by Google

Ladung grösser als bei ungleichnamiger, und demgemäss ist auch der Verlust bei gleichnamiger Ladung grösser als bei ungleichnamiger, wie das auch die Erfahrung bestätigt.

Durch Gase geht die Electricität im allgemeinen durch disruptive Entladung, die nicht eher beginnt, als bis die electromotorische Kraft eine gewisse Stärke erreicht hat, hindurch. Man bezeichnet den Maximalbetrag der electromotorischen Kraft, die in einem Dielectricum noch wirken kann, ohne dass eine Entladung vor sich geht, als die *Electrische Stärke* des Dielectricums. Die electrische Stärke der Luft nimmt bei einer Druckverringerung zunächst ab, bis der Druck auf 3 mm Quecksilber gesunken ist. Wird aber der Druck noch weiter reducirt, so nimmt sie schnell wieder zu. Bei der jetzt in der Druckverringerung erreichbaren Grenze bedarf man zur Hervorbringung eines 6 mm langen Funkens eine noch grössere electromotorische Kraft, wie unter gewöhnlichem Druck zu der eines 200 mm langen. Ein Vacuum, das heisst ein Raum, aus dem alles entfernt ist, was wir überhaupt nur mit unsern Mitteln zu entfernen vermögen, ist also ein Isolator von grosser electrischer Stärke.

Wasserstoff hat eine bedeutend geringere Stärke als Luft.

Einige Glassorten sind bei niedriger Temperatur wunderbar gute Isolatoren, so dass W. Thomson in hermetisch verschlossenen Glaskolben Electricität Jahre hindurch aufbewahren konnte. Aber schon bei Temperaturen unter 100° C. werden dieselben Glassorten zu Leitern.

Guttapercha, Kautschuk, Hartgummi, Paraffin sind ebenso wie die Harze gute Isolatoren; beispielsweise ist der Widerstand des Guttapercha bei 24° C. etwa 6×10^{19} mal so gross, wie der des Kupfers.

Eis, Krystalle und starre Electrolyte sind ebenfalls Isolatoren.

Einige Flüssigkeiten wie Naphta, Terpentin und einige Oele sind Isolatoren, wenn auch weniger gute als die angeführten festen Körper.

Dielectrische Medien.

Specifische inductive Capacität.

52. Faraday nannte diejenigen Isolatoren, in denen durch eine electromotorische Kraft die Electricität nicht unmittelbar derartig verteilt wird, dass das Potential überall denselben Wert erhält, *Dielectrica*.

Aus neuerdings veröffentlichten Untersuchungen erhellt, dass Cavendish schon vor 1773 die Capacität von Glas-, Harz-, Wachs- und Schellakplatten maass und mit der Capacität entsprechend grosser Luftplatten verglich.

Ohne von diesen frühen Bestimmungen etwas zu wissen, entdeckte dann Faraday, dass die Capacität eines Accumulators nicht blos von der Form und Lage seiner Electroden, sondern auch von der speciellen Natur des trennenden Zwischenmediums abhängt. Substituirte er in einem Accumulator

Digitized by Google

ohne die sonstige Anordnung zu ändern, für die Luft als isolirendes Medium andere Gase, so fand sich die Capacität seines Accumulators nicht merklich alterirt, brachte er aber Schellak, Schwefel oder Glas an Stelle der Luft, so wuchs die Capacität je nach der Zwischensubstanz in verschiedenem Maase an.

Faraday bezeichnete darum das Verhältnis der Capacität eines Accumulators für ein bestimmtes Dielectricum als Zwischensubstanz zu der Capacität desselben Accumulators, wenn Luft das Zwischenmedium bildete, als die *Specifische Inductive Capacität* des Dielectricums. Jetzt heisst dieses Verhältnis meist die *Dielectricitätsconstante* des Dielectricums.

Die Constante hängt nicht blos von der Natur des Mediums, sondern auch von seinem Zustande ab. So fand Boltzmann durch delicate Messungsmethoden, dass sie bei Gasen mit Aenderung des Druckes variirt. Ist das Dielectricum kein guter Isolator, so ist es schwer, seine specifische inductive Capacität zu bestimmen, weil die Electricität während der Messung sich durch dasselbe hindurch verbreitet. Doch ist es wahrscheinlich, dass die specifische Capacität nicht auf Isolatoren beschränkt ist, sondern überhaupt für alle Körper ihre Bedeutung hat.

Absorption der Electricität.

53. Wird ein Accumulator einige Zeit, nachdem er electrisirt worden ist, plötzlich entladen und isolirt, so zeigt er sich bald wieder in demselben Sinne wie zuerst, aber schwächer geladen. Man kann ihn mehrmals entladen, erhält aber stetig abnehmende Electricitätsmengen. Man bezeichnet die ganze nach der ersten Entladung noch zum Vorschein kommende Electricität als *Electrisches Residuum*.

Jede der entladenen Electricitätsmengen scheint der bei der Entladung auf dem Accumulator herrschenden Potentialdifferenz proportional zu sein, und das Verhältnis der jeweiligen Entladung zur entsprechenden Potentialdifferenz giebt die wahre Capacität des Accumulators. Derartige Bestimmungen der Capacität eines Accumulators durch Messung der entladenen Electricitätsmenge und der gerade herrschenden Potentialdifferenz führen aber nur dann zu einem richtigen Wert, wenn die Entladung augenblicklich geschieht, denn wenn man die Dauer des Contactes des Entladers gegen den Accumulator verlängert, so birgt dieser auch einen Teil des electrischen Residuums und die berechnete Capacität fällt zu gross aus.

Ein geladener und isolirt aufgestellter Accumulator scheint seine Electricität durch Leitung zu verlieren, und wie die Erfahrung lehrt, ist der Verlust zu Anfang verhältnismässig weit grösser als zuletzt. Man würde demnach die Leitungsfähigkeit des Accumulators zu hoch schätzen, wenn man sie aus den ersten Verlusten berechnen wollte, und das ist der Grund, warum bei einem submarinen Kabel die Isolirung sich mit der Dauer der Electrisirung zu vervollkommnen scheint.

Digitized by Google

Leitet man Wärme durch einen Körper, dadurch dass man zwei Stellen desselben auf verschiedene Temperaturen erhält, so treten Phänomene auf, die man auf den ersten Blick für ganz analog den geschilderten electrischen Erscheinungen halten möchte. Bei der Wärme hängen sie aber von der vom Körper selbst aufgenommenen und abgegebenen Wärme ab. Man hat darum geglaubt, dass die Körper die Fähigkeit besitzen auch Electricität zu absorbiren und zu emittiren. Ich werde aber in Art. 329 zeigen, dass diese Hypothese einer Absorption der Electricität durch materielle Teilchen zur Erklärung des Residuums nicht nöthig ist, dass schon die Annahme einer gewissen Heterogeneität in der Structur der Dielectrica dazu genügt.

Man kann übrigens leicht nachweisen, dass die sogenannte electrische Absorption nicht in einer wirklichen Absorption von Electricität besteht. Ladet man nämlich die betreffende Substanz, während sie von einem Metallgefäss vollständig eingeschlossen ist, entladet dann das Gefäss und lässt es isolirt, so erhält es keine Spur von der allmälig sich zerstreuenden Electricität des in ihm befindlichen electrisirten Körpers.

54. Faraday*) drückte diese Tatsache durch den Satz aus, dass es nicht möglich sei einem Körper eine absolute unabhängige Ladung einer Electricitätsart mitzuteilen.

In der Tat scheint jedes Experiment zu lehren, dass die Electrisirung der Aussenfläche eines Gefässes ganz unabhängig von den electrischen Actionen ist, die zwischen und in den von ihm eingeschlossenen electrischen Körpern etwa vorgehen.

Könnte man nun Electricität einer Art zwingen, in einem Körper absorbirt, das heisst latent zu werden, ohne doch mit einer gleichen Menge der entgegengesetzten Art mittelbar oder unmittelbar verbunden zu sein, oder könnte man eine Electricitätsmenge allmählich aus ihrem latenten Zustande wieder ans Tageslicht kommen lassen, so müsste offenbar dadurch die Electrisirung des umgebenden Gefässes Abänderungen erleiden.

Da nun solche niemals beobachtet worden sind, so schloss Faraday, dass es nicht möglich ist einer Substanz eine absolute Ladung mitzuteilen, und dass kein Körper durch eine Aenderung seines Zustandes latente Electricität zu entwickeln oder vorhandene Electricität zu verbergen im Stande ist.

Demgemäss betrachtete er die Induction oder Influenz „als die essentielle Grundlage sowol bei der Erregung von Electricität als auch bei den darauf folgenden eigentlichen electrischen Erscheinungen“. Unter „Induction“ versteht er aber (1298) einen gewissen Zustand von Polarität in den Partikeln des Dielectricums, der zufolge jedes Teilchen an der einen Seite eine positive und an der andern Seite eine dieser an Grösse stets gleiche negative Electricitätsmenge beherbergen sollte.

*) *Exp. Res.* I. Serie 11.

Digitized by Google

Disruptive Entladung.*)

55. Lässt man die electromotorische Kraft an einer Stelle eines Dielectricums allmählich anwachsen, so erreicht man schliesslich eine Grenze für dieselbe, bei der die Electricität sich plötzlich durch das Dielectricum hindurch in Begleitung von Schall- und Lichterscheinungen entladet. Gleichzeitig wird das Dielectricum vorübergehend oder ganz zerrissen.

Der Grenzwert der electromotorischen Kraft bei einer solchen disruptiven Entladung hängt von der Natur des Dielectricums ab. Er ist zum Beispiel grösser für Glas als für Luft, und bei dieser wächst er mit zunehmender Dichte. Man kann aber stets die electromotorische Kraft so weit anwachsen lassen, dass eine *Disruptive Entladung* Platz greift, das heisst die Isolation des Mediums aufgehoben und plötzlich einem Strome von Electricität der Durchgang gestattet wird. Darin liegt der Grund weshalb in der Natur keine Ladungen vorkommen können, welche unendlich grosse Kräfte verursachen.

Die electrische Lichthülle, Convective Entladung.

Bei einem Conductor, der in eine Spitze ausläuft, würde die Annahme, dass ein isolirter Körper stets seine Electricität behält, dazu führen, dass die Dichte der Electricität ohne Ende anwüchse, je mehr man sich der Spitze nähert, und in der Spitze selbst unendlich gross würde. Die Kraft würde also dort auch unendlich gross gefunden werden, und factisch müsste das der Fall sein, wenn die isolirende Kraft der umgebenden Luft unendlich gross wäre. Die Erfahrung lehrt aber, dass der Widerstand der Luft, wenn die Electricität eine gewisse Dichte erreicht hat, zu weichen beginnt, so dass die Luft leitend wird. Sie spielt dann in Umgebung der Spitze die Rolle eines Conductors. Weil aber in genügender Entfernung von der Spitze die electrische Kraft nicht hinreicht um die Isolation aufzuheben, so findet der electrische Strom bald sein Ende und die Electricität sammelt sich in der Luft in der Nähe der Spitze an. Die Spitze ist also von Luftschichten umgeben, die mit ihr gleichsinnig electrisirt, und so gegen die enorme electromotorische Kraft geschützt sind, die sie angreifen würde, wenn die Spitze allein Trägerin der gesammten Electricität sein müsste. Tatsächlich hat also der Conductor gar keine Spitze mehr, denn man muss die Oberfläche der umgebenden electrisirten Luft als Conductoroberfläche ansehen. Könnte man nun die Luft in Ruhe erhalten, so würde der electrisirte Körper, wenn wir zu ihm auch die die Spitze umgebende Luft rechnen, seine Ladung bewahren. Da sich aber die Luftteilchen frei bewegen können, so folgen sie den zwischen ihnen wirkenden Abstossungskräften und suchen sich in Richtung der Kraftlinien

*) Faraday, *Exp. Res.* Vol. I. Seite 12 und 13.

Digitized by Google

so lange fortzubewegen bis sie unter den umgebenden Körpern die ihnen entgegengesetzt geladenen erreichen. An ihre Stelle kommen dann andere noch ungeladene Luftpartikel in die Nähe der Spitze, und da diese die der Spitze nächsten Teilchen nicht gegen die excessive electrische Spannung schützen können, so findet eine abermalige Entladung statt, nach welcher sich die neugeladenen Partikel entfernen und andern Teilchen Platz machen. So geht es fort, so lange der Conductor überhaupt Electricität besitzt. Es treten also folgende charakteristische Erscheinungen auf:

An der Spitze und in ihrer Nähe zeigt sich eine Lichthülle, die der continuirlichen Entladung der Spitze gegen die umgebende Luft ihre Entstehung verdankt.

Da ferner die Luftteilchen im Allgemeinen nach derselben Richtung sich fortbewegen, so geht von der Spitze ein Luftstrom aus, der die electrisirten Luftteilchen und wahrscheinlich auch nichtelectrisirte mit sich fortführt. Erleichtert man künstlich die Bildung eines solchen Luftstromes, so erstreckt sich die Lichtentwickelung über weitere Strecken. Das entgegengesetzte tritt ein, wenn man seine Bildung erschwert.*)

Der so in der Nähe der Spitze entstehende *Electrische Wind* ist oft sehr heftig. Seine Geschwindigkeit verlangsamt sich aber schon in geringer Entfernung beträchtlich, so dass die electrisirten Luftteilchen nur noch von den zu jeder Zeit vorhandenen gewöhnlichen Luftströmungen fortgeführt werden, und so eine unsichtbare electrische Wolke bilden. Kommen dann die Teilchen in die Nähe einer leitenden Fläche, etwa in die Nähe einer Wand, so induciren sie in diese eine ihrer eigenen Electricität entgegengesetzte Ladung, und werden dann oft an die Wand durch die auftretende electromotorische Kraft herangezogen und entladen. Meist ist aber diese electromotorische Kraft zu gering, und dann bleiben die Luftteilchen lange Zeit in der Nähe der Wand oder anderer Leiter mit ihrer vollen Ladung und bilden eine electrische Atmosphäre um dieselben, deren Existenz sich oft durch das Electroskop verrät.

Die Kraft, welche zwischen geladenen Luftmassen und anderen Körpern wirkt, ist sehr unbedeutend im Vergleich zu der Kraft, mit der Winde durch Dichtigkeitsungleichheiten in der Atmosphäre, veranlasst durch Temperaturdifferenzen, erzeugt werden. Man wird also kaum annehmen können, dass auch nur ein geringer Teil der Bewegung, die man bei gewöhnlichen Gewitterwolken beobachten kann, electrischen Ursachen ihre Entstehung verdankt.

Geschieht der Uebergang der Electricität durch die Bewegung der mit ihr geladenen Teilchen, so bezeichnet man sie als *Electrische Convection* oder als *Convective Entladung.*

Die electrische Lichthülle verdankt also ihre Entstehung dem fortwährenden Durchgang von Electricität durch eine dünne Luftschicht, in der

*) Priestley, *History of Electricity* pp. 117, 591; Cavendish, *Electrical Researches* Phil. Trans. 1771, § 4; *Reprint of Cavendish* Art. 125.

Digitized by Google

die Spannung so gross ist, dass sie auch die umgebenden Luftteilchen ladet; letztere werden dann durch den electrischen Wind, der einen essentiellen Teil des ganzen Phänomens ausmacht, fortgeführt. Die Lichthülle bildet sich leichter in verdünnter als in verdichteter Luft und auch leichter, wenn die Spitze positiv, als wenn sie negativ geladen ist. Die letzte Bemerkung gilt namentlich für diejenigen, welche die Unterschiede zwischen den Electricitätsarten studiren, um so irgend etwas, was ihnen die Natur der Electricität enthüllen könnte, zu entdecken.

Das electrische Büschellicht.

56. Stumpft man die Spitze eines Conductors ab oder ersetzt sie durch eine kleine Kugel, so nimmt zwar die electrische Spannung mit wachsender Entfernung von derselben ab, aber in weit geringerem Maasse als es bei einer vollständigen Spitze der Fall ist. Die Ausgleichung der Tension geschieht dann durch aufeinanderfolgende Entladungen, die sich in der Luft verzweigen und dadurch enden, dass sie entweder Teile der Luft electrisiren oder auf einen Conductor treffen. Die Erscheinung ist von einem Geräusch begleitet, dessen Höhe von dem Zeitintervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Entladungen abhängt. Ein continuirlicher Luftstrom, wie wir ihn in Begleitung der Entladung durch die electrische Lichthülle gefunden haben, tritt hier nicht auf.

Der electrische Funke.

57. Wenn die Spannung zwischen zwei Conductoren überall sehr bedeutend ist, wie bei zwei geladenen Kugeln, deren gegenseitige Entfernung im Verhältnis zu ihren Radien nicht zu gross ist, so geschieht die Entladung gewöhnlich durch einen von einem Conductor zu dem andern überspringenden *Funken*, der meist die gesammte Electricität mit sich nimmt.

Giebt dabei ein Teil des Dielectricums der Spannung nach, so werden die anliegenden Partikel in Richtung der electrischen Kraft einer stärkern Spannung unterworfen und dadurch gezwungen ebenfalls nachzugeben, so dass die Ladung durch das Dielectricum dringen kann. Den Weg, den der Funke einschlägt, können wir uns durch ein Beispiel versinnbildlichen. Reisst man nämlich ein Blatt Papier an einer Kante ein und zieht die beiden Enden dieser Kante auseinander, so geht der Riss in dem Blatte weiter und zwar stets über die Stellen weg, welche am nachgiebigsten sind. Ganz ebenso beginnt die Entladung da, wo die Spannung zuerst die Isolirung überwindet, und setzt sich in einer unregelmässigen Bahn über die Stellen fort, die ihr den geringsten Widerstand bieten. Der Funke wird also namentlich die Luftteile durchdringen, welche Wasserdämpfe enthalten.

Digitized by Google

W. Thomson hat die electromotorische Kraft, welche nötig ist, um einen Funken durch verschieden dicke Luftschichten durchzutreiben, mit Hilfe eines Electrometers bestimmt.*)

Er liess die Funken zwischen zwei Flächen überspringen, deren eine ganz eben war, während die andere nur in so weit convex gekrümmt wurde, dass der Funke stets von derselben Stelle auszugehen gezwungen war.

Er fand so, dass die electromotorische Kraft beim Ueberspringen des Funkens mit Vergrösserung des Abstandes der beiden Flächen zwar wuchs, aber weniger schnell zunahm wie die Entfernung. Die electrische Kraft an einer Stelle zwischen den Conductoren, in diesem Falle das Verhältnis der Potentialdifferenz beider Flächen zu der Entfernung der Platten, kann also bei einer dünnen Luftschicht verhältnismässig grösser werden als bei einer dicken, ehe eine Entladung eintritt.

Für eine sehr dünne Schicht von 0,0 0254 cm ergab sich die Kraft bei der Bildung des Funkens, cm und gr als Einheiten für die Länge und das Gewicht benutzt, gleich 527,7, das heisst, die electrische Spannung betrug 11,29 gr für das qcm.

War der Abstand der beiden Platten etwa 1 mm, so betrug die electrische Kraft 130 und die Spannung 0,68 gr auf das qcm.

Wahrscheinlich ist die Spannung bei noch grösseren Entfernungen nicht viel kleiner als die zuletzt genannte. Zur Vergleichung der genannten Kräfte mit andern geläufigeren führe ich an, dass die Luft mit einem Gewicht von 1032 gr auf dem qcm lastet.

Es ist schwer zu verstehen, weshalb bei einer dünnen Luftschicht zur Bildung eines Funkens eine grössere Tension erforderlich ist als bei einer dicken.

Man kann vielleicht annehmen, dass die Luft an den Oberflächen der Conductoren sich verdichtet und so besser isolirt, sind dann die beiden Conductoren sehr nahe, so stossen die condensirten Luftstrata an einander. Es ist aber auch möglich, dass überhaupt das Potential eines geladenen Conductors nicht mit dem der ihn berührenden Luftschicht übereinstimmt, sondern sich von ihm um eine Grösse unterscheidet, die gerade vor der Entladung ihren maximalen Betrag erreicht. Die beobachtete Potentialdifferenz der beiden Conductoren würde darnach grösser sein als die zwischen den beiden Seiten der Luftschicht herrschende, und zwar um so viel grösser, wie wenn die Dicke der Schicht um etwa 0,127 mm vermehrt würde. Wir kommen im Artikel 370 darauf noch einmal zurück.

Alle diese Erscheinungen fallen für die verschiedenen Gase sehr verschieden aus und variiren selbst für ein und dasselbe Gas mit der Dichtigkeit desselben. Gewisse Entladungen durch verdünnte Gase bieten sehr bemerkenswerte Phänomene dar. Lässt man, zum Beispiel, die Electricität durch eine Röhre, welche nur sehr wenig Gas enthält, längs der Axe der-

*) Proc. R. S. 1860 oder *Reprint of Papers on Electricity and Magnetism*, chap. XIX.

Digitized by Google

selben sich entladen, so sieht man leuchtende Schichten mit dunklen quer gegen die Röhre gerichteten in fast gleichen Abständen abwechseln. So wie der Strom anwächst, ensteht eine neue Schicht und die alten Schichten rücken näher aneinander. In einer Röhre, wie sie von Gassiot*) beschrieben worden ist, ist das Licht der Schichten nach der Seite des positiven Pols rötlich, nach der des negativen bläulich und in der Mitte glänzend rot.

Solche und ähnliche Phänomene, welche man bei der electrischen Entladung bemerken kann, sind von der grössten Wichtigkeit, da sie uns mit der Zeit zu einer wirklichen Einsicht in die Natur, nicht allein der Electricität, sondern auch der Gase und des den ganzen Raum ausfüllenden Zwischenmediums führen können. Einstweilen ist es aber noch nicht möglich sie in das Bereich der mathematischen Theorie der Electricität einzuverleiben.

Pyroelectricität.

58. Gewisse Krystallformen des Turmalins und anderer Mineralien zeigen Erscheinungen, die man passend als electrische Polarität bezeichnen könnte. Erwärmt man nämlich einen Turmalinkrystall, der sich in gleichförmiger Temperatur befunden hat und anscheinend keine Spur von Electricität zeigte, so wird ein Ende desselben positiv, das andere negativ electrisch. Setzt man die Erwärmung fort, nachdem die entstandene Electricität in irgend einer Weise (etwa dadurch dass man mit dem Krystall durch eine Flamme fährt) entfernt ist, so entsteht von neuem eine electrische Spannung derselben Art wie zuvor zwischen beiden Enden. Lässt man dagegen den Krystall sich abkühlen, so kehrt sich die Polarität um, das früher positiv geladene Ende wird nunmehr negativ electrisch und das früher negative wird positiv.

Die charakteristischen Enden liegen in der krystallographischen Axe. Sind die Krystalle, wie das oft vorkommt, dadurch ausgezeichnet, dass das eine Ende durch eine sechsseitige, das andere durch eine dreiseitige Pyramide gebildet wird, so zeigt sich bei einer Erwärmung die erstere positiv electrisch, die zweite negativ.

Nach W. Thomson hat jeder Teil dieser und ähnlicher hemiedrischer Krystalle eine bestimmte von der Temperatur abhängige Polarität. Führt man den Krystall durch eine Flamme, so wird seine Oberfläche in allen Punkten so stark electrisirt, dass die Wirkung seiner innern Teile nach aussen gerade aufgehoben wird. Der Krystall übt dann keine electrische Wirkung aus und hat auch kein Bestreben seinen electrischen Zustand zu ändern. Erwärmt man ihn dagegen oder kühlt ihn langsam ab, so ändert sich die electrische Erregung seiner inneren Teilchen, so dass sie nicht mehr durch die Ladung an der Oberfläche neutralisirt werden kann. Der Krystall beginnt dann nach aussen zu wirken.

*) Intellectual Observer, 1866 März.

Digitized by Google

Plan und Anlage dieses Buches.

59. Ich werde in dem ferneren Verlaufe dieses Werkes zunächst die gewöhnliche Theorie der electrischen Wirkung auseinandersetzen, bei der man keine Rücksicht auf das Medium zwischen den electrisirten Körpern nimmt, sondern alle Erscheinungen als nur abhängig von den Ladungen und der gegenseitigen Lage der betreffenden Körper ansieht. Dadurch werden wir das Gesetz des umgekehrten Quadrats der Entfernungen, die Theorie des Potentials und die Gleichungen von Laplace und Poisson abzuleiten im Stande sein. Weiterhin werden wir dann die Ladungen und Potentiale in einem System electrisirter Körper durch Gleichungen mit einander verbinden, deren Coefficienten wir da, wo die Theorie zu ihrer Bestimmung nicht ausreicht, durch die Erfahrung eruiren müssen. Aus ihnen werden sich die zwischen electrisirten Körpern wirkenden mechanischen Kräfte berechnen lassen. Nächstdem sollen gewisse allgemeine Theoreme untersucht werden, durch welche Green, Gauss und Thomson die Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit des Problems der Verteilung der Electricität fixirt haben. Eine Folge dieser Theoreme ist zum Beispiel, dass wenn irgend eine Function die Poissonsche Gleichung erfüllt und an der Oberfläche eines jeden der Conductoren mit dem Potential dieses Conductors zusammenfällt, dass sie dann allgemein das Potential des Systems in jedem Punkte des electrischen Feldes darstellt. Bei der grossen Schwierigkeit, welche die Lösung von vorgelegten Problemen meist bietet, werden wir umgekehrt auch eine Methode angeben, wie man Probleme finden kann, die einer exacten Lösung fähig sind.

Das Thomsonsche Theorem drückt die gesammte Energie eines Systems einmal durch ein Integral über den ganzen von den electrisirten Körpern ausgeschlossenen Raum, und dann auch durch ein anderes Integral, das sich auf die Oberflächen der electrisirten Körper bezieht, aus. Die Tatsache, dass eine und dieselbe Grösse durch ein Raumintegral ebenso wie durch ein Flächenintegral sich ausdrücken lässt, kann physikalisch in folgender Weise interpretirt werden. Man kann nämlich die Wirkung, die zwei Körper auf einander ausüben, entweder als das Resultat eines gewissen Zustandes des sie trennenden Mediums oder aber auch als eine directe *actio in distans* auffassen. Geht man von der letzteren Auffassungsweise aus, so kann man wohl zu einem Ausdrucke für das Wirkungsgesetz zwischen den beiden Körpern gelangen, aber jede weitere Speculation über den Vorgang bei der Einwirkung des einen Körpers auf den andern ist ausgeschlossen. Die zweite Auffassungsweise dagegen zwingt uns geradezu den Process, der bei der Action zweier Körper aufeinander in jedem Teile des Mediums sich abspielt, zu verfolgen.

Jenes Theorem lehrt auch, dass wenn wir die verschiedenen Teile des Dielectricums als Sitz der electrischen Energie betrachten, die Grösse dieser Energie in einem kleinen Teilchen des Dielectricums von dem Producte des

Digitized by Google

Quadrats der Intensität der electromotorischen Kraft an der Stelle des betrachteten Teilchens in einen Coefficienten, den wir als die specifische inductive Capacität bezeichnet haben, abhängt.

Es ist aber besser, bei einer Theorie der Dielectrica, die von möglichst allgemeinen Gesichtspunkten ausgeht, zwischen der electromotorischen Kraft und der electrischen Polarisation der Teilchen des Dielectricums zu unterscheiden, denn wenn auch diese beiden Vectorgrössen nicht unabhängig von einander sind, so wirken sie doch in manchen Substanzen nicht in derselben Richtung. Bei flüssigen Dielectricis fallen beide Grössen freilich vollständig zusammen. Im allgemeinsten Fall ist die electrische Energie in der Volumeneinheit eines Mediums gleich dem halben Product der electromotorischen Kraft in die electrische Polarisation multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den die Wirkungsrichtungen dieser beiden Grössen einschliessen.

Die nach dieser Annahme berechnete gesammte Energie des Mediums ist dann gleich der Energie der Electrisirung der Conductoren, wie man sie unter der Annahme der Wirkung in die Ferne findet. Beide Annahmen führen also zu demselben Endresultat.

Eine nähere Untersuchung ergiebt, dass wenn die Wirkung zweier electrisirter Körper aufeinander unter Vermittelung des sie trennenden Zwischenmediums vor sich gehen soll, dieses sich in einem Zustande eines gewissen mechanischen Zwanges befinden muss, ähnlich wie ein Seil gespannt wird, wenn ein Körper auf einen andern mittelst desselben einen Zug ausübt, und wie eine Stange comprimirt wird, welche zwei Körper, die sonst zusammenfallen würden, auseinander hält.

Der Zwangzustand des Mediums zwischen electrisirten Körpern besteht also nach Faraday*) entsprechend den angeführten Beispielen in einer Spannung in Richtung der Kraftlinien und einem ihr gleichen Druck in allen zu den Kraftlinien senkrechten Richtungen. Die Grösse der Spannung sowohl wie die des Druckes ist proportional der electrischen Energie, das heisst proportional dem Quadrate der resultirenden electromotorischen Kraft und der specifischen inductiven Capacität des Dielectricums.

Nur ein Zwang der eben geschilderten Art kann die Einwirkungen electrisirter Körper auf einander und das trotzdem ungestörte Gleichgewicht des umgebenden flüssigen Mediums erklären.

Ich habe daher geglaubt, dass es für den Fortschritt der Wissenschaft wünschenswert sein dürfte, die Existenz eines solchen Zwangzustandes in dem Medium wirklich anzunehmen und zuzusehen, zu welchen Consequenzen man dadurch gelangt. Da ich aber fand, dass das Wort „electrische Spannung“ vielfach in ganz vager Bedeutung gebraucht wird, so habe ich versucht es so zu interpretiren, wie es wohl manche, die es benutzen, auch verstehen, nämlich als einen Zustand eines gewissen Zwanges in dem dielectrischen Medium, der die electrisirten Körper sich zu bewegen zwingt

*) *Exp. Res.*, Serie 11. 1297.

Digitized by Google

und zuletzt bei starker Vergrösserung eine disruptive Entladung hervorbringt. So verstanden ist die electrische Spannung ganz von derselben Art und auch so zu messen wie die Spannung eines Seils, und man darf bei einem dielectrischen Medium, das eine gewisse Tension, und nicht mehr, zu ertragen vermag, auch in ganz demselben Sinne wie bei einem Seil von einer gewissen Festigkeit desselben sprechen. So kann zum Beispiel, wie Thomson gefunden hat, die Luft unter gewöhnlichen Verhältnissen eine electrische Tension von 0,67 gr auf das qcm ertragen, ehe eine Funkenentladung eintritt.

60. Aus der Annahme, dass die Wirkung zweier electrisirter Körper auf einander nicht als eine *actio in distans* anzusehen ist, sondern durch Vermittelung des Zwischenmediums vor sich geht, folgte, dass das Dielectricum sich in einem gezwungenen Zustand befinden muss. Wir haben auch gesehen, dass der Zwang unter Zugrundelegung der geläufigen Vorstellungen von den elastischen Kräften in festen Körpern in einer Spannung längs den Kraftlinien und einem Druck in allen zu diesen senkrechten Richtungen besteht. Spannung und Druck sind sich numerisch gleich, und jedes ist proportional dem Quadrate der resultirenden Kraft in dem betrachteten Punkte des Mediums. Damit können wir dann einen Schritt weiter gehen und eine Vorstellung von der Natur der electrischen Polarisation des Mediums zu gewinnen suchen.

Wir erklären ein Körperelement für polarisirt, wenn es an zwei entgegengesetzten Enden der Quantität nach gleiche, der Qualität nach aber entgegengesetzte Eigenschaften zeigt. Permanente Magnete bieten uns ein gutes Mittel zur Versinnbildlichung der Polarität eines ganzen Körpers, sowie auch, wie wir in der Lehre vom Magnetismus sehen werden, zu der von Polarität innerer Teilchen.

Die *Dielectrische Polarisation* entsteht durch den Zwang, den die electromotorische Kraft ausübt, und verschwindet, wenn diese Kraft zu wirken aufhört. Wir können sie als eine durch die electromotorische Kraft hervorgerufene *Verschiebung* der Electricitäten der Teilchen des Dielectricums ansehen. Wirkt nämlich die electromotorische Kraft in einem Leiter, so versetzt sie die Electricität in Strömung. In einem Nichtleiter, in einem Dielectricum ist sie aber nicht im Stande, der Electricität eine solche strömende Bewegung zu erteilen, sie verschiebt nur die Electricitäten der einzelnen Teilchen in Richtung ihrer Wirkung in dem Maasse, wie es eben ihre Stärke mit sich bringt und verschiebt um so weniger, je geringer ihre Intensität ist.

Die Grösse der electrischen Verschiebung wird aber durch die Electricitätsmenge gemessen, welche durch eine Flächeneinheit vom Beginn der Verschiebung an hindurchgeht, und diese Menge ist auch das Maass für die dielectrische Polarisation.

Diese Vorstellung, dass eine electromotorische Kraft eine electrische Verschiebung hervorzubringen vermag, findet ihr Analogon in der Tatsache,

Digitized by Google

dass eine mechanische Kraft eine elastische Verschiebung verursachen kann, und die Aehnlichkeit zwischen diesen Wirkungsweisen electromotorischer und mechanischer Kräfte ist so augenscheinlich, dass ich es gewagt habe, das Verhältnis der electromotorischen Kraft zu der ihr entsprechenden electrischen Verschiebung als den Coefficienten der electrischen Elasticität oder als den *Electrischen Elasticitätscoefficienten* zu bezeichnen. Dieses Verhältnis ist übrigens verschieden für die verschiedenen Medien, und es steht in umgekehrter Proportion zu der specifischen inductiven Capacität der Dielectrica.

Die Aenderung einer electrischen Verschiebung äussert sich in einem electrischen Strome, der so lange besteht, als die Aenderung fortdauert. Da aber die electrische Verschiebung schliesslich eine disruptive Entladung verursacht, so kann dieser Strom nicht wie Ströme in Leitern beliebig in derselben Richtung fortgesetzt werden. Wahrscheinlich befinden sich der Turmalin und die andern pyroelectrischen Krystalle stets, auch wenn keine fremde electromotorische Kraft gegen sie thätig ist, in einem von ihrer Temperatur abhängigen polarisirten Zustand. Ist aber ein Körper in einem Zustande permanenter Polarisation, so wird seine Aussenseite allmählich so weit geladen, dass die Wirkung der in seinem Innern befindlichen Electricität auf ausserhalb seiner Oberfläche existirende Körper neutralisirt ist. Die Electricität auf der Aussenseite des Krystalls spielt dann fast die Rolle von gebundener Electricität, so dass sie weder bemerkt noch auch durch die gewöhnlichen Mittel, d. h. ohne Zustandsänderungen, entfernt werden kann. Deshalb ist es auch nicht möglich, die innere Polarisation in dem Krystall eher zu entdecken, als bis aussergewöhnliche Mittel, wie Temperaturänderungen, sie vergrössern oder verkleinern, da dann die Oberflächenelectricität nicht mehr im Stande ist, ihre Wirkung auf äussere Körper aufzuheben. Der Körper erscheint dann wie der Turmalin in gewisser Weise electrisirt.

Verteilt man eine Electricitätsmenge e gleichmässig über eine Kugel, so ist die Kraft in einem Punkte des die Kugel umgebenden Mediums gleich dem Verhältnis der Ladung e zu dem Quadrate des Abstandes des betrachteten Punktes von dem Centrum der Kugel. Diese resultirende Kraft bewirkt also nach unserer Theorie eine electrische Verschiebung in dem Medium, die von der Kugel fortgerichtet ist. Denken wir uns concentrisch zu dieser Kugel eine andere Kugelfläche vom Radius r gelegt, so ist die Verschiebung E durch diese Oberfläche proportional der resultirenden Kraft und dem Inhalte der Fläche. Beachtet man aber, was über die Grösse der resultirenden Kraft gesagt ist, so sieht man, dass die gesammte electrische Verschiebung E durch die fragliche Kugelfläche proportional der Ladung e, also ganz unabhängig von dem Radius der Kugelfläche, ist.

Das Verhältnis zwischen den beiden Electricitätsmengen e und E, zwischen der Ladung der leitenden Kugel und der Verschiebung durch irgend eine dieser concentrische Kugelfläche des umgebenden Mediums, können wir dadurch bestimmen, dass wir die Arbeit berechnen, welche in

Digitized by Google

dem Medium zwischen zwei concentrischen Kugelflächen geleistet wird, während sich E um δE ändert. Sind aber V_1, V_2 die Potentiale der innern bezüglich äussern Kugelfläche, so ist die electromotorische Kraft, welche die hinzukommende Verschiebung δE verursacht, gleich $V_1 - V_2$ und demnach die bei dieser Verschiebung geleistete Arbeit gleich $(V_1 - V_2)\delta E$. Lassen wir die innere Fläche mit der electrisirten Kugel zusammenfallen und nehmen den Radius der äussern unendlich gross, so wird V_1 gleich dem Potential V der Kugel selbst und V_2 verschwindet, so dass in dem Medium die gesammte Arbeit $V\delta E$ geleistet wird. Aendert man die Ladung e und δe, so ist die dazu nötige Arbeit $V\delta e$, und wenn diese Arbeit, wie wir voraussetzen, ganz zur Vermehrung der electrischen Verschiebung verwendet wird, so folgt, dass $\delta E = \delta e$ sein muss. E und e verschwinden aber gleichzeitig, also ergiebt sich $E = e$, d. h.:

Die nach Aussen gerichtete electrische Verschiebung durch eine Kugelfläche mit einer gleichmässig electrisirten Kugel, welche denselben Mittelpunkt hat, ist gleich der Ladung dieser Kugel.

Um uns eine klare Vorstellung von dem, was wir electrische Verschiebung genannt haben, zu verschaffen, wählen wir noch ein anderes Beispiel.

Wir stellen einen Accumulator aus zwei Platten A und B, die durch eine dielectrische Schicht C getrennt sind, her, verbinden sie mit einem Draht W und lassen durch den Draht vermittelst einer electromotorischen Kraft eine positive Electricitätsmenge Q von B nach A überströmen. Die so entstehende positive Erregung der Platte A bringt mit der negativen Erregung der Platte B eine electromotorische Kraft hervor, welche die dielectrische Schicht in der Richtung von A nach B angreift und in ihr eine electrische Verschiebung von A nach B bewirkt. Der Betrag der electrischen Verschiebung, gemessen durch die Electricitätsmenge, welche durch einen Parallelschnitt der dielectrischen Schicht hindurchgeht, ist dann (Artt. 75, 76, 111) genau gleich der Electricitätsmenge Q.

Es scheint also, dass während die electromotorische Kraft eine Electricitätsmenge durch den Draht hindurch von B nach A transportirt, gleichzeitig eine dieser gleiche Electricitätsmenge Q durch alle Parallelschnitte des Dielectricums sich von A nach B verschiebt.

Wird der Accumulator wieder entladen, so bewegt sich die Electricität entgegengesetzt wie bei der Ladung, durch den Draht geht eine Electricitätsmenge von A nach B, durch das Dielectricum eine ihr gleiche Verschiebung von B nach A, und der Zwang in dem Dielectricum hört mit der Entladung auf. Jede Ladung und Entladung repräsentirt also einen geschlossenen Stromkreis, dessen Querschnitte zu derselben Zeit von gleichen Electricitätsmengen durchflossen werden.

Bei dem Voltaischen Stromkreise hat man schon längst eine solche Bewegung der Electricität angenommen, unsere obigen Betrachtungen zeigen

Digitized by Google

aber, dass sie auch da stattfindet, wo man bisher nur von Aufhäufung von Electricitätsmengen an bestimmten Stellen gesprochen hat.

61. Das führt uns zu der sehr bemerkenswerten Consequenz der auseinandergesetzten Theorie, dass nämlich die Electricität sich wie eine incompressible Flüssigkeit bewegt, also ihre Gesammtmenge innerhalb einer geschlossenen Fläche stets dieselbe bleibt. Diese Behauptung scheint schon durch die Tatsache widerlegt zu werden, dass man einen Conductor laden und in den geschlossenen Raum bringen kann, wodurch der Inhalt dieses Raumes an Electricität geändert werden würde. Verfolgen wir aber die Erscheinung der Electrisirung nicht nur in soweit als die Oberflächen der Leiter und Dielectrica dabei geladen werden, sondern ziehen wir auch die gleichzeitig in dem Dielectricum auftretende Verschiebung in Betracht, so zeigt sich jener Widerspruch als nur scheinbar. Ist nämlich der Conductor mit positiver Electricität geladen, und erstreckt sich das dielectrische Medium nach allen Richtungen jenseits der geschlossenen Fläche, so tritt eine electrische Polarisation ein, in Folge deren eine electrische Verschiebung von innen nach aussen durch die geschlossene Fläche vor sich geht. Das Flächenintegral der Verschiebung durch die ganze Fläche ist dann gleich der Ladung des Conductors in derselben. Sobald also der Conductor in einen abgeschlossenen Raum versenkt wird, tritt durch die Verschiebung eine der Ladung des Conductors gleiche Quantität von Electricität durch die Fläche aus dem Raum heraus, und der Inhalt des Raumes an Electricität wird wieder so gross, wie er vor Einführung des geladenen Conductors war.

Im fünften Capitel wird die Theorie der electrischen Polarisation weitläufig auseinandergesetzt werden und in Art. 334 werde ich sie auch durch mechanische Operationen zu illustriren suchen. Ihre hohe Wichtigkeit wird aber erst bei der Untersuchung der electromagnetischen Phänomene ins volle Licht treten können.

62. Fassen wir die Hauptannahmen der eben auseinandergesetzten Theorie noch einmal zusammen, so ergeben sich die folgenden Grundanschauungen.

Der Sitz der Energie einer electrischen Erregung befindet sich in dem Dielectricum, gleichgiltig ob dasselbe fest, flüssig oder gasförmig, dicht oder dünn ist. Es braucht auch nicht aus der gewöhnlichen groben Materie zu bestehen, wenn es nur überhaupt eine electrische Action vermitteln kann.

Die Energie in irgend einem Teile des Mediums ist in Form eines Zwanges aufgespeichert, den wir als eine dielectrische Polarisation bezeichnen, deren Betrag von der Grösse der resultirenden electromotorischen Kraft in jenem Teile abhängt.

Die Wirkung der electromotorischen Kraft auf ein dielectrisches Medium äussert sich in einer — wie wir es genannt haben — electrischen Verschiebung. Die allgemeinste Beziehung zwischen der Kraft und der Verschiebung kann erst in der Theorie der Leitung untersucht werden, doch geht in den wichtigsten Fällen die Verschiebung in Richtung der wirkenden Kraft vor

Digitized by Google

sich und ist numerisch der Kraftintensität multiplicirt mit $K/4\pi$ gleich, wo K die specifische inductive Capacität des betreffenden Dielectricums angiebt.

Die Energie in der Volumeneinheit des Dielectricums, welche von der dielectrischen Polarisation herrührt, ist gleich dem halben Producte der electromotorischen Kraft und der electrischen Verschiebung multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den die Richtungen beider einschliessen.

Bei flüssigen Dielectricis ist die Polarisation von einer Spannung in Richtung der Kraftlinien und einem dieser Spannung gleichen Drucke senkrecht zu den Kraftlinien begleitet. Die Grösse der Spannung bezüglich des Druckes auf die Flächeneinheit ist an jeder Stelle numerisch gleich der dort in der Volumeinheit aufgespeicherten Energie.

Zerteilen wir das Dielectricum in kleine Elemente, so haben wir uns die Oberfläche jedes derselben als geladen vorzustellen. Die Flächendichte der Electricität in irgend einem Punkte einer solchen Oberfläche ist dann an Grösse gleich der an diesem Punkte nach Innen stattgehabten electrischen Verschiebung. Findet also eine Verschiebung der Electricität in positiver Richtung statt, so ist das Element auf der positiven Seite negativ, auf der negativen positiv geladen. Natürlich heben sich die Wirkungen dieser Electricitäten der einzelnen Elemente im Innern des Dielectricums auf. An der Oberfläche dagegen und an den Stellen in dem Innern, die an sich schon eine Ladung besitzen, treten sie zu Tage.

Die electrische Verschiebung besteht in einer Bewegung der Electricität von derselben Art wie der Transport der Electricität durch Leitung, was wir auch sonst unter Electricität und Bewegung der Electricität verstehen mögen. Der einzige Unterschied zwischen electrischer Verschiebung in einem Dielectricum und electrischer Strömung in einem Leiter besteht darin, dass jene gegen einen Widerstand zu kämpfen hat, welcher sich mit dem Widerstande vergleichen lässt, den elastische Körper Verschiebungen ihrer Teilchen entgegensetzen, so dass die Electricität sich sofort zurückbewegt, so wie die electromotorische Kraft zu wirken aufgehört hat, bei dieser dagegen giebt die electrische Elasticität fortdauernd nach, und die Electricität wird tatsächlich von Ort zu Ort fortgeleitet. In der Tat hängt auch bei einem electrischen Strome der Widerstand nicht von der gesammten aus dem Gleichgewicht gebrachten Electricität ab, sondern nur von der Menge, welche einen Querschnitt des Leiters in bestimmter Zeit passirt.

In jedem Falle aber folgt die Bewegung der Electricität demselben Gesetze wie die einer incompressibeln Flüssigkeit, vermöge dessen in einem abgeschlossenen Raum genau soviel Electricität eintreten muss als aus ihm herausfliesst.

Ein electrischer Strom läuft also stets in sich zurück, und das ist, wie wir sehen werden, für die Theorie des Electromagnetismus von der grössten Bedeutung.

Da, wie wir bemerkt haben, die Hypothese einer Wirkung in die Ferne zu ganz denselben Resultaten führt wie die Annahme einer Wirkung durch

Digitized by Google

Vermittelung eines Mediums, so kann man natürlich die electrischen Phänomene, so weit sie nicht noch andere Hypothesen erfordern, durch die eine der genannten Theorieen so gut wie durch die andere verfolgen. So hat denn auch Mossotti die mathematische Theorie der Dielectrica dadurch aus der gewöhnlichen Attractionstheorie abgeleitet, dass er in der Poissonschen Deduction der magnetischen Induction aus der Theorie der magnetischen Fluida den einzelnen Symbolen statt ihrer magnetischen eine electrische Bedeutung beilegte. Infolge dessen nahm er an, dass jedes Dielectricum aus kleinen leitenden Teilchen bestehe, die durch Induction an entgegengesetzten Enden entgegengesetzt electrisirt werden können, die aber Electricität weder aufnehmen noch abzugeben vermögen, weil sie von einander vollständig durch irgend ein anderes nicht leitendes Mittel getrennt sind.

Diese Hypothese über die Constitution der Dielectrica harmonirt mit den Gesetzen der electrischen Wirkung, und es kann wol auch sein, dass sie der Wirklichkeit entspricht. Nach ihr kann die specifische inductive Capacität eines Dielectricums wol grösser, nicht aber kleiner als die der Luft oder die eines Vacuums sein. Bis jetzt weiss man auch noch keine Substanz, deren specifische inductive Capacität kleiner wäre als die der Luft, fände sich aber doch noch eine solche, so müsste Mossotti's Theorie aufgegeben werden. Seine Formeln würden sich aber nur darin ändern, dass ein in ihnen vertretener Coefficient ein anderes Zeichen bekäme.

Es kommt in der Physik oft genug vor, dass Gleichungen von derselben Form zur Beschreibung so verschiedenartiger Phänomene, wie es etwa die electrische Induction durch Dielectrica, die Leitung durch Conductoren und die magnetische Induction sind, verwendet werden können. In allen solchen Fällen wird also die Beziehung zwischen der Kraft und dem von ihr hervorgebrachten Effect durch eine Reihe von Gleichungen derselben Art fixirt.

Ist demnach ein Problem für eine Erscheinungsklasse gelöst, so hat man das Resultat nur in dem Sinne der andern zu interpretiren, um sofort die Lösung eines entsprechenden Problems dieser andern Klasse von Erscheinungen zu erhalten.

Digitized by Google

Cap. II.

Elementare mathematische Theorie der statischen Electricität.

—x—

Mathematische Definition der Electricitätsmenge.

63. Wir haben gesehen, dass man einen Körper stets so laden kann, dass seine Electrisirung der eines oder mehrerer anderer Körper gleich wird.

Ferner haben wir gezeigt, dass zwei gleich und entgegengesetzt electrisirte Körper, wenn man sie in ein leitendes Gefäss bringt, gar keine Wirkung auf ausserhalb befindliche Körper ausüben. Für diese und noch andere Tatsachen gewinnen wir einen präcisen Ausdruck, wenn wir einen electrischen Körper als einen mit einer gewissen „Quantität e Electricität geladenen Körper" beschreiben. Ist die Electrisirung positiv, besteht sie also nach der allgemein angenommenen Festsetzung aus Glaselectricität, so ist e positiv zu nehmen; fällt sie mit der des Harzes zusammen, so ist e negativ zu rechnen. $-e$ ist also entweder eine negative Quantität positiver Electricität oder eine positive Quantität negativer Electricität.

Addirt man zwei gleiche und entgegengesetzte Ladungen $+e$ und $-e$, so ist die resultirende Ladung gleich Null, der Körper also garnicht electrisirt. Jeder unelectrische Körper kann demnach als mit gleichen und jeder electrisirte als mit ungleichen Mengen der entgegengesetzten Electricitätsarten geladen angesehen werden. Die algebraische Summe der beiden Ladungen bildet dann die beobachtete Electrisirung. Es ist aber klar, dass diese Ansichten über die Constitution der Electricität der Körper zunächst rein künstlich sind, wie man ja auch die Geschwindigkeit eines Körpers als aus mehreren Geschwindigkeiten sich zusammengesetzt denken kann.

Verteilung der Electricität in einem Körper, Raumdichte.

64. Definition. Die *Raumdichte* der Electricität in einem bestimmten Punkte eines von ihr erfüllten Raumes ist gleich dem Grenzwert des Verhältnisses der in einer den Punkt umgebenden stetig abnehmenden kleinen Kugel enthaltenen Electricitätsmenge zu dem Volumen dieser Kugel.

Die so definirte Raumdichte, ρ, kann je nach der Electricitätsart, um die es sich handelt, positiv oder negativ sein.

Digitized by Google

Verteilung auf einer Fläche, Flächendichte.

Theorie sowol wie Experiment haben gelehrt, dass die Electricität sich in vielen Fällen auf die Oberfläche eines Körpers zurückzieht und nur diese ladet. Hier würde also die obige Definition für die Dichte einen unendlich grossen Wert ergeben.

Ich schlage daher zu ihrer Definition einen andern Weg ein.

Definition. Die electrische Dichte in einem Punkte einer electrisirten Fläche, die *Flächendichte* der Electricität, ist gleich dem Grenzwert des Verhältnisses der in einer um den betrachteten Punkt geschlagenen stetig abnehmenden Kugel enthaltenen Electricitätsmenge zu dem Inhalt des von der Kugel ausgeschnittenen Flächenstückes.

Ich bezeichne die Flächendichte durch σ.

Betrachtet man mit manchen Physikern die Electricität als ein materielles Fluidum oder als ein Aggregat von einzelnen Partikeln, so kann man bei einer Verteilung derselben auf einer Fläche nur an eine der Fläche anhaftende electrische Schicht von gewisser Dicke, 0, denken. Die Raumdichte ρ_0 einer solchen Schicht würde dann diejenige Dichte sein, die die Electricität haben müsste, wenn ihre Teilchen so nahe als es überhaupt möglich ist an einander gerückt wären. Demnach ist nach dieser Theorie

$$0\rho_0 = \sigma.$$

Ist σ negativ, so würde das nach der dualistischen Theorie der Electricität bedeuten, dass eine gewisse Schicht von der Dicke 0 in einem Körper keine positive Electricität enthält und lediglich mit negativer gefüllt ist, nach der unitarischen dagegen würde in dieser Schicht überhaupt keine Electricität, sondern nur Materie vorhanden sein.

Bisher spricht aber noch keine Erfahrung weder dafür, dass die electrische Schicht eine gewisse Dicke besitzt, noch dafür, dass die Electricität eine materielle Flüssigkeit oder ein Aggregat von einzelnen Partikeln ist. Deshalb ist es besser die Flächendichte als selbstständige Grösse zu betrachten, statt sie durch die Dicke der Oberflächenschicht und die in ihr herrschende Raumdichte zu definiren.

Verteilung längs einer Linie, Liniendichte.

In manchen Fällen ist es von Vorteil die Electricität sich längs einer Linie, das heisst längs eines Körpers verteilt zu denken, dessen Dicke vernachlässigt werden kann.

Definition. Die Dichte dieser Verteilung in einem Punkte der Linie, die *Liniendichte*, ist dann gleich dem Grenzwerte des Verhältnisses der in einem daselbst befindlichen stetig abnehmenden Linienelement enthaltenen Electricitätsmenge zu der Länge dieses Elementes.

Digitized by Google

Electricitätsmenge.

Ist also λ die Liniendichte, ds ein Element der Linie; σ die Flächendichte, dS ein Element der Fläche; ρ die Raumdichte, $d\tau$ ein Element des Raumes, so haben wir

Electricitätsmenge auf einer Linie $= \int \lambda ds$,
Electricitätsmenge auf einer Fläche $= \iint \sigma dS$,
Electricitätsmenge in einem Körper $= \iiint \rho d\tau$.

Die Integrationsgrenzen werden selbstverständlich durch die Grenzen der Linie, der Fläche bezüglich des Körpers bestimmt.

e, λ, σ, ρ sind verschiedenartige Grössen, und jede folgende ist um eine Raumdimension ärmer als die vorhergehende. e, λl, σl^2, ρl^3 sind also gleichartige Grössen. Bezeichnet man durch $[L]$ die Längeneinheit und durch $[\lambda]$, $[\sigma]$, $[\rho]$ die Einheiten für λ, σ, ρ, so drücken

$$[e],\ [\lambda L],\ [\sigma L^2],\ [\rho L^3]$$

alle eine Einheit der Electricität aus.

Definition der Electricitätseinheit.

65. Definition. Zwei gleich stark positiv geladene im Verhältnis zu ihrem gegenseitigen Abstand unendlich kleine Körper, die in der Einheit der Entfernung sich gegenseitig mit der absoluten Einheit der Kraft angreifen, enthalten je eine *Electricitätseinheit*.

Ist die Ladung der Körper gleichnamig, so ist die Krafteinheit eine Repulsionseinheit, ist sie bei dem einen entgegengesetzt wie bei dem andern, so ist jene Krafteinheit eine Attractionseinheit. Die Krafteinheit soll gemäss der für sie in Art. 6 gegebenen mechanischen Definition bestimmt sein.

Die Wirkung zweier Electricitätsmengen aufeinander wird der Erfahrung nach durch die Anwesenheit anderer Electricitätsmengen nicht weiter afficirt. Demnach ist die Abstossungskraft zwischen zwei gleichnamigen Electricitätsmengen e, e', welche auf zwei sehr kleinen Körpern concentrirt sind, in der Einheit der Entfernung gleich ee'.

Kraftgesetz für electrisirte Körper.

66. Wie wir bereits bemerkt haben, hat Coulomb experimentell gezeigt, dass zwei im Verhältnis zu ihrer Entfernung sehr kleine electrisirte Körper auf einander eine Wirkung ausüben, die im umgekehrten Verhältnis zum Quadrat ihrer Entfernung steht.

Die Abstossungskraft zwischen zwei mit den Electricitätsmengen e, e' gleichnamig geladenen und in der Entfernung r befindlichen sehr kleinen Körpern ist also

$$\frac{ee'}{r^2}$$

Digitized by Google

In Art. 74 werden wir sehen, dass dieses das einzige Gesetz ist, das sich mit der Tatsache, dass ein Conductor in dem Innern eines anderen hohlen und geschlossenen Conductors durch Berührung mit diesem seine ganze Electricität verliert, vereinbaren lässt.

Man darf auch annehmen, dass unsere Ueberzeugung von der Richtigkeit des Coulomb schen Gesetzes weit mehr auf dieser leicht zu verificirenden Tatsache als auf den directen Messungen, die Coulomb für die Wirkung zweier electrisirter Körper aufeinander ausgeführt hat, beruht.

Resultirende Kraft zwischen zwei electrischen Körpern.

67. Für zwei beliebig grosse electrisirte Körper berechnet man die Kraft aus dem Coulomb schen Gesetz nach dem bekannten Verfahren dadurch, dass man jeden der beiden Körper in Elemente zerlegt. Jedes Element des einen Körpers greift dann alle Elemente des andern an, so dass wir ein System von Kräften erhalten, die nach den Regeln der Statik zusammenzusetzen sind.

Bezeichnen also x, y, z die Coordinaten eines Punktes des einen Körpers, ρ die Dichte der Electricität in diesem Punkte, und gelten accentuirte Buchstaben für die entsprechenden Grössen bei dem andern Körper, so haben wir für die Kraftcomponente in Richtung der x Axe das sechsfache Integral

$$X = \iiint\iiint \frac{\rho\rho'(x-x')\,dx\,dy\,dz\,dx'\,dy'\,dz'}{\{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Integrationen sind erst über den einen und dann über den andern Körper auszuführen.

68. Eine wesentliche Erleichterung für die mathematische Behandlung unseres Gegenstandes erlangen wir dadurch, dass wir uns einen der Körper sehr klein denken, ihm dem entsprechend eine kleine Ladung zuschreiben, und den andern in beliebiger Form annehmen. Wir erreichen damit nämlich, dass der kleine Körper wegen seiner geringfügigen Ladung keine merkbaren electrischen Störungen im grossen Körper hervorzubringen vermag.

Ist also e die Ladung des kleinen Körpers, Re die auf ihn im Punkte (x, y, z) wirkende Kraft, und bezeichnen l, m, n die Richtungscosinusse dieser Kraft, so haben wir für die Kraftcomponenten Xe, Ye, Ze in Richtung der drei Coordinatenaxen

1) $$Xe = Rel,\quad Ye = Rem,\quad Ze = Ren.$$

Ich nenne R die resultirende electrische *Kraftintensität**) in dem Punkte (x, y, z). Ihre Componenten X, Y, Z sind

2) $$X = Rl,\quad Y = Rm,\quad Z = Rn.$$

*) Die Intensität der electrischen und magnetischen Kräfte findet ihr Analogon in der Intensität der Schwere, die man gewöhnlich durch g bezeichnet.

Digitized by Google

Wenn ich aber von der resultirenden Kraftintensität in einem Punkte spreche, so sage ich damit nicht, dass in dem fraglichen Punkte wirklich eine solche Kraft ausgeübt wird, sondern ich meine, dass wenn dort ein electrischer Punkt mit der Ladung e vorhanden wäre, derselbe von einer Kraft Re angegriffen werden würde.

Definition. Die resultirende electrische *Kraftintensität* in einem Punkte ist gleich der auf einen mit einer positiven Electricitätseinheit geladenen und ohne Störung des electrischen Feldes in den betreffenden Punkt versetzten kleinen Körper ausgeübten Kraft.

Die Wirkung dieser Kraft besteht darin, dass sie einerseits den Körper fortzubewegen und andererseits seine positive Electricität in ihre eigene, seine negative in eine dazu entgegengesetzte Richtung zu treiben sucht. Wegen der zuletzt genannten Wirkung bezeichnet man die Grösse R auch als die *Electromotorische Intensität* in dem Punkte (x, y, z).

Wollen wir die resultirende Kraftintensität in ihrer Eigenschaft als Vectorgrösse betrachten, so wählen wir für sie als Symbol den deutschen Buchstaben $\mathfrak{E}$.

Bei einem Dielectricum mit der specifischen inductiven Capacität K findet, wie wir wissen, in Richtung der Kraft eine electrische Verschiebung $\mathfrak{D}$ statt. Die durch eine Flächeneinheit senkrecht zu $\mathfrak{E}$ in Richtung von $\mathfrak{E}$ verschobene Electricitätsmenge ist gegeben durch

$$3) \qquad \mathfrak{D} = \frac{1}{4\pi} K \mathfrak{E}.$$

Ist dagegen der Körper ein Leiter, so entsteht, weil der Widerstand fortwährend gerade überwunden wird, ein Strom von geleiteter Electricität, der so lange anhält als die Kraft $\mathfrak{E}$ wirkt.

Das Linienintegral der electrischen Kraftintensität.

69. Die electromotorische Kraftintensität, den Bogen einer Curve AP entlang, misst die Arbeit, welche die electrische Kraft leistet, wenn sie eine Einheit positiver Electricität von dem Anfange A des Bogens bis zu seinem Ende P fortbewegt.

Bezeichnet s die Länge des betreffenden Bogens von A ab gezählt, R die electrische Kraftintensität und ε den Winkel, den R mit der Tangente der Curve bildet, so ist diese Arbeit während der Verschiebung der Electricitätseinheit auf dem Bogenelemente ds gleich

$$R \cos\varepsilon \, ds,$$

somit die gesammte electromotorische Kraftintensität

$$1a) \qquad E = \int_0^s R \cos\varepsilon \, ds.$$

Digitized by Google

Nach Einführung der Componenten für die Kraftintensität wird daraus

1b) $$E = \int_0^s \left(X\frac{dx}{ds} + Y\frac{dy}{ds} + Z\frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Sind X, Y, Z so beschaffen, dass $Xdx + Ydy + Zdz$ das vollständige Differential einer Function $-V$ von x, y, z ist, so erhalten wir

2) $$E = \int_0^s (Xdx + Ydy + Zdz) = -\int_0^s dV = V_A - V_P.$$

Wie man dabei von dem Punkte A zu dem P gelangt, ist gleichgiltig, da das Endresultat lediglich von den beiden Werten des V in den beiden Endpunkten der Curve abhängt.

V ist in diesem Falle eine scalare Function der Lage des Punktes (x, y, z) im Raume also vollständig bestimmt sobald die Coordinaten des Punktes gegeben sind, wie auch sonst die Axen des benutzten Coordinatensystems im Raume gerichtet sein mögen. Art. 16.

Da wir im Folgenden sehr viel mit solchen Functionen, wie die eben benutzte zu tun haben werden, so fügen wir gleich hinzu, dass unter einer Function der Lage eines Punktes eine solche Function verstanden werden soll, die allein durch die Coordinaten des Punktes völlig bestimmt ist. Es ist dabei keineswegs nötig, dass die Function für alle Punkte des Raumes durch denselben Ausdruck dargestellt wird.

In der Tat kommt es oft genug vor, dass eine solche Function auf der einen Seite einer Fläche eine ganz andere Form hat als auf der andern.

Potentialfunction.

70. Die Bedingung, dass $Xdx + Ydy + Zdz$ ein vollständiges Differential ist, wird stets dann erfüllt, wenn die Kraft, deren Componenten X, Y, Z sind, Attractionen oder Repulsionen ihre Entstehung verdankt, die nur von den Entfernungen des betrachteten Punktes von gewissen andern Punkten abhängen.

Ist nämlich r_1 der Abstand unseres Punktes (x, y, z) von einem der letztgenannten Punkte und R_1 die Abstossungskraft, so haben wir

$$X_1 = R_1 \frac{x - x_1}{r_1} = R_1 \frac{\partial r_1}{\partial x}, \quad Y_1 = R_1 \frac{\partial r_1}{\partial y}, \quad Z_1 = R_1 \frac{\partial r_1}{\partial z},$$

mithin

$$X_1 dx + Y_1 dy + Z_1 dz = R_1 dr_1$$

und da R_1 eine Function von r_1 allein sein sollte, so ist $R_1 dr_1$ das vollständige Differential einer Function $-V_1$, von r_1.

Digitized by Google

Aehnliches gilt für eine andere Kraft R_2, die von einem von (x, y, z) um r_2 abstehenden Centrum ausgeht, so dass

$$X_2\,dx + Y_2\,dy + Z_2\,dz = R_2\,dr_2 = -\,dV_2$$

ist, und da die resultirenden Componenten gleich den Summen der entsprechenden Partialcomponenten sind, so hat man

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = -\,dV_1 - dV_2 \ldots = -\,dV.$$

Das Integral

$$-\int(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = +\int dV$$

wird, wenn es in der Unendlichkeit verschwindet, als *Potentialfunction* bezeichnet.

Die Einführung dieser Function hat man Laplace zu verdanken, der sich ihrer bei der Bestimmung der Attraction der Erde bediente. Den Namen „Potentialfunction" hat sie aber von Green erhalten. Gauss bediente sich in seinen unabhängig von Green geführten Untersuchungen der Bezeichnung Potential, die nachmals von Clausius und andern Physikern auf die Arbeit übertragen wurde, welche geleistet wird, wenn zwei oder mehr Körper sich von einander unendlich weit entfernen. Der letzteren Auffassung entspricht die Definition, welche W. Thomson gegeben hat, die wir auch für die Folge adoptiren.

Definition des Potentials. Das electrische Potential in einem Punkte ist gleich der Arbeit, welche von den electrischen Kräften geleistet wird, wenn eine Einheit von Electricität, die diesem Punkte, ohne irgend welche Störungen im electrischen Felde hervorzubringen, mitgeteilt worden ist, mit dem Punkte bis in die Unendlichkeit (oder bis zu einem Punkte, wo das Potential Null ist) entfernt wird, oder, was dasselbe ist, gleich der Arbeit, welche von fremden Kräften geleistet werden muss, wenn eine Electricitätseinheit aus der Unendlichkeit (oder von einem Punkte, wo das Potential Null ist) ohne weitere Störungen des electrischen Feldes bis zu dem betrachteten Punkte gebracht wird.

Darstellung der Kraftintensität und ihrer Componenten durch das Potential.

71. Wir fanden für die electromotorische Kraft E_{AB} entlang einer Curve AB

1) $$E_{AB} = V_A - V_B.$$

Daraus folgt für die Kraftcomponente in Richtung des Curvenelements ∂s der Ausdruck

2) $$R\cos\varepsilon = -\frac{\partial V}{\partial s}.$$

Digitized by Google

Ersetzt man ∂s der Reihe nach durch $\partial x, \partial y, \partial z$, so ergiebt sich

3) $$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

4) $$R = \left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

Potential eines Conductors.

72. Unter Conductor verstehen wir bekanntlich einen Körper, in welchem die Electricität unter dem Einfluss auch der geringsten electromotorischen Kraft sich von einer Stelle zur andern bewegt. Findet also eine solche Bewegung nicht statt, das heisst, ist die Electricität in dem Conductor im Gleichgewicht, so kann auch keine angreifende electromotorische Kraft tätig sein, daher ist in allen Punkten des Conductors $R = 0$. Wir haben also zufolge der Gleichung 4) des vorigen Art.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \text{ oder}$$

$$V = \text{Const.} = C.$$

In einem Conductor hat demnach das Potential in allen Punkten einen und denselben Wert.

Die Grösse C heisst, weil sie eben für alle Punkte des Conductors das Potential darstellt, das Potential oder das *Potentialniveau* des Conductors, und sie ist gleich der Arbeit, welche von äussern Kräften geleistet wird, wenn man eine Electricitätseinheit aus der Unendlichkeit auf den Conductor versetzt, ohne daselbst die electrische Verteilung irgendwie zu verändern.

Es kann übrigens vorkommen, dass die Electricität in einem Conductor in Gleichgewicht ist, ohne dass das Potential in allen Punkten des Conductors einen und denselben Wert hat. Der Conductor muss dann aber stets aus mindestens zwei verschiedenen oder auch aus zwei gleichartigen, aber verschieden temperirten sich berührenden Körpern bestehen. Denn, wie wir in Art. 246 sehen werden, tritt dann stets eine electromotorische Kraft auf, welche durch die Berührungsfläche hindurch wirkt, und unter deren Einfluss die Electricität sich im Gleichgewicht befindet, wenn das Potential des einen Körpers höher als das des andern ist.

Wir nehmen deshalb vorläufig an, dass ein Conductor nur aus einer Substanz besteht und überall dieselbe Temperatur hat.

Verbindet man zwei Conductoren A und B, deren Potentiale durch V_A bezüglich V_B dargestellt werden, durch einen Draht, so wirkt in der Ausdehnung dieses Drahtes eine electromotorische Kraft

$$V_A - V_B$$

in Richtung von A nach B. Es geht dann positive Electricität von dem Conductor mit dem höhern Potential zu dem mit dem niederern über. Das

Digitized by Google

Potential nimmt in der Electricitätslehre physikalisch und analytisch zur Electricität dieselbe Stellung ein, wie der Druck in der Hydrostatik zur Flüssigkeit und die Temperatur in der Wärmelehre zur Wärme.

Electricität, Flüssigkeit und Wärme streben von Orten höhern Potentials, Druckes bezüglich Temperatur zu Orten, wo die genannten Grössen geringere Werte besitzen. Nun ist Flüssigkeit sicher eine materielle Substanz, Wärme aber ebenso sicher keine materielle Substanz, wir erlangen also durch die eben bezeichnete Analogie zwischen Wärme, Flüssigkeit und Electricität weiter nichts als eine Beihülfe bei der Betrachtung der Beziehungen von Electricitätsmengen zu einander. Wir dürfen aber weder aus ihrer Analogie zur Wärme auf eine nicht materielle, noch aus der zur Flüssigkeit auf eine materielle Constitution der Electricität schliessen.

Potential eines electrischen Systems.

73. Es seien x, y, z die Coordinaten eines mit der Electricitätsmenge e geladenen Punktes und r sein Abstand von einem andern Punkte (x', y', z'), dann ist

$$1_1) \qquad V = -\int_r^\infty R\,dr = -\int_r^\infty \frac{e}{r^2}\,dr = \frac{e}{r}$$

Sind allgemeiner (x_1, y_1, z_1), $(x_2, y_2, z_2)\ldots$ die Coordinaten anderer mit den Electricitätsmengen $e_1, e_2\ldots$ geladener Punkte und $r_1, r_2, \ldots$ ihre Entfernungen von dem Punkte (x', y', z'), so haben wir für das Potential des Punktsystems in dem Punkte (x', y', z')

$$1) \qquad V = \Sigma\left(\frac{e}{r}\right).$$

Bildet das Punktsystem einen Körper, in welchem in einem Punkt (x, y, z) die Electricität die Dichte ρ hat, so verwandelt sich die Summe in ein Integral, und wir erhalten für das Potential des Körpers auf den Punkt (x', y', z')

$$2) \qquad V = \iiint \frac{\rho}{r}\,dx\,dy\,dz,$$

wo

$$r = \left\{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ist, und die Integration sich über den ganzen Körper erstreckt.

Ueber den Beweis des Gesetzes vom umgekehrten Verhältnis des Quadrats der Entfernung.

74a. Man kann wol die Tatsache, dass electrisirte Körper auf einander im umgekehrten Verhältnis des Quadrats ihrer Entfernung einwirken, durch

Digitized by Google

die Coulombschen Versuche an der Torsionswaage als genügend gesichert betrachten. Inzwischen hängt der wahrscheinliche Fehler des Resultats solcher Experimente von den wahrscheinlichen Fehlern der einzelnen Versuche ab, und diese können, wenn die Versuche mit der Torsionswaage ausgeführt werden, sehr beträchtlich anwachsen, falls der Experimentator nicht ganz besondere Sorgfalt dem Arrangement und der Ausführung seiner Versuche widmet.

Eine weit genauere Verification des Kraftgesetzes können wir durch einen dem in Art. 32 beschriebenen Experiment VII ähnlichen Versuch erhalten. Cavendish hat schon im vorigen Jahrhundert in einem neuerdings erst veröffentlichten Werke über Electricität die Evidenz des Kraftgesetzes von der Ausführbarkeit eines solchen Versuches abhängig gemacht.

Er befestigte eine vollständige Kugel an einen isolirenden Ständer und zwei Halbkugeln durch Glasstangen an 2 hölzerne Rahmen, die von einem Querbalken herabhingen. Brachte er die beiden Holzrahmen aneinander, so bildeten die Halbkugeln eine mit der vollständigen Kugel concentrische isolirte Kugelschale.

Mit Hilfe eines kurzen Drahtes, an welchem ein seidener Faden geknüpft war, um ihn ohne den Apparat zu entladen, entfernen zu können, stellte er dann eine leitende Verbindung zwischen der Kugel und den beiden Halbkugeln her. Zur Ladung der Halbkugeln diente ihm eine Leydener Flasche, deren Potential er vorher mit einem Electrometer bestimmte. Unmittelbar nach der Electrisirung zog er den Verbindungsdraht an der Seidenschnur fort, entfernte die Halbkugeln und entlud sie. Als er dann mit Hilfe eines Electrometers aus Hollundermarkkügelchen die Vollkugel untersuchte, konnte er auf ihr keine Spur von Electricität entdecken.

Die Empfindlichkeit seines Electrometers, das damals (1773) als das delicateste Electroskop galt, untersuchte er dadurch, dass er der Kugel eine vorher bestimmte Ladung mitteilte und ihre Grösse mit seinem Electrometer nochmals auf der Kugel maass. So fand er, dass die Kugel noch nicht den 60sten Teil der ganzen dem Apparat erteilten Ladung enthalten konnte, ohne durch das Electrometer ihre Electrisirung anzuzeigen.

Er nahm nunmehr ein Wirkungsgesetz an, in welchem der negative Exponent der Entfernung $2+$ einem Bruche betrug, und berechnete damit, dass wenn dieser Bruch auch nur 0,02 wäre, die Kugel eine Ladung von $^1/_{37}$ der Gesammtladung in dem beschriebenen Experiment hätte zeigen müssen, die sich also durch sein Electrometer verraten haben würde.

74b. Dieser fundamentale Versuch ist neuerdings im Cavendish-Laboratorium mit einigen Abänderungen wiederholt worden. Die beiden Halbkugeln wurden an isolirende Ständer angebracht und die Vollkugel mit einem Ebonitring gleich in die ihr zukommende Stellung innerhalb der beiden Kugeln befestigt. Man umging so den isolirenden Ständer für die Halbkugel und hatte keine Störungen von der Electricität zu befürchten, die längs der Fläche des Ständers zur Kugel hinaufkriechen konnte. Nach

Digitized by Google

Erteilung einer Ladung wurden die Halbkugeln nicht aus ihrer Position entfernt, sondern direct zur Erde entladen. Nun zeigte sich zwar die Einwirkung einer der Kugel selbst gegebenen Ladung auf das Electrometer kleiner, wenn die Kugel von den Halbkugeln eingeschlossen war, als wenn sie ganz frei dastand, allein dieser Nachteil wurde mehr als aufgewogen durch den vollständigen Schutz, den die Halbkugeln der Vollkugel gegen äussere electrische Einflüsse gewährten.

Die aus den Halbkugeln gebildete Schale besass an einer Stelle eine Durchbohrung, welche durch einen kleinen Deckel geschlossen werden konnte. An dem Deckel befand sich einerseits der kurze Verbindungsdraht zwischen der Kugel und der sie umgebenden Schale und andererseits ein Seidenfaden. Schloss der Deckel die Oeffnung, so befand sich die Kugel in leitender Verbindung mit der Schale. Zog man den Deckel an dem Seidenfaden fort, so wurde diese Verbindung aufgehoben, und man konnte durch die Durchbohrung eine Electrode des Electrometers zur Vollkugel einführen.

Das benutzte Electrometer war ein Thomsonsches Quadrantelectrometer, wie es in Art. 219 beschrieben werden soll. Sein Gehäuse und eine seiner Electroden befanden sich stets zur Erde abgeleitet, auch die andere Electrode, die Tastelectrode, stand solange mit der Erde in Verbindung, bis die Schale entladen war.

Die der Kugelschale mitgeteilte Ladung wurde durch die von ihr in einer kleinen, isolirt aufgestellten und während der Ladung zur Erde abgeleiteten Messingkugel influenzirte Electricität bestimmt.

Die einzelnen Operationen bei dem Versuch wurden wie folgt vorgenommen.

Die Schale wurde durch eine Leydener Flasche positiv geladen. Die kleine Messingkugel wurde zur Erde abgeleitet, und, nachdem sie durch Influenz eine negative Ladung erhalten hatte, wieder isolirt.

Man entfernte dann an dem Seidenfaden den Verbindungsdraht zwischen Vollkugel und Kugelschale und entlud die Kugelschale zur Erde, mit der man sie auch weiter in Verbindung liess.

Die Tastelectrode des Electrometers wurde aus ihrer Verbindung mit der Erde gelöst und durch die Durchbohrung der Schale mit der Vollkugel in Berührung gebracht.

Das Electrometer hätte nun, wenn die Kugel electrisirt gewesen wäre, eine Ladung anzeigen müssen, es war aber nicht möglich, auch nur den geringsten Effect bei Berührung der Electrode mit der Kugel auf das Electrometer zu entdecken.

Zur Bestimmung der Empfindlichkeit des Apparates wurde die Schale von der Erdleitung gelöst und die kleine Messingkugel zur Erde entladen. Das Electrometer zeigte dann eine positive Ablenkung D.

Nun war die negative Ladung der Messingkugel etwa $^1/_{54}$ von der ursprünglichen Ladung der Schale, und die von der Messingkugel rückwärts in die entladene und zur Erde abgeleitete Schale influenzirte positive Elec-

Digitized by Google

tricitätsmenge etwa $^1/_9$ der Ladung der Messingkugel. Das Electrometer zeigte nach Ableitung der Messingkugel zur Erde diese Ladung der Kugelschale, die doch nur $^1/_{486}$ ihrer ursprünglichen Ladung betrug, sehr deutlich an. Nimmt man in dem Wirkungsgesetz für die Potenz r^{-2}, allgemeiner r^{q-2} an, so müsste nach der Gleichung 8_1), die wir bald in dem Art. 74d abzuleiten Gelegenheit haben werden, die Vollkugel eine Ladung $-0{,}14789q$ von der der Schale besitzen.

Ist also $\pm d$ die grösste nicht mehr beobachtbare Deflexion des Electrometers und D die bei der Ladung der Schale durch Influenz der Messingkugel an dem Electrometer beobachtete Deflexion, so kann q nicht grösser sein als

$$\pm \frac{1}{72} \frac{d}{D}.$$

Es war aber selbst bei ganz roher Ausführung eines Experiments D immer noch mehr als 300mal so gross wie d, und folglich kann q nicht grösser sein als

$$\pm \frac{1}{21600}.$$

Theorie des Experiments.

74c. Die Electricität befindet sich nur auf den Oberflächen der Kugeln, daher haben wir zunächst das Potential einer gleichmässig electrisirten Kugelfläche auf einen Punkt unter Annahme, dass das Wirkungsgesetz durch eine Function $\varphi(r)$ die Entfernung bestimmt wird, zu berechnen.

Es sei a der Radius der Kugelfläche und σ die Flächendichte, dann ist die gesammte Electricitätsmenge der Kugelfläche

a) $$\alpha = 4\pi a^2 \sigma.$$

Ferner sei b der Abstand eines gegebenen Punktes von dem Centrum und r seine Entfernung von einem Punkte der Fläche. Bei Benutzung von Kugelcoordinaten, deren Pol im Centrum liegt und deren Axe in Richtung von b verläuft, hat man dann

b) $$r^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta.$$

Die Electricitätsmenge in einem Punkte der Fläche wird

$$\sigma a^2 \sin\vartheta \, d\varphi \, d\vartheta.$$

Bezeichnen wir durch $\varphi(r)$ die Abstossungskraft zwischen zwei Electricitätseinheiten in der Entfernung r und wählen eine Function $f(r)$ so, dass

c') $$\frac{df(r)}{dr} = f'(r) = r\int_r^\infty \varphi(r)\, dr$$

Digitized by Google

ist, so wird das Potential des Elements der Kugelfläche in dem betrachteten Punkt gleich

$$\sigma a^2 \sin\vartheta \frac{f'(r)}{r} d\vartheta\, d\varphi,$$

folglich das Potential der ganzen Schale

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sigma a^2 \sin\vartheta \frac{f'(r)}{r} d\vartheta\, d\varphi$$

$$= 2\pi a^2 \sigma \int_0^{\pi} \sin\vartheta \frac{f'(r)}{r} d\vartheta.$$

Durch Differentiation der Gleichung b) ergiebt sich aber

$$r\, dr = ab \sin\vartheta\, d\vartheta,$$

somit

$$V = \frac{2\pi a\sigma}{b} \int_{r_2}^{r_1} f'(r)\, dr$$

$$= \frac{2\pi a\sigma}{b} \{f(r_1) - f(r_2)\}.$$

r_1 giebt den grössten Wert des r an, ist also gleich $a + b$, und r_2 den kleinsten, also $b - a$, wenn der betrachtete Punkt ausserhalb, $a - b$, wenn er innerhalb der Kugelfläche liegt.

Setzt man noch für $2\pi a\sigma/b$ den Wert $\alpha/2ab$ ein, so wird für einen Punkt ausserhalb der Kugelfläche

1) $$V_e = \frac{\alpha}{2ab} \{f(a+b) - f(b-a)\},$$

für einen Punkt auf der Kugelfläche

2) $$V = \frac{\alpha}{2a^2} f(2a),$$

für einen Punkt innerhalb der Kugelfläche

3) $$V_i = \frac{\alpha}{2ab} \{f(a+b) - f(a-b)\}.$$

Daraus können wir dann leicht die Potentialniveaus A und B zweier concentrischen Kugelflächen mit den Radien a und b, wo $a > b$ sein mag, und den Ladungen α und β berechnen. Dem Obigen zufolge ist nämlich für einen Punkt der äusseren Kugelfläche

4) $$A = \frac{\alpha}{2a^2} f(2a) + \frac{\beta}{2ab} \{f(a+b) - f(a-b)\}$$

Digitized by Google

und für einen der innern

$$5) \qquad B = \frac{\beta}{2b^2} f(2b) + \frac{a}{2ab}\{f(a+b) - f(a-b)\}.$$

Nun waren in unserm Versuche die beiden Kugelflächen durch einen Draht verbunden, sie mussten also durch die Ladung dasselbe Potential V bekommen. Lösen wir daher die Gleichungen $A = B = V$ für β auf, so folgt

$$6) \qquad \beta = 2Vb \frac{bf(2a) - a[f(a+b) - f(a-b)]}{f(2a)f(2b) - [f(a+b) - f(a-b)]^2}.$$

In dem von Cavendish angestellten Versuche wurde die äussere Kugelfläche so weit von der innern entfernt, dass sie keine Wirkung mehr auf diese ausübte und dann entladen. Daher musste in seinem Versuche das Potential der innern Kugeloberfläche

$$7) \qquad B_1 = \frac{\beta}{2b^2} f(2b)$$

$$= V \frac{1 - \frac{a}{b} \frac{f(a+b) - f(a-b)}{f(2a)}}{1 - \frac{[f(a+b) - f(a-b)]^2}{f(2a)f(2b)}}$$

sein. In der angeführten Wiederholung des Experiments dagegen wurde sie an ihrer Stelle gelassen und mit der Erde verbunden, so dass A sich auf Null reducirte. Das Potential der innern Kugeloberfläche ist also

$$8) \qquad B_2 = V\left\{1 - \frac{a}{b} \frac{f(a+b) - f(a-b)}{f(2a)}\right\}.$$

74d. Wir nehmen nun mit Cavendish an, dass

$$9) \qquad \varphi(r) = r^{q-2}$$

ist. Die Wirkung geht dann nicht genau umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vor sich, und es wird nach der Gleichung unter c')

$$c) \qquad f(r) = \frac{1}{1-q^2} r^{q+1}.$$

Ist nun q nicht gleich 0, so wird es jedenfalls verhältnismässig klein sein, so dass r^q nach $q \log r$ entwickelt werden darf.

Man erhält

$$c_1) \qquad f(r) = \frac{r}{1-q^2}\left\{1 + q\log r + \frac{1}{1.2}(q\log r)^2 + \ldots\right\},$$

und indem man die Potenzen von $(q \log r)$, welche höhere Exponenten als 1 haben, vernachlässigt, wird aus den Gleichungen unter 7) und 8)

$$7_1) \qquad B_1 = \tfrac{1}{2} \frac{a}{a-b} Vq\left[\log \frac{4a^2}{a^2-b^2} - \frac{a}{b} \log \frac{a+b}{a-b}\right]$$

Digitized by Google

$$8_1) \qquad B_2 = \tfrac{1}{2} Vq \left[\log \frac{4a^2}{a^2 - b^2} - \frac{a}{b} \log \frac{a+b}{a-b} \right].$$

Die einzelnen Grössen dieser Gleichungen müssen bis auf q durch das Experiment selbst gegeben sein, so dass aus ihnen q berechnet werden kann. In dieser Weise ist die in Art. 74b für q angegebene Grenze eruirt worden.

Da übrigens alle bei der Berechnung von B_1 bezüglich B_2 angeführten Vernachlässigungen sich auf ganze positive Potenzen von q erstrecken, so folgt, dass wenn B_1 und B_2 verschwinden sollen, q gleich Null sein muss.

74e. Eine gleichmässig electrisirte Kugelfläche übt auf einen innern Punkt keine Wirkung aus, und diese Tatsache benutzte Laplace*), um zu beweisen, dass die einzige damit vereinbare Function für das Wirkungsgesetz $\varphi(r) = 1/r^2$ ist. Wir können seine Methode auf unsern Fall übertragen, wenn wir die Bedingung aufsuchen, der $f(r)$ genügen muss, falls $\beta = 0$ sein soll.

Aus Gleichung 6) folgt, dass dann

$$bf(2a) - af(a+b) + af(a-b) = 0$$

wird, woraus nach zweimaliger Differentiation nach b und Division durch a

$$f''(a+b) = f''(a-b)$$

sich ergiebt. Soll diese Gleichung allgemein gelten, so muss

$$f''(r) = \text{Const.} = C_0,$$

also

$$f'(r) = C_0 r + C_1$$

sein. Vermöge der Festsetzung unter c') erhält man weiter

$$\int_r^\infty \varphi(r)\, dr = \frac{f'(r)}{r} = C_0 + \frac{C_1}{r},$$

also schliesslich

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r^2}.$$

Die Annahme von Cavendish, dass die Kraft umgekehrt proportional einer Potenz der Entfernung ist, scheint weniger allgemein zu sein als die von Laplace, der die Form der Function ganz allgemein lässt. Sie ist aber die einzige mit der Tatsache verträgliche, dass in der Form ähnliche Körper electrisirt auch ähnliche electrische Eigenschaften zeigen.

Wäre nämlich die Kraft eine andere Function der Entfernung als eine Potenz derselben, so würde die Kraftwirkung an zwei verschiedenen Stellen nicht vom Verhältnisse der Abstände, sondern von ihren absoluten Beträgen, also von den Verhältnissen der Abstände zu einer fixirten Länge abhängen.

*) Mec. cel. I. 2.

Digitized by Google

Eine solche Abhängigkeit kann zum Beispiel eintreten, wenn man von Cavendish's Ansicht über die Constitution des electrischen Fluidums ausgeht, der zu Folge die Teilchen der electrischen Flüssigkeit in der Nähe der Oberfläche eines Conductors nahe an einander gerückt sein sollen. Die Abstossungskraft zweier Teilchen würde dann von einer gewissen Grenze ab mit abnehmender Entfernung rascher wachsen als das umgekehrte Quadrat der Entfernung.

In der Tat macht auch Cavendish selbst darauf aufmerksam, dass nach dieser Hypothese über die Constitution des electrischen Fluidums die electrische Verteilung auf zwei geometrisch ähnlichen Körpern nur dann eine ähnliche sein kann, wenn die Ladungen proportional den Voluminibus der Conductoren sind.

Das Flächenintegral der electrischen Induction und die electrische Verschiebung durch eine Fläche.

75. Bezeichnet R die resultirende Kraftintensität in einem Punkte einer Fläche S und ε den Winkel von R gegen die nach der positiven Seite von S gezogene Normale, so giebt $R\cos\varepsilon$ die Normalcomponente der Kraftintensität in dem betrachteten Punkte, und es ist nach Art. 68 die electrische Verschiebung durch ein Flächenelement dS von S gleich

$$\frac{1}{4\pi} KR\cos\varepsilon\, dS.$$

Abstrahirt man von den dielectrischen Eigenschaften der Zwischenmedien, so hat man $K = 1$ zu setzen, und erhält für die gedachte Verschiebung

$$\frac{1}{4\pi} R\cos\varepsilon\, dS.$$

Die Grösse $R\cos\varepsilon\, dS$ können wir aber auch, indem wir vorläufig von einer Einführung des Begriffs der Verschiebung noch absehen, als die Influenz oder Induction in dem Elemente dS bezeichnen. Wir haben es dann mit einer Grösse zu tun, die der mathematischen Physik sehr geläufig ist und deren Name ‚Induction' von Faraday herrührt. Das Flächenintegral der von innen nach aussen gerichteten Induction ist gleich

1a) $$\iint R\cos\varepsilon\, dS$$

oder, wenn die Componenten X, Y, Z von R in dem von S begrenzten Gebiete endlich und stetig sind,

1b) $$\iint R\cos\varepsilon\, dS = \iiint\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Das auf der rechten Seite der Gleichung stehende dreifache Integral erstreckt sich über den ganzen von S eingeschlossenen Raum.

Digitized by Google

Induction eines einzelnen Kraftcentrums durch eine Fläche.

76. *Geschlossene Fläche.* Ist e die Electricität eines Punktes O und r seine Entfernung von einem Punkte P der Fläche S, so ist der Wert der in Richtung von OP auf P wirkenden Kraft R gleich er^{-2}. Zieht man von O aus eine Linie in die Unendlichkeit, so schneidet dieselbe, wenn O ausserhalb S liegt, diese Fläche entweder gar nicht oder sie tritt so oft in die Fläche ein als sie aus ihr austritt. Befindet sich aber O innerhalb S, so muss die Anzahl der Austritte die der Eintritte um eins übersteigen. Wo die Linie aus der Fläche herausgeht, ist $\cos\varepsilon$ positiv, wo sie eintritt, negativ.

Wir denken uns das Flächenelement dS dadurch entstanden, dass OP um O einen Kegel von unendlich kleiner Oeffnung beschreibt. Ist dann $d\omega$ das Flächenelement, welches dieser Kegel aus einer um O mit dem Radius 1 geschlagenen Kugel herausschneidet, so haben wir

$$dS = r^2 \sec\varepsilon \, d\omega.$$

Demnach ist wegen $R = er^{-2}$, je nachdem r aus der Fläche austritt oder in dieselbe eintritt,

$$R\cos\varepsilon \, dS = +\, ed\omega \text{ oder}$$
$$R\cos\varepsilon \, dS = -\, ed\omega.$$

Liegt nun der Punkt O ausserhalb der Fläche S, so ist die Anzahl der Eintritte gleich der der Austritte, demnach, wenn wir durch das Zeichen Σ alle von demselben Kegel aus S herausgeschnittenen Flächenelemente zusammenfassen,

$$\Sigma R\cos\varepsilon \, dS = 0,$$

also auch

1) $$\iint R\cos\varepsilon \, dS = 0.$$

Im andern Falle, wenn der Punkt O sich innerhalb der Fläche befindet, übersteigt die letzte Zahl die erste um 1 und deshalb wird

$$\Sigma R\cos\varepsilon \, dS = +\, ed\omega.$$

Die Integration über die ganze Fläche ist hier gleichbedeutend mit der über die ganze um O gelegte Kugel, mithin

2) $$\iint R\cos\varepsilon \, dS = \iint ed\omega = 4\pi e.$$

Die gesammte von einem Kraftcentrum O, in dem eine Electricitätsmenge e concentrirt ist, von innen nach aussen durch eine geschlossene Fläche bewirkte Induction ist also gleich Null, wenn das Kraftcentrum ausserhalb, und gleich $4\pi e$, wenn es innerhalb der Fläche sich befindet.

Digitized by Google

Bei der Luft ist die electrische Verschiebung gleich der electrischen Induction dividirt durch 4π, also gleich der innerhalb der Fläche befindlichen inducirenden Electricitätsmenge e.

Begrenzte Fläche. Wenn die Fläche, statt geschlossen zu sein, durch eine in sich zurücklaufende Linie begrenzt ist, so ergiebt sich aus den obigen Betrachtungen für die electrische Induction der Wert

3) $$\iint R \cos\varepsilon \, dS = \omega e,$$

wo ω die Oeffnung des Kegels bezeichnet, dessen Scheitel in O liegt und dessen Directrix die Grenzcurve der Fläche ist. Die Induction hängt also nur von der Form der Grenzcurve ab, und man kann die Fläche selbst irgend wie biegen und dehnen, ohne, so lange man die Fläche nicht durch das Kraftcentrum hindurch führt, den Betrag der Induction zu ändern.

Die Gleichungen von Laplace und Poisson.

77. Die obige Ableitung für den Wert der Induction durch eine geschlossene Fläche geschah unter der Voraussetzung eines einzigen Kraftcentrums, sie bleibt aber giltig, wenn eine ganz beliebige Anzahl solcher Centra gegeben ist. Wir haben dann in der Gleichung

1) $$\iint R \cos\varepsilon \, dS = 4\pi e$$

unter e die algebraische Summe aller Ladungen e_1, e_2, .. der Centra zu verstehen, die sich innerhalb der Fläche befinden. Glaselectrische Ladungen rechnen dabei als positive, Harzelectrische als negative.

Füllen die Centra den ganzen von S begrenzten Raum continuirlich aus, ohne dass die electrische Dichte ρ irgendwo unendlich wird, so haben wir nach Art. 64

$$4\pi e = 4\pi \iiint \rho \, dx \, dy \, dz,$$

und da weiter nach Art. 75

$$\iint R \cos\varepsilon \, dS = \iiint \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz$$

ist, so folgt

2) $$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 4\pi\rho.$$

Haben die Componenten ein Potential V, so ergiebt sich aus Art. 71

2_1) $$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 4\pi\rho = 0.$$

Digitized by Google

Diese Gleichung setzt uns in Stand, wenn das Potential in allen Punkten eines Gebietes gegeben ist, die Verteilung der Electricität in diesem Gebiete zu bestimmen.

In der obigen allgemeinen Form hat Poisson die Gleichung 2) zuerst aufgestellt, für den speciellen Fall aber, dass $\rho = 0$ ist, war sie schon früher von Laplace abgeleitet worden.

Benutzen wir für die Operation

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

das Zeichen ∇^2, so wird

2_1) die Poissonsche Gleichung $\nabla^2 V = 4\pi\rho$,

2_2) die Laplacesche $\nabla^2 V = 0$.

Nach Art. 72 hat V für einen Conductor, in dem die Electricität sich in Gleichgewicht befindet, in allen Punkten denselben Wert, hängt also nicht von x, y, z ab. Die Raumdichte der Electricität ist also in einem Conductor gleich Null, und demgemäss befindet sich die gesammte freie Electricität auf der Oberfläche des Conductors.

Ausser der Raumdichte haben wir früher noch eine Flächen- und Liniendichte der Electricität unterschieden. Stellt man sich aber eine Flächenladung als in einer sehr dünnen Electricitätsschicht und eine Linienladung als in einem sehr dünnen Electricitätsfaden bestehend vor, so wird die Raumdichte ρ auch in diesen Fällen noch einen Sinn haben. Indem wir die Dicke der Schicht bezüglich des Fadens fortwährend verringert und ρ vergrössert denken, gelangen wir schliesslich zu einer Flächen- bezüglich Linienladung, und da die Poissonsche Gleichung während des ganzen Ueberganges besteht, so verliert sich auch im Grenzfall ihre Bedeutung nicht. Sie muss aber den Verhältnissen gemäss interpretirt werden.

Variation des Potentials an einer geladenen Fläche.

78a. Die Potentialfunction V wird im allgemeinen in dem in Art. 7 definirten Sinne continuirlich sein. Nur an der Grenzfläche zweier verschiedener, oder gleicher aber verschieden temperirter Medien, kann, wie schon bemerkt, das Potential einen plötzlichen endlichen Sprung erleiden, so dass es, wenn die Electricität sich im Gleichgewicht befindet, dort in einem Punkte eines Körpers um eine endliche, von der Natur der beiden Medien und ihrer Temperatur abhängige Constante grösser ist als in einem gegenüberstehenden Punkte des andern.

Dagegen können die Derivirten des Potentials nach x, y, z auch ganz allgemein unstetig werden. Die Punkte, in denen eine Discontinuität

Digitized by Google

stattfindet, liegen dann nach Art. 8 in einer Fläche, deren Gleichung durch

$$\Phi = \Phi(x, y, z) = 0$$

ausgedrückt werden kann. Die Fläche trennt das Gebiet, wo Φ positiv ist von dem, wo es negative Werte hat.

Erleidet das Potential bei dem Uebergange aus dem Gebiete der negativen Φ, wo es gleich V_1 ist, in das der positiven, wo es gleich V_2 ist, einen Sprung C, so muss auf der Fläche Φ

1) $$V_1 + C = V_2$$

sein.

Wir bezeichnen durch l, m, n die Richtungscosinusse der von der Fläche in das Gebiet der positiven Φ gezogenen Normale ν_2, die entsprechenden Grössen für die in dem Gebiet der negativen Φ verlaufende Normale ν_1 sind dann $-l, -m, -n$.

Somit wird

2a) $$\frac{\partial V_1}{\partial \nu_1} = -l\frac{\partial V_1}{\partial x} - m\frac{\partial V_1}{\partial y} - n\frac{\partial V_1}{\partial z},$$

3a) $$\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} = +l\frac{\partial V_2}{\partial x} + m\frac{\partial V_2}{\partial y} + n\frac{\partial V_2}{\partial z}.$$

Für jeden Punkt der Fläche, also auch für jeden Punkt einer auf ihr gezogenen Curve s, gilt aber die Gleichung $V_2 - V_1 = C$, also folgt aus einer Differentiation nach s

4a) $$\left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial x}\right)\frac{dx}{ds} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial y}\right)\frac{dy}{ds} + \left(\frac{\partial V_2}{\partial z} - \frac{\partial V_1}{\partial z}\right)\frac{dz}{ds} = 0,$$

und da die Normale der Fläche auch Normale der Curve s ist, mithin

$$l\frac{dx}{ds} + m\frac{dy}{ds} + n\frac{dz}{ds} = 0$$

sein muss, so verwandeln sich die drei Gleichungen 2a), 3a), 4a) in

2) $$\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial V_1}{\partial x} = l\left(\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} + \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}\right)$$

3) $$\frac{\partial V_2}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial y} = m\left(\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} + \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}\right)$$

4) $$\frac{\partial V_2}{\partial z} - \frac{\partial V_1}{\partial z} = n\left(\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} + \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}\right).$$

Uebrigens kann während des Durchganges durch eine Fläche von den Componenten der electromotorischen Kraft nur die zur Fläche normal wirkende einen Sprung erleiden, die tangentialen Componenten müssen stetig bleiben.

Digitized by Google

Charakteristische Gleichung an einer electrischen Fläche.

78b. Wir bilden mit Hilfe der Gleichungen unter 2) bis 4) das Flächenintegral für den in Rede stehenden Fall.

Nach Art. 21 ist allgemein

$$\iint R\cos\varepsilon\, dS = \iiint\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz + \iint\{l(X_2-X_1)+m(Y_2-Y_1)+n(Z_2-Z_1)\}\,dS.$$

Das zweite Integral auf der rechten Seite der Gleichung bezieht sich auf die Fläche S, das erste auf den von ihr eingeschlossenen Raum.

Benutzen wir aber die im vorigen Art. unter 2) bis 4) aufgestellten Beziehungen und beachten, dass nach Art. 76, bezüglich 77

$$\iint R\cos\varepsilon\, dS = 4\pi e$$

$$\iiint\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz = 4\pi\iiint\rho\,dx\,dy\,dz$$

ist, so folgt

1) $$4\pi e = 4\pi\iiint\rho\,dx\,dy\,dz - \iint\left(\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2}+\frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}\right)dS.$$

Andererseits ist aber nach der Definition der Raumdichte ρ und der Flächendichte σ

$$4\pi e = 4\pi\iiint\rho\,dx\,dy\,dz + 4\pi\iint\sigma\,dS,$$

somit ergiebt sich

2) $$\frac{\partial V_1}{\partial \nu_1}+\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2}+4\pi\sigma = 0,$$

und diese Gleichung leistet zur Berechnung der Flächendichte dieselben Dienste, wie die Poissonsche zu der der Raumdichte.

Sie ist die *Charakteristische Gleichung* des Potentials V an einer zur Dichte σ electrisirten Fläche.

78c. Ich führe noch eine wichtige Folgerung aus den bisher abgeleiteten Gleichungen an.

Genügt V als Function von x, y, z in einem continuirlichen Raume der Laplaceschen Gleichung $\nabla^2 V = 0$, und hat sie ausserdem in einem Teile dieses Raumes einen und denselben Wert C, dann muss sie in dem ganzen Geltungsbereich der Laplaceschen Gleichung diesen Wert C besitzen.

Wir ziehen von der Fläche S, welche den Teil des Gesammtgebietes begrenzt, für den von vornherein $V = C$ ist, eine Normale ν nach aus-

Digitized by Google

wärts. Auf der Fläche ist noch $V = C$ und es erhält eventuell andere Werte, erst wenn wir uns längs der Normale fortbewegen. $\partial V / \partial \nu$ kann also in der Nähe und ausserhalb der Fläche positiv oder negativ sein, darf aber nicht verschwinden, wenn nicht zufällig die Normale gerade von einer Linie der Fläche ausgeht, welche positive Electricität von negativer trennt. Für eine nach dem Innern der bezeichneten Fläche gerichtete Normale ν' ist $\partial V'/\partial \nu' = 0$, somit nach 2)

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = -4\pi\sigma.$$

σ wird also, abgesehen von den Grenzlinien zwischen positiver und negativer Electricität, einen endlichen bestimmten Wert haben, und somit müsste auf der Fläche S eine bestimmte Verteilung von Electricität vorhanden sein. Ist das aber der Fall, dann kann die Laplacesche Gleichung auf der Fläche S nicht mehr richtig sein, weil sie gerade voraussetzt, dass in ihrem Geltungsbereich keine freie Electricität vorhanden ist. Die Fläche S, welche die Region, in der $V = C$ ist, von dem Gebiete, wo V andere Werte als C hat, trennt, muss also an die Grenze des Geltungsbereichs der Laplaceschen Gleichung rücken.

Mechanische Kraftwirkung an einer geladenen Fläche.

79. Allgemein lassen sich die nach den drei Axen gerichteten Componenten A, B, C der einen geladenen Körper angreifenden Kräfte darstellen durch

1) $$A = \iiint \rho X dx\, dy\, dz, \quad B = \iiint \rho Y dx\, dy\, dz$$

$$C = \iiint \rho Z dx\, dy\, dz.$$

Da aber in einer geladenen Fläche ρ unendlich gross ist, so können wir aus diesen Darstellungen die Kraftcomponenten an einer electrischen Fläche nicht ohne weiteres berechnen.

Der Einfachheit wegen verlegen wir zunächst die x Axe in die Normale der Fläche. Die y und z Componente der Kraft verlaufen dann tangential zu der Fläche und ändern sich beim Durchgang durch dieselbe stetig während die x Componente die Fläche senkrecht trifft und beim Durchgang durch dieselbe einen Sprung erleidet. Sehen wir aber eine geladene Fläche als mit einer sehr dünnen Schicht von Electricität belegt an, so können wir die Aenderung der x Componente als allmählich vor sich gehend betrachten, die Ausdrücke unter 1) beibehalten, sie ausrechnen und zusehen, ob wir zu einem brauchbaren Resultat gelangen, wenn wir nach der Ausrechnung die Dicke der Schicht gleich Null setzen.

Digitized by Google

Nach der Poissonschen Formel ist

$$4\pi\rho = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

also

$$A = \frac{1}{4\pi}\iiint\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) X\,dx\,dy\,dz.$$

Integrirt man nach x von x_1 bis x_2 und wählt x_2 so, dass $x_2 - x_1$ gleich der Dicke der Schicht wird, so ergiebt sich

$$A = \frac{1}{4\pi}\iint\left[\tfrac{1}{2}(X_2^2 - X_1^2) + \int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) X\,dx\right] dy\,dz$$

als Wert der Kraftcomponente A für eine zur yz Ebene parallele Schicht von der Dicke $x_2 - x_1$. Da nun Y und Z continuirlich sind, so ist $\partial Y/\partial y + \partial Z/\partial z$ endlich und da auch X endlich ist, so wird

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) X\,dx < C(x_2 - x_1),$$

wo C den grössten Wert angiebt, den $(\partial Y/\partial y + \partial Z/\partial z)X$ innerhalb der Schicht $x_2 - x_1$ annehmen kann. Lässt man daher $x_2 - x_1$, die Dicke der Schicht, ohne Ende abnehmen, so bleibt

$$A = \frac{1}{8\pi}\iint(X_2^2 - X_1^2)\,dy\,dz.$$

Nach der charakteristischen Gleichung ist aber

$$X_2 - X_1 = -\frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} - \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1} = 4\pi\sigma,$$

also

$$A = \iint \tfrac{1}{2}(X_2 + X_1)\,\sigma\,dy\,dz.$$

In diesem Ausdrucke giebt $\frac{1}{2}(X_2 + X_1)$ das arithmetische Mittel der Kraftcomponente X zu beiden Seiten der Fläche und σ die Flächendichte an. Ein Element der Fläche wird also von einer Kraft angegriffen, deren Normalcomponente gleich dem Producte der Ladung dieses Elements in das arithmetische Mittel der zu beiden Seiten des Elements wirkenden electromotorischen Kräfte ist.

Die in der Tangentialebene der Fläche dieselbe angreifenden Kraftcomponenten sind stetig, ihre Berechnung unterliegt also weiter keinen Schwierigkeiten.

Digitized by Google

Wählt man das Axensystem beliebig, so hat man allgemein für die Kraftcomponenten an einem Elemente dS

$$2) \qquad \begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2)\,\sigma\,dS, \\ B &= \tfrac{1}{2}(Y_1 + Y_2)\,\sigma\,dS, \\ C &= \tfrac{1}{2}(Z_1 + Z_2)\,\sigma\,dS. \end{aligned}$$

[Sind nämlich die Componenten normal und tangential zur Fläche N, T, Θ, so haben wir

$$\begin{aligned} A &= N\cos(Nx) + T\cos(Tx) + \Theta\cos(\Theta x), \\ B &= N\cos(Ny) + T\cos(Ty) + \Theta\cos(\Theta y), \\ C &= N\cos(Nz) + T\cos(Tz) + \Theta\cos(\Theta z), \end{aligned}$$

oder wegen

$$N = \tfrac{1}{2}(N_1 + N_2)\,\sigma\,dS, \quad T = \tfrac{1}{2}(T_1 + T_1)\,\sigma\,dS,$$
$$\Theta = \tfrac{1}{2}(\Theta_1 + \Theta_1)\,\sigma\,dS.$$

$$\begin{aligned} 2A = {} & [N_1\cos(Nx) + T_1\cos(Tx) + \Theta_1\cos(\Theta x)]\,\sigma\,dS \\ & + [N_2\cos(Nx) + T_1\cos(Tx) + \Theta_1\cos(\Theta x)]\,\sigma\,dS. \end{aligned}$$

Die erste Zeile auf der rechten Seite ist aber $X_1\sigma\,dS$ und die zweite $X_2\sigma\,dS$. Entsprechende Ausdrücke gelten für $2Y$, $2Z$.]

Gewöhnlich leitet man diese Ausdrücke für die ein Element angreifenden Kräfte in anderer von Laplace angegebener Weise ab.

Zieht man nämlich von der Mitte von dS aus eine Normale mit den Richtungscosinussen l, m, n und wählt auf dieser zu beiden Seiten von dS zwei Punkte P, P' so nahe an dS, dass ihr Abstand von dS selbst gegen die kleinste Dimension dieses Flächenelements noch unendlich klein ist, so kann das Element in Bezug auf P wie auf P' wie eine unendliche ebene Platte betrachtet werden.

Seine Kraftwirkung auf P in Richtung der Normale berechnet sich dann zu $2\pi\sigma\,dS$ und die auf P', den Punkt auf der andern Seite von dS, zu $-2\pi\sigma\,dS$. Da nun beide Punkte P und P' einander sehr nahe liegen, so müssen beide von der Kraft des Restes der electrischen Fläche und noch anderer etwa vorhandener electrischer Körper gleich stark angegriffen werden. Bezeichnen wir demnach diese letztere Wirkung, wenn sie in Richtung der x Axe vor sich geht, mit A und die ganzen Kraftcomponente durch $\sigma X_1\,dS$ bezüglich $\sigma X_2\,dS$, je nachdem der Punkt P oder P' ins Auge gefasst wird, so haben wir

$$\begin{aligned} \sigma X_1\,dS &= A + 2\pi e\,\sigma\,dS, \\ \sigma X_2\,dS &= A - 2\pi e\,\sigma\,dS, \end{aligned}$$

also

$$A = \tfrac{1}{2}\sigma(X_1 + X_2)\,dS.$$

Wenn nun P und P' auf dS zusammenfallen, so heben sich die Kraftwirkungen von dS als gleich und entgegengesetzt auf, und A stellt die

Digitized by Google

gesammte Kraft, die das Flächenelement dS in Richtung der x Axe angreift, dar.

Wir wenden unsere Formeln zur Berechnung der Kraftwirkung an der Oberfläche eines Conductors an.

Im Art. 77 haben wir aus der Laplaceschen Gleichung die Consequenz abgeleitet, dass die Electricität eines Conductors erst dann sich im Gleichgewichte befindet, wenn sie sich vollständig auf die Oberfläche desselben begeben und dort so verteilt hat, dass das Potential überall im Conductor denselben Wert besitzt. In dem Innern eines Leiters kann sich also freie Electricität überhaupt nicht in Ruhe befinden, wol aber in dem eines Nichtleiters.

Demnach ist die resultirende Kraftintensität innerhalb eines Conductors gleich Null, an der Oberfläche dagegen zufolge der charakteristischen Gleichung gleich $4\pi\sigma$ und normal von innen nach aussen gegen den Conductor gerichtet.

Diese Beziehung zwischen der Dichte der Electricität an der Oberfläche eines Conductors und der Intensität der daselbst wirkenden Kraft ist von Coulomb experimentell entdeckt worden. Doch wies er durch Versuche nur nach, dass die Kraftwirkung in den Punkten eines Conductors sich proportional der in ihnen herrschenden Flächendichte der Electricität ändert. Der Proportionalitätsfactor 4π und damit auch die Relation

3) $$R = 4\pi\sigma$$

ist erst von Poisson angegeben worden.

Nach innen wirkt in dem Conductor keine Kraft, daher ist nach Art. 79 die Kraftwirkung auf ein Oberflächenelement dS des Conductors

4) $$\tfrac{1}{2} R\sigma\, dS = 2\pi\sigma^2\, dS = \frac{1}{8\pi} R^2\, dS.$$

Diese Kraft ist unabhängig von dem Zeichen der Ladung stets von innen nach aussen gerichtet, sie wirkt also wie eine Spannung von der Conductoroberfläche fort. Ihre Grösse für das qcm ist gleich

4_1) $$\tfrac{1}{2} R\sigma = 2\pi\sigma^2 = \frac{1}{8\pi} R^2.$$

81. Verringert man die Querdimensionen eines Conductors, so gelangt man schliesslich zu einem electrisirten Draht.

Sei ds ein Element dieses Drahtes und c sein Umfang, ferner σ die Dichte der Electricität auf seiner Oberfläche und λ die in einer Längeneinheit des Drahtes enthaltene Electricitätsmenge. Wir haben dann für die resultirende Kraftintensität an der Oberfläche des Drahtes wieder den Wert $4\pi\sigma$ und da $c\sigma = \lambda$ sein muss, so folgt

5) $$R = 4\pi\sigma = 4\pi\frac{\lambda}{c}.$$

Digitized by Google

Nimmt der Umfang des Drahtes unbegrenzt ab, während λ constant bleibt, so wird schliesslich R unendlich gross. Wir haben aber schon bemerkt, dass in jedem Dielectricum dem Anwachsen der Kraftintensität durch die disruptive Entladung eine Grenze gesetzt ist, und deshalb kann in der Natur keine Linie mit einer endlichen Electricitätsmenge geladen werden. Selbst dann, wenn wirklich eine Substanz gefunden werden könnte, die so streng isolirt, dass sie jeder noch so grossen electrischen Spannung Widerstand zu leisten vermag, wäre es doch nicht möglich, eine endliche Electricitätsmenge auf eine Linie zu bringen, weil man dazu eine unendlich grosse Kraft zur Verfügung haben müsste.

Ganz ebenso lässt sich einsehen, dass auch kein Punkt in der Natur eine endliche Electricitätsmenge fassen kann.

Doch ist es der kürzern Ausdrucksweise halber von Vorteil, von electrischen Linien und Punkten zu sprechen, man muss dann darunter Drähte bezüglich Körper von so geringem Umfang verstehen, dass ihre Dimensionen zu den gerade in Betracht kommenden Distanzen verschwindend klein sind.

Ich erwähne noch eine für experimentelle Arbeiten wichtige Folgerung, die man aus den obigen Bemerkungen ziehen kann. Da nämlich die einem Drahte bei bestimmtem Potential mitteilbare Electricitätsmenge um so kleiner wird, je mehr sein Querschnitt abnimmt, so kann die Verteilung der Electricität auf Körpern von endlichen Dimensionen durch Einführung feiner Drähte in das electrische Feld nicht merkbar geändert werden, und man darf den Einfluss der Drähte, die etwa Conductoren mit einander oder mit Electrisirmaschinen oder mit der Erde oder mit Electrometern verbinden, gänzlich ausser Acht lassen.

Kraftlinien.

82. Nach Art. 47 ist eine *Kraftlinie* dadurch definirt, dass ihre Tangente in jedem Punkte mit der Richtung der resultirenden Kraft in diesem Punkte zusammenfällt.

Kraftlinien verlaufen von Orten höhern zu solchen niederern Potentials, sie können also nie in sich zurücklaufen, sondern müssen einen Anfang und ein Ende haben. Sie gehen von positiv geladenen Körperoberflächen aus und enden im allgemeinen in negativ electrisirten.

Anfangs- und Endpunkt einer Kraftlinie bezeichnen wir als *Correspondirende Punkte* der geladenen Flächen, in denen sie sich befinden.

Denkt man sich eine Kraftlinie so bewegt, dass ihr Anfangspunkt auf der positiv geladenen Fläche eine geschlossene Curve beschreibt, so durchläuft ihr Endpunkt auf der negativ geladenen gleichfalls eine geschlossene Linie.

Es entsteht so eine Cylinderfläche, deren Mantel nur aus Kraftlinien gebildet ist, und die wir als Inductionsröhre oder nach Faraday als *Sphondyloid* bezeichnen.

Digitized by Google

In jedem Punkte einer solchen Röhre ist die Kraft tangential zu ihrer Oberfläche gerichtet, daher kann quer zur Röhre keine Induction stattfinden.

Enthält also die Röhre in ihrem Innern keine Electricität, so muss das Flächenintegral $\iint R \cos\varepsilon \, dS$, auch wenn man zur Oberfläche der Röhre ihre Endflächen mitrechnet, nach Art. 77 verschwinden. Dieses Integral ist also in Bezug auf die beiden Endflächen gleich und dem Zeichen nach entgegengesetzt. Gehen die Kraftlinien von Conductoren aus und enden auch in Conductoren, so ist für die positive Endfläche O_+

$$\varepsilon = 0, \quad R = 4\pi\sigma_+,$$

für die negative O_-

$$\varepsilon = 0, \quad R = 4\pi\sigma_-,$$

somit

$$\int_{O_+} \sigma_+ \, dO_+ = -\int_{O_-} \sigma_- \, dQ_-.$$

Die Ladung an dem Ende des Sphondyloids ist also gleich und entgegengesetzt der an seinem Anfang.

Man kann noch andere sehr wichtige Resultate aus den Eigenschaften der Kraftlinien ableiten.

Jede Kraftlinie muss, wie wir bemerkt haben, von positiv geladenen Flächen ausgehen und in negativ electrisirten enden. Befindet sich also eine solche Kraftlinie innerhalb eines überall geschlossenen Metallgefässes, welches keine Electricität in seinem Innern birgt, so nehmen die Kraftlinien von der Innenfläche des Gefässes ihren Anfang und finden auch in derselben ihr Ende. Auf einer Kraftlinie muss das Potential im Ursprung höher sein als im Ende, innerhalb eines Conductors ist es aber überall gleich, also kann dort überhaupt keine Kraftlinie vorhanden sein. Daraus folgt:

Wenn eine leitende überall geschlossene Schale keine freie Electricität in sich birgt, so besitzt ihre Innenfläche keine Ladung, und das Potential ist in dem ganzen eingeschlossenen Raum ebenso gross wie auf der Aussenseite, also gleich dem Potential der Schale.

Bringt man einen Conductor in das Innere eines solchen Gefässes und verbindet ihn durch einen Draht mit der Innenfläche desselben, so verhält sich seine Oberfläche ganz so wie die Innenfläche des Gefässes, sie bildet einen Teil dieser Innenfläche, ist also nicht geladen und hat dasselbe Potential wie die Aussenfläche des Gefässes.

Teilen wir die Oberfläche eines Conductors in einzelne Elemente, deren jedes eine Einheit von der Electricitätsmenge in sich fasst, und lassen von den Grenzlinien derselben Kraftlinien ausgehen, so zerfällt der ganze Raum in Inductionsröhren. Das Flächenintegral der Induction ist dann für jede andere Fläche gleich der Anzahl der Inductionsröhren, welche sie schneidet. In diesem Sinne hat Faraday vornehmlich die Kraftlinien verwendet, denn

Digitized by Google

sie dienten ihm nicht blos um die Richtung der Kraft anzuzeigen, sondern auch um ihre Grösse in den einzelnen Teilen des electrischen Feldes zu messen.

Eigentlich sollten diese Linien Inductionslinien genannt werden, denn unter Induction versteht Faraday die Beziehung, in der die Ladungen electrischer Körper zu einander stehen, und er versinnbildlicht sich diese Beziehung dadurch, dass er Linien zieht, welche Einheiten positiver Electricität mit correspondirenden Einheiten negativer verbinden. Ich habe aber die Benennung Kraftlinien beibehalten zu müssen geglaubt, weil sie seit Faraday allgemein üblich geworden ist.

Inductionslinien und Kraftlinien fallen im allgemeinen nicht zusammen, in den uns am meisten interessirenden Fällen verläuft aber die Induction in Richtung der electromotorischen Kraftintensität und ist an Grösse dieser proportional. Hier decken sich also die Kraftlinien vollständig mit den Inductionslinien.

Sonst müssen wir aber daran festhalten, dass jene wichtigen Linien, von denen oben die Rede gewesen ist, Inductionslinien sind. Die Kraftlinien bestimmen sich unabhängig von ihnen durch die Festsetzung, dass sie alle Niveauflächen senkrecht schneiden sollen.

Die electromotorischen Kräfte wirken in Richtung dieser Kraftlinien und sind umgekehrt proportional den Abständen auf einander folgender äquipotentieller Flächen.

Berücksichtigung der dielectrischen Eigenschaften der Zwischenmedien.

83a. Bei der bisherigen Auswertung der Flächenintegrale sind wir der gewöhnlichen Annahme einer Wirkung in die Ferne gefolgt und haben infolge dessen keine Rücksicht auf die eventuelle Abänderung, welche die Kräfte in den dielectrischen Medien erleiden, genommen.

Faraday hat aber, wie ich bereits bemerkt habe, die Entdeckung gemacht, dass die von einer bestimmten electromotorischen Kraft in einen Conductor inducirte Electricitätsmenge von der Natur des Dielectricums, in welchem der Conductor sich befindet, abhängt, so dass sie für fast alle festen und flüssigen Dielectrica grösser als für Gase ist. Man drückt diese Tatsache dadurch aus, dass man sagt, die specifische inductive Capacität eines Dielectricums hänge von seiner Beschaffenheit ab und sei bei festen und flüssigen Körpern im allgemeinen grösser als bei der Luft.

Einen mathematischen Ausdruck für Faradays Theorie gewinnt man dadurch, dass man als Induction durch eine Fläche das Product der normalen Induction (wie wir sie bisher betrachtet haben) in die inductive Capacität ansieht. Dies ist gleichbedeutend damit, dass die frühern Kraftcomponenten X, Y, Z durch ihre Producte in die specifische inductive Capacität K ersetzt werden.

Digitized by Google

Damit wird also die Laplace-Poissonsche Gleichung

$$1) \qquad \frac{\partial K \frac{\partial V}{\partial x}}{\partial x} + \frac{\partial K \frac{\partial V}{\partial y}}{\partial y} + \frac{\partial K \frac{\partial V}{\partial z}}{\partial z} + 4\pi\rho = 0.$$

Ferner nimmt die charakteristische Gleichung an der Grenzfläche zweier Medien, deren Potentiale V_1, V_2 und deren specifische Capacitäten K_1, K_2 sind, die Form an

$$2) \qquad K_1 \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1} + K_2 \frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} + 4\pi\sigma = 0,$$

ν_1, ν_2 geben die in demselben Punkte nach den beiden Medien gezogenen Normalen und σ bezeichnet die an der Grenzfläche wirklich stattfindende Flächendichte, das heisst, die Dichte der Electricitätsmenge, welche sich auf der Grenzfläche in Form einer Ladung wirklich befindet, die also nur durch Zuführung oder Wegnahme von Electricität geändert werden kann.

Scheinbare Dichte.

83b. Bestimmt man zunächst die Verteilung der Potentialwerte in einem electrischen Felde und dann mit ihrer Hülfe unter der Annahme, dass $K = 1$ ist, die Dichten ρ' und σ' in den electrisirten Körpern, bezüglich auf den Oberflächen, so erhält man nicht die wahren Werte dieser Grössen, sondern nur die scheinbar stattfindenden, weil die so berechnete Verteilung der Electricität nur dann reell sein würde, wenn das in Art. 66 für die Wirkung der Electricität aufgestellte Gesetz durch die Dazwischenkunft von Dielectricis keine Modification erlitte.

Die scheinbare Ladung in einem abgegrenzten Gebiete kann sich demnach vermehren oder vermindern, ohne dass ein Durchgang von Electricität durch die Grenzfläche stattzufinden braucht, und das ist ein charakteristisches Unterscheidungsmerkmal zwischen dieser und der wahren Ladung, welch letztere der Continuitätsgleichung genügen muss.

Demnach haben wir einerseits

$$3) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 4\pi\rho' = 0$$

und andererseits, wenn K in dem Dielectricum continuirlich variirt,

$$\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} + K\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) + 4\pi\rho = 0,$$

somit

$$4) \qquad \frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z} + 4\pi(\rho - K\rho') = 0,$$

eine Gleichung, welche zur Bestimmung der scheinbaren Dichte aus der

Digitized by Google

wahren und umgekehrt dienen kann. Beide Verteilungen, die scheinbare wie die wahre geben zur Entstehung derselben Potentialwerte Veranlassung, wenn bei Annahme der erstern die specifische inductive Capacität gleich 1, bei der der zweiten gleich K angesetzt wird.

Ganz analog finden wir die scheinbare Flächendichte, σ', aus der Gleichung

$$5) \qquad \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1} + \frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} + 4\pi\sigma' = 0.$$

während die wahre aus der Gleichung 2) zu berechnen ist.

Wenn ein festes Dielectricum vollkommen isolirt und an seiner Oberfläche von Anfang an keine Ladung hat, so bleibt seine wahre Electricitätsmenge stets gleich Null, von welchen electrischen Kräften es auch angegriffen werden mag.

In diesem Falle wird

$$K_1 \frac{\partial V_1}{\partial \nu_1} + K_2 \frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} = 0,$$

also nach Gleichung 5)

$$\frac{\partial V_1}{\partial \nu_1} = \frac{4\pi\sigma' K_2}{K_1 - K_2}, \quad \frac{\partial V_2}{\partial \nu_2} = \frac{4\pi\sigma' K_1}{K_1 - K_2}.$$

σ' ist die Flächendichte der auf der Oberfläche des Dielectricums scheinbar inducirten Electricität. Die scheinbare Ladung verschwindet, wenn die inducirende Kraft entfernt ist. Entladet man aber das Dielectricum während diese noch wirkt, etwa dadurch, dass man es durch eine Flamme führt, dann erscheint nach Entfernung der inducirenden Kraft auf der Oberfläche des Dielectricums eine wirkliche Ladung, welche der erstern scheinbaren entgegengesetzt ist.*)

*) Faraday, *Remarks on Static Induction* Proc. R. S. 1858, Febr. 12.

Staatliche Bibliothek Bamberg
Digitized by Google

Cap. III.

Arbeit und Energie in einem electrischen System.

—*—

Arbeit bei der Electrisirung eines Systems.

84. Die Definition des Potentials ergiebt nach Art. 70 für die Arbeit δW, welche geleistet werden muss, um eine Electricitätsmenge δe aus der Unendlichkeit (oder von einem Orte, wo das Potential Null ist) zu einem gegebenen System mit dem Potential V hinzubringen, den Ausdruck

$$\delta W = V \delta e$$

Dadurch wird aber die Ladung in einem Teile des Systems um δe vermehrt, und wenn sie daselbst ursprünglich die Grösse e hatte, wird sie jetzt $e + \delta e$. Die Arbeit, welche geleistet werden muss, um in den Teilen des Systems eine Aenderung der Ladungen hervorzubringen, wird also

1) $$W = \Sigma(\int V \delta e).$$

Das Integral bezieht sich auf die Aenderung der Ladung in einem bestimmten Teile des Systems, die Summe fasst alle Teile zusammen, deren Ladungen überhaupt geändert werden.

Aus dem in Art. 73 für das Potential eines Systems in einem Punkt gegebenen Ausdruck erhellt nun, dass man dasselbe als die Summe von Potentialen betrachten kann, die den einzelnen Teilen des Systems ihre Entstehung verdanken. Ist demnach V das Potential in einem Punkte, herrührend von einem System A, und V' das von einem System B, so ist das Potential, welches in dem fraglichen Punkte durch die gleichzeitige Existenz der Ladungen beider Systeme hervorgerufen wird, gleich $V + V'$.

Es folgt hieraus, dass wenn die Ladungen aller Teile eines Systems sich in demselben Verhältnis von n zu 1 ändern, das Potential des ganzen Systems in einem Punkte sich ebenfalls im Verhältnis von n zu 1 ändert.

Digitized by Google

Nach dieser Bemerkung wollen wir uns das Laden des Systems in folgender Weise ausgeführt denken.

Wir nehmen ein System von Körpern, das ganz frei von Electricität ist und sich auf dem Potential Null befindet, und laden alle Teile desselben gleichzeitig in ein und demselben Verhältnis zu ihren bezüglichen Endladungen. Beträgt dann in irgend einem Stadium der Operation die Ladung eines Teiles des Systems n Teile seiner schliesslichen Ladung e, so wird sein Potential in diesem Stadium auch gleich n Teilen von dem schliesslichen Wert seines Potentials V sein.

Der ganze Process der Ladung besteht nun darin, dass wir n von 0 bis 1 continuirlich anwachsen lassen. Steigt n um δn an, so wächst die Ladung des hervorgehobenen Teiles um $e\delta n$ und sein Potential um $V\delta n$. Die Arbeit, welche während dieser Verstärkung der Ladung an dem Teile geleistet werden muss, ist also bis auf unendlich kleine Grössen zweiter Ordnung

$$\frac{eV}{2}\Big((n+\delta n)^2 - n^2\Big) = eVn\,\delta n.$$

Daraus folgt für die Gesammtarbeit bei der Ladung aller Teile des Systems

$$W = \Sigma eV\int_0^1 n\,dn = \tfrac{1}{2}\Sigma eV,$$

das heisst, die halbe Summe aus den Producten der Ladungen der einzelnen Systemteile in die den betreffenden Teilen zugehörigen Potentiale.

Diese Arbeit muss im Verlaufe des Ladens von einer äussern Kraft geleistet werden, da aber unser System ein conservatives *) ist, so ändert sich ihr Wert nicht, wenn das System durch irgend einen andern Process als den von uns geschilderten auf dieselbe Ladung gebracht wird.

Wir dürfen also allgemein die Grösse

$$2) \qquad W = \tfrac{1}{2}\Sigma Ve$$

als die Energie des electrischen Systems, ausgedrückt durch die Ladungen und Potentiale der einzelnen Teile ansehen.

85a. Wir setzen den vorher beschriebenen Process fort, indem wir den Teilen des Systems so lange Electricität zuführen, bis ihre Ladungen die Werte e' und ihre Potentiale die Beträge V' erreichen.

Ist dann in irgend einem Augenblicke die Ladung eines Teiles gleich $e + n(e' - e)$, so ist das zugehörige Potential $V + n(V' - V)$, und die

*) Thomson und Tait, *Theoret. Physik* § 271. Deutsche Ausg. von 1871.

Digitized by Google

Arbeit bei Verstärkung der Electricitätsmenge dieses Teiles um $e' - e$ ist gegeben durch

$$\int_0^1 (e' - e)\Big(V + n(V' - V)\Big)\,dn = \tfrac{1}{2}(e' - e)\,(V + V').$$

Bezeichnet also W' die Energie des Systems bei der Ladung e', so haben wir

3a) $$W' - W = \tfrac{1}{2}\Sigma(e' - e)\,(V' + V).$$

Andererseits ist aber

$$W' = \tfrac{1}{2}\Sigma e' V' \text{ und } W = \tfrac{1}{2}\Sigma e V,$$

und damit wird

4) $$\Sigma e V' = \Sigma e' V.$$

Befindet sich also ein System von Körpern nach einander in zwei Zuständen (e, V) und (e', V'), so ist die Summe der Producte aus den Electricitätsmengen der einzelnen Körper in dem ersten Zustande in die entsprechenden Potentiale während des zweiten Zustandes gleich der Summe der Producte aus den Electricitätsmengen in dem zweiten Zustande in die entsprechenden Potentiale während des ersten Zustandes.

85b. Mit Hilfe der Gleichung unter 4) bekommt die unter 3a) die Form

3b) $$W' - W = \tfrac{1}{2}\Sigma(e + e')\,(V' - V).$$

Für unendlich kleine Zustandsänderungen haben wir also

5a) $$\delta W = \Sigma V \delta e,$$

5b) $$\delta W = \Sigma e \delta V.$$

Bezeichnen wir die Energie als Function der Ladungen der einzelnen Körper durch W_e und als Function der Potentiale durch W_V und beziehen den Index r auf einen bestimmten Körper des Systems, so folgt aus den Gleichungen unter 5)

6) $$V_r = \frac{\partial W_e}{\partial e_r},$$

7) $$e_r = \frac{\partial W_V}{\partial V_r}.$$

86. Aus dem unter 4) aufgestellten Satz der elementaren Electricitätslehre, der in dem Greenschen Satz in der analytischen Theorie der Electricität sein Anologon findet,*) ergeben sich durch Specialisirung des Anfangs- und Endzustandes viele sehr nützliche Resultate, von denen wir einige anführen wollen.

*) Doch ist dieser Satz 4) zuerst von Clausius, Wiedem. Ann. I. 493 aufgestellt worden. Anm. d. Uebers.

Digitized by Google

Wenn in dem System von Conductoren einer, A, weder am Anfang noch am Ende der Electrisirung eine Ladung besitzt, so ist $e = e' = 0$, und aus den Summen der Gleichung 4) verschwinden alle Glieder, die auf diesen Conductor Bezug haben.

Ganz dasselbe ist der Fall, wenn seine Potentialwerte V, V' zu Anfang und zu Ende gleich Null sind.

Sind daher in einem System von Conductoren alle bis auf zwei, A_r und A_s, entweder isolirt und ohne Ladung, oder electrisirt, aber mit der Erde in Verbindung, so bleibt

$$4_1) \qquad e_r V'_r + e_s V'_s = e'_r V_r + e'_s V_s .$$

Macht man noch

$$e_r = 1, \quad e_s = 0,$$

$$e'_r = 0, \quad e'_s = 1,$$

so wird

$$4_2) \qquad V'_r = V_s, \text{ d. h.}$$

Wenn eine Electricitätseinheit auf einen Conductor A_r gebracht das Potential eines sonst nicht geladenen zweiten Conductors A_s bis zu V ansteigen lässt, so verursacht eine Electricitätseinheit auf dem zweiten Conductor A_s in dem ersten nicht geladenen Conductor A_r ein Potential von derselben Grösse V, vorausgesetzt dass etwaige andere Conductoren isolirt und ohne Ladung oder zur Erde abgeleitet sind.

Beispielsweise ist das Potential einer mit der Electricitätseinheit geladenen leitenden Kugel auf einen um r von ihrem Mittelpunkte abstehenden äussern Punkt gleich r^{-1}; erteilen wir also einem ausserhalb einer Kugel im Abstand r von ihrem Centrum befindlichen Punkt eine Electricitätseinheit, so wird das Potential auf der Kugel, welche sonst keine Ladung besitzen soll, ebenfalls gleich r^{-1}.

Solche reciproke Beziehungen wie die obige zwischen zwei Conductoren finden sich in fast allen Zweigen der Wissenschaft, und sie sind ganz besonders dazu geeignet, Probleme auf andere schon gelöste zurückzuführen.

Setzen wir in 4_1)

$$V_r = 1, \quad V_s = 0,$$

$$V'_r = 0, \quad V'_s = 1,$$

so folgt

$$4_3) \qquad e_s = e'_r, \text{ d. h.}$$

Steigt das Potential in A_r von 0 bis 1, so wird in A_s dieselbe Electricitätsmenge inducirt wie in A_r, wenn das Potential in A_s sich von 0 bis 1 erhebt.

Digitized by Google

Als dritten Fall nehmen wir

$$V_r = 1, \quad e_s = 0,$$

$$V'_r = 0, \quad e'_s = 1.$$

Aus 4_1) ergiebt sich dann

4_4) $$e'_r + V_s = 0, \text{ d. h.}$$

Bleibt A_s ohne Ladung und steigt sein Potential, während A_r positiv bis zur Potentialeinheit geladen wird, von 0 bis V, so bekommt A_r, wenn sein Potential auf Null erhalten wird, während A_s mit einer Electricitätseinheit geladen wird, eine negative Ladung von dem Betrage V. Dieser dritte Fall entspricht wieder einem von Green aufgestellten Theorem.

Wir können ihm die folgende etwas allgemeinere Fassung geben, wenn wir auch noch andere Conductoren in die Betrachtung ziehen.

Erteilen wir in einem System von Körpern A_1, A_2, ..., einem, A_s, eine Electricitätseinheit, und finden wir dann auf den andern Körpern, während ihre Potentiale gleich Null sind, inducirte Ladungen η_1, η_2 ..., so wird das Potential von A_s, wenn es ungeladen bleibt, während die andern Conductoren bis zu den Potentialen V_1, V_2 ... electrisirt werden,

4_4) $$V_s = -\Sigma \eta_r V_r.$$

Kennen wir demnach in allen Punkten einer leitenden Schale die Flächendichte, wie sie von einem mit einer Electricitätseinheit geladenen innerhalb der Schale befindlichen Punkte inducirt wird, sind wir ferner im Stande, in allen Punkten der Innenfläche der Schale das Potential anzugeben, so vermögen wir auch umgekehrt das Potential in dem vorher geladenen innerhalb der Schale befindlichen Punkt zu berechnen, wenn auf die Schale eine Electricitätseinheit gebracht wird.

Daraus folgt der wichtige Satz:

Ist das Potential in allen Punkten einer geschlossenen Fläche gegeben, so kann es auch für jeden Punkt innerhalb derselben berechnet werden, wenn die Fläche keine electrischen Körper einschliesst; ebenso ist damit auch das Potential in jedem Punkt ausserhalb der Fläche bestimmbar, wenn sie keine electrischen Körper ausschliesst.

Theorie eines Systems von Conductoren.

87. Das electrische System bestehe aus den Conductoren A_1, A_2, ... A_n, denen die Ladungen e_1, e_2, .. e_n und die Potentiale V_1, V_2 ... V_n zugehören. Ferner sei das trennende Dielectricum überall von derselben Beschaffenheit und werde während der Ladung des Systems in keinem Teile electrisirt.

Digitized by Google

Nach Art. 84 ist das Potential jedes der Conductoren eine lineare homogene Function der n Ladungen, somit ist die Energie des Systems nach Gleichung 2) jenes Artikels eine homogene quadratische Function der n Ladungen, also

1a) $$W_e = \tfrac{1}{2} p_{11} e_1^2 + p_{12} e_1 e_2 + \ldots + p_{1n} e_1 e_n + \tfrac{1}{2} p_{22} e_2^2 + p_{23} e_2 e_3 + \ldots + p_{2n} e_2 e_n + \ldots + \tfrac{1}{2} p_{nn} e_n^2.$$

Daraus lässt sich dann das Potential jedes Conductors in dem System ableiten. Da nämlich das Potential als die Arbeit definirt ist, welche geleistet werden muss, wenn man eine Electricitätseinheit aus einem Orte, wo das Potential gleich Null ist, zu einem, wo es den vorgeschriebenen Wert hat, bringen will, und da weiter diese Arbeit lediglich dazu verwendet wird, um die Energie W zu vermehren, so muss offenbar das Potential eines Conductors — wie es auch die Gleichung 6) im Art. 85b aussagt — gleich der Derivirten der Energie nach der Ladung des Conductors sein.

Wir haben also allgemein

2)
$$\begin{aligned} V_1 &= p_{11} e_1 + p_{21} e_2 + \ldots + p_{n1} e_n, \\ V_2 &= p_{12} e_1 + p_{22} e_2 + \ldots + p_{n2} e_n, \\ &\text{- - - - - - - - - - - -} \\ V_n &= p_{1n} e_1 + p_{2n} e_2 + \ldots + p_{nn} e_n \end{aligned}$$

zu setzen.

Die Coefficienten p_{rs} heissen *Potentialcoefficienten*. Sie haben zwei Indices, deren erster mit dem Index der Ladung übereinstimmt, während der zweite mit dem des Potentials zusammenfällt.

Die n Potentialcoefficienten, deren Indices sich gleich sind, beziehen sich nur auf einen Conductor, so dass z. B. p_{rr} das Potential von A_r ist, wenn dieser Conductor mit der Electricitätseinheit geladen ist, die andern aber nicht electrisirt sind.

Die Coefficienten, deren Indices sich ungleich sind, stellen ebenfalls Potentiale dar, und zwar ist p_{rs} das Potential von A_s, wenn A_r mit der Electricitätseinheit geladen ist, die andern Conductoren aber wieder nicht electrisirt sind.

Aus den Gleichungen unter 1a) und 2) folgt

$$p_{rs} = \frac{\partial V_s}{\partial e_r} = \frac{\partial}{\partial e_r}\left(\frac{\partial W_e}{\partial e_s}\right) = \frac{\partial}{\partial e_s}\left(\frac{\partial W_e}{\partial e_r}\right) = \frac{\partial V_r}{\partial e_s} = p_{sr},$$

somit

3) $$p_{rs} = p_{sr},$$

ein Satz, der genau dasselbe aussagt, wie die Gleichung 4_2) in Art. 86.

Digitized by Google

Aus den Gleichungen unter 2), welche die Potentiale als Functionen der Ladungen bestimmen, kann man umgekehrt die Ladungen als Functionen der Potentiale darstellen. Ihre Auflösung ergiebt nämlich

$$4)\qquad \begin{aligned} e_1 &= q_{11} V_1 + q_{12} V_2 + \ldots + q_{1n} V_n, \\ e_2 &= q_{21} V_1 + q_{22} V_2 + \ldots + q_{2n} V_n, \\ &\text{- - - - - - - - - - - - -} \\ e_n &= q_{n1} V_1 + q_{n2} V_2 + \ldots + q_{nn} V_n. \end{aligned}$$

Daraus folgt analog der Gleichung unter 3)

$$q_{rs} = \frac{\partial e_r}{\partial V_s} = \frac{\partial}{\partial V_s}\left(\frac{\partial W_V}{\partial V_r}\right) = \frac{\partial}{\partial V_r}\left(\frac{\partial W_V}{\partial V_s}\right) = \frac{\partial e_s}{\partial V_r} = q_{sr},$$

somit

$$5)\qquad q_{rs} = q_{sr},$$

und das entspricht dem Satze 4_3) in Art. 86.

Weiter ist

$$1b)\qquad W = \tfrac{1}{2} e_1 V_1 + \tfrac{1}{2} e_2 V_2 + \ldots\ldots + \tfrac{1}{2} e_n V_n,$$

also

$$1c)\qquad \begin{aligned} W_V = \tfrac{1}{2} q_{11} V_1^2 + q_{12} V_1 V_2 + \ldots q_{1n} V_1 V_n + \tfrac{1}{2} q_{22} V_2^2 + q_{23} V_2 V_3 + \ldots \\ + q_{2n} V_2 V_n + \ldots + \tfrac{1}{2} q_{nn} V_n^2, \end{aligned}$$

eine Darstellung der Energie als homogene quadratische Function der Potentiale.

Die Coefficienten q_{rr}, deren Indices einander gleich sind, bezeichnen wir als die Capacitäten der betreffenden Conductoren. Daraus ergiebt sich die folgende

Definition. Unter *Capacität* eines Conductors versteht man die Electricitätsmenge, die derselbe in sich fasst, wenn sein Potential gleich der Einheit ist, während alle andern Conductoren des electrischen Feldes sich auf dem Potential Null befinden.

Dies ist die eigentliche Definition der Capacität eines Conductors, und so oft keine nähere Specificirung hinzugefügt ist, verstehen wir auch unter Capacität die so begrenzte Grösse. Manchmal ist es aber von Vorteil, die Bedingungen, denen die andern Conductoren zu genügen haben, für alle oder für einen Teil derselben in anderer Weise festzusetzen, etwa z. B., dass die Ladung nur eines Teiles der Conductoren gleich Null ist. Immer aber ist erforderlich, dass der Conductor, dessen Capacität seiner Ladung gleich sein soll, das Potential Eins hat.

Ist von der Capacität eines Conductors ohne nähere Angaben über Gestalt und Lage anderer Conductoren die Rede, so versteht man darunter die Capacität desselben, wenn kein anderer Leiter oder electrisirter Körper in endlicher Entfernung von ihm vorhanden ist.

Die Coefficienten q_{rs}, deren Indices einander ungleich sind, bezeichnen wir als *Inductionscoefficienten*, denn q_{rs} giebt die Ladung an, welche in

Digitized by Google

A_r inducirt wird, wenn man A_s bis zur Potentialeinheit electrisirt, während die Potentiale aller andern Conductoren auf Null erhalten werden.

Die Coefficienten p und q sind, wie ich später beweisen werde, in jedem Falle eindeutig bestimmbar. Ihre mathematische Berechnung ist aber, weil sie von Form und Lage der einzelnen Conductoren abhängen, meist sehr schwierig. Für die einfachern Fälle werde ich sie noch ableiten, und in den complicirten Fällen werde ich wenigstens zeigen, wie ihre Beträge experimentell eruirt werden können.

Man bedient sich in Untersuchungen, in welchen nur von Capacitäten und Inductionscoefficienten die Rede ist, für diese mit Vorteil der Bezeichnung $[AP]$, indem man unter diesem Symbol die im Conductor A während einer Electrisirung des Conductors P bis zur Potentialeinheit inducirte Ladung versteht.

Darnach bedeutet $[(A+B)(P+Q)]$ die Ladung, welche in den Conductoren A und B inducirt wird, während man die Conductoren P und Q bis zum Potential 1 electrisirt.

Da übrigens, wie eine leichte Ueberlegung zeigt,

$$6)\quad [(A+B)(P+Q)]=[AP]+[AQ]+[BP]+[BQ]=[(P+Q)(A+B)]$$

ist, so folgt, dass man die benutzten Symbole ganz so durch Addition und Multiplication zusammensetzen kann wie quantitative Grössen.

Das Symbol $[AA]$ bedeutet nach dem Vorigen die Ladung auf A, wenn sein Potential gleich 1 ist, es bezeichnet also die Capacität von A.

Aehnlich ist $[(A+B)(A+Q)]$ die Summe der auf A und B auftretenden Ladungen, wenn A und Q zum Potential 1 electrisirt werden, und die andern Conductoren das Potential Null behalten. Sie kann in die vier Partialladungen

$$[AA]+[AQ]+[BA]+[BQ]$$

zerlegt werden.

Zufolge der Gleichung

$$7)\qquad 2[AB]=[(A+B)(A+B)]-[AA]-[BB]$$

kann man den Inductionscoefficienten zweier Conductoren aus ihren Capacitäten, wenn man sie getrennt als zwei Conductoren betrachtet und der Capacität, wenn man sie zu einem Conductor vereinigt denkt, zusammensetzen.

Der Grund dafür, dass die Inductionscoefficienten sich so zerlegen lassen, ist darin zu suchen, dass diese Coefficienten eben Ladungen bezeichnen, die man als quantitative Grössen nach den algebraischen Regeln behandeln kann. Bei Potentialen hat die Summe zweier Potentiale V_1 und V_2 auf zwei Conductoren keine rechte auf Erscheinungen sich beziehende physikalische Bedeutung, wenn auch die Differenz $V_1 - V_2$ eine electromotorische Kraft bezeichnet. Deshalb kann man auch mit entsprechenden Symbolen für die Potentialcoefficienten nicht so operiren, wie es oben bei den Inductionscoefficienten geschehen ist.

Digitized by Google

Dimensionen der Potential- und Inductionscoefficienten.

88. Die Dimensionen der Inductionscoefficienten q_{rs} ergeben sich aus der Bemerkung, dass nach den Gleichungen unter 4) $q_{rs} V_s$ eine Ladung bezeichnet. Da aber das Potential einer Ladung e in der Entfernung r gleich e/r ist, so ist eine Ladung gleich dem Producte einer Linie in ein Potential, und hieraus folgt, dass die Coefficienten der Induction und Capacität die Dimensionen von Linien haben.

Jeder dieser Coefficienten kann also durch eine gerade Strecke dargestellt werden, deren Länge unabhängig von dem System der adoptirten Einheiten ist.

Eine ähnliche Betrachtung ergiebt, dass die Potentialcoefficenten in ihren Dimensionen reciproken Linien gleichen.

Bedingungen, denen die Potential- und Inductionscoefficienten genügen müssen.

89a. Eine Reihe von Bedingungen für die obengenannten Coefficienten ergiebt sich aus der Bemerkung, dass die Energie eines Systems ihrer Natur nach eine positive Grösse ist. Soll also W als quadratische homogene Function der Ladungen e für alle positiven und negativen Werte derselben stets positiv sein, so müssen bei einer bestimmten Anordnung der Conductoren die n Determinanten

$$p_{11}, \begin{vmatrix} p_{11}, & p_{12} \\ p_{21}, & p_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} p_{11}, & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21}, & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & & & \\ p_{n1}, & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{vmatrix}$$

positiv sein. Das giebt n Bedingungen.

n Conductoren lassen sich aber in $2^n - 1$ Arten zu einem System vereinigen und demgemäss bestehen auch zwischen den n^2 Coefficienten $2^n - 1$ der obigen Reihe entsprechende Bedingungsreihen.

Unabhängig von einander können jedoch nur n Bedingungen sein.

Betrachtet man die Energie als homogene quadratische Function der Potentiale, so ergeben sich für die Capacitäts- und Inductionscoefficienten ganz entsprechende Bedingungen wie für die Potentialcoefficienten.

Sätze über Potential- und Inductionscoefficienten.

89b. Bei Gelegenheit der Theorie der Kraftlinien, Art. 82, haben wir gesehen, dass die Ladung eines Conductors durch den Ueberschuss der von ihm ausgehenden Kraftlinien über die in ihn eintretenden gemessen

Digitized by Google

wird. Ist ein Conductor gar nicht geladen, so müssen also ebensoviele Kraftlinien durch seine Oberfläche eintreten als von ihr ausgehen. Nun laufen aber Kraftlinien stets von Orten höhern zu solchen niederern Potentials, somit kann ein ungeladener Conductor in einem electrischen Felde nicht das grösste in demselben vorhandene Potential haben. Die Potentiale ungeladener Conductoren liegen also zwischen dem grössten und kleinsten Potentialwerte. Laden wir aber einen Körper mit der Electricitätseinheit, während alle andern Conductoren ungeladen bleiben, so ist sein Potential p_{rr}, und das eines ungeladenen Conductors p_{rs}, und daraus folgt, dass p_{rs} nicht grösser als p_{rr} oder p_{ss} sein kann.

In einem Falle ist das Potential eines ungeladenen Conductors gleich dem eines geladenen, dann nämlich, wenn der geladene Conductor den ungeladenen vollständig umhüllt. Sobald aber die Conductoren sich ausschliessen, muss stets

$$p_{rr},\ p_{ss} > p_{rs}$$

sein.

Ferner ist bei der zuletzt angeführten Ladungsweise das Potential des geladenen Conductors, also p_{rr}, das grösste Potential im electrischen Felde und Null in der Unendlichkeit das kleinste, somit müssen die Potentiale, p_{rs}, der ungeladenen Conductoren zwischen p_{rr} und Null liegen, das heisst mit p_{rr} dasselbe Zeichen haben. p_{rr} ist aber positiv, wir haben also den Satz:

I.) Alle Potentialcoefficienten sind positiv und kein Coefficient p_{rs} ist grösser wie p_{ss} oder p_{rr}.

89c. Wir bringen einen Conductor A_r auf die Potentialeinheit, während alle andern Conductoren A_s auf dem Potentialwert Null erhalten werden. Die Ladung von A_r ist dann q_{rr}, das heisst es gehen q_{rr} Kraftlinien von diesem Conductor aus. Von diesen Kraftlinien kann ein Teil in den andern Conductoren sein Ende finden und ein anderer Teil bis in die Unendlichkeit verlaufen. Es setzt sich aber keine Kraftlinie von einem der auf das Potential Null erhaltenen Conductoren noch weiter ins Unendliche fort, weil eben Null der kleinste Wert des Potentials ist, und Kraftlinien von Orten höhern zu solchen niederern Potentials verlaufen. Eben so wenig kann eine Kraftlinie zwei dieser Conductoren verbinden.

Ein Conductor A_s, dessen Potential gleich Null ist, kann also nur eintretende Kraftlinien besitzen, und er hat überhaupt keine Kraftlinien, wenn er durch einen andern Conductor vollständig von A_r getrennt ist. Die Ladung q_{rs} von A_s wird also höchstens gleich Null sein und ist im allgemeinen von entgegengesetztem Zeichen wie q_{rr} bezüglich q_{ss}.

Weiter sind im ganzen electrischen Felde nur soviel Kraftlinien vorhanden, als von A_r ausgehen, es können also in den andern Conductoren zusammen höchstens q_{rr} Kraftlinien ihr Ende finden, und deshalb kann die Summe der Ladungen der andern Conductoren absolut genommen höchstens gleich q_{rr}, der Ladung von A_r, sein. Sie ist dieser in der Tat gleich,

Digitized by Google

wenn ein Conductor A_t den Conductor A_r vollständig einhüllt, weil dann alle Kraftlinien in A_t und den durch A_t ausser A_r sonst noch eingeschlossenen Conductoren ihr Ende finden müssen. Im allgemeinen ist jene Summe aber kleiner, weil sich auch Kraftlinien in die Unendlichkeit verlieren werden. Wir haben also den Satz:

II.) Die Capacitäten sind stets positiv, die Inductionscoefficienten stets negativ. Die Summe aller Inductionscoefficienten, die einem einzigen Conductor ihre Entstehung verdanken, ist numerisch nicht grösser als die Capacität dieses Conductors.

Ich habe die beiden Theoreme unter 89b) und 89c) unabhängig von einander vermittelst der Eigenschaften der Kraftlinien abgeleitet und überlasse es dem Leser zu versuchen, ob das eine Theorem eine mathematische Consequenz des andern ist.

Weiter ergiebt sich der Satz:

III.) Wenn im electrischen Felde nur ein Conductor vorhanden ist, so ist sein Potentialcoefficient auf sich selbst gleich dem reciproken Wert seiner Capacität.

90. Man nennt den Schwerpunkt der auf der Oberfläche eines allen äussern Einflüssen entzogenen Conductors verteilten Electricität den *Electrischen Mittelpunkt* des Conductors.

Bei symmetrisch um einen Punkt geformten Conductoren ist der Symmetriepunkt selbst der electrische Mittelpunkt.

Bei Conductoren, deren Dimensionen klein sind im Verhältnis zu den in Frage kommenden Distanzen, lässt sich seine Lage mit genügender Genauigkeit durch Schätzung finden. Rechnet man die Distanzen c vom electrischen Mittelpunkt ab, so muss das Potential solcher Conductoren in der Entfernung c zwischen

$$\frac{e}{c}\left(1+\frac{a^2}{c^2}\right) \text{ und } \frac{e}{c}\left(1-\frac{1}{2}\frac{a^2}{c^2}\right)$$

liegen, wenn e die Ladung des Conductors und a den Abstand seines vom electrischen Mittelpunkt am meisten entfernten Oberflächenpunktes bedeutet.

Denkt man sich nämlich die Ladung e zu gleichen Teilen in zwei Punkte concentrirt, die zu entgegengesetzten Seiten des electrischen Mittelpunktes liegen und von ihm um a abstehen, so ist das Potential auf einen Punkt in ihrer Verbindungslinie, weil a sehr klein gegen c sein sollte, gleich der ersten oben angegebenen Grenze und das auf einen Punkt in einem Lot zu ihrer Verbindungslinie gleich der zweiten Grenze, demnach das Potential in Punkten einer mit c um den electrischen Mittelpunkt geschlagenen Kugel kleiner als der erste Grenzwert und grösser als der zweite.

IV.) Befinden sich im electrischen Felde zwei Conductoren, so kann nach dem obigen in ihrem Potential auf einander, in $1/c'$, die Grösse c' von dem Abstande c ihrer electrischen Mittelpunkte um nicht mehr als um $(a^2+b^2)/c$ verschieden sein, wenn a und b die Abstände der am meisten von den be-

Digitized by Google

züglichen Mittelpunkten entfernten Teile der Conductor-Oberflächen von diesen Mittelpunkten angeben.

91a. V.) Durch die Einführung eines neuen Conductors in ein electrisches Feld werden die Potentialcoefficienten der schon vorhandenen Conductoren auf sich selbst verkleinert, und um so mehr verkleinert, je grösser der neu eingeführte Körper ist.

Wir nehmen zunächst an, dass dieser neu eingeführte Körper B kein Leiter ist und keine Electricität enthält, laden einen der Conductoren, etwa A_1, mit einer Electricitätsmenge e_1 und lassen alle andern Conductoren unelectrisirt, dann ist die Energie

$$W = \tfrac{1}{2} e_1 V_1 = \tfrac{1}{2} e_1^2 p_{11},$$

unbeschadet ob der Körper B existirt oder nicht. Wird nun B leitend, so muss sich in ihm die Electricität von Orten höhern zu Orten niederern Potentials fortbewegen, dadurch tritt eine Verminderung der electrischen Energie des Systems ein, und die Grösse $\frac{1}{2} e_1^2 p_{11}$ wird kleiner. e_1 kann sich aber nicht ändern, also muss p_{11} kleiner werden, wie es der obige Satz ausspricht.

Führen wir noch einen zweiten Leiter c ein, so wird zunächst p_{11} noch weiter vermindert, verbinden wir B mit c durch einen Draht, so fliesst eventuell wieder Electricität durch denselben von Orten höhern zu solchen niederern Potentials, das heisst p_{11} wird durch die Herstellung der Communication zwischen B und c noch mehr verringert.

Daraus folgt, dass die Verringerung des p_{11} durch Einführung des B grösser als durch die eines von B umschlossenen Körpers und kleiner als durch die eines Körpers, der B umhüllt, ist.

Der Betrag der Verringerung von p_{11} hängt natürlich von der Form und Lage des eingeführten Körpers ab; eine Kugel vom Radius $b/2$ im Abstand r vom geladenen Leiter verringert p_{11}, wie wir im Capitel XI sehen werden, um nahezu $b^3/8r^4$. Die Verringerung durch jeden andern Körper, dessen grösster Diameter gleich b ist, wird also kleiner als $b^3/8r^4$ sein, wo r von der Mitte von b gerechnet ist.

Ist dieser grösste Durchmesser b von B so klein gegen die Entfernung des eingeführten Conductors B vom Conductor A_1, dass man Grössen von der Ordnung $b^3/8r^4$ vernachlässigen kann, so wird auch die Verkleinerung des p_{11} durch B sehr unbedeutend sein. Der Potentialcoefficent des Conductors A_1 auf sich selbst wird dann sehr näherungsweise mit dem reciproken Werte seiner Capacität, wenn er sich allein im electrischen Felde befindet, confundirt werden können.

91b. VI.) Bringt man in ein electrisches Feld einen runden Conductor A_3, dessen Dimensionen gegen die Abstände der Conductoren untereinander klein sind, so wird der Potentialcoefficent eines Conductors A_1 gegen einen Conductor A_2 vergrössert oder verkleinert, je nachdem A_3 innerhalb

Digitized by Google

oder ausserhalb einer mit der Entfernung von A_1 gegen A_2 als Durchmesser geschlagenen Kugel sich befindet.

Eine positive Electricitätseinheit auf A_1 bringt nämlich in A_3 eine derartige electrische Verteilung hervor, dass $+e$ sich nach der von A_1 entferntesten $-e$ sich nach der A_1 nächsten Stelle von A_3 begiebt. Das Potential dieser in A_3 entstandenen Verteilung auf A_2 ist nun positiv oder negativ, das heisst das Potential von A_1 auf A_2 wird vergrössert oder verkleinert, je nachdem die Electricität $+e$ oder $-e$ des Conductors A_3 dem Conductor A_2 am nächsten ist, und das hängt, wenn A_3 kein verlängerter Körper ist, davon ab, ob der Winkel $A_1 A_3 A_2$ stumpf oder spitz ist, also ob A_3 in der bezeichneten Kugel oder ausserhalb derselben liegt.

Wenn der Conductor A_3 statt rund zu sein eine verlängerte Form hat, so kann er das Potential von A_1 auf A_2 vergrössern, wenn seine lange Axe tangential zum Kreise $A_1 A_3 A_2$ ist, selbst wenn er ganz ausserhalb desselben sich befindet. Umgekehrt kann er dieses Potential verkleinern, wenn seine lange Axe senkrecht zum Kreise verläuft, selbst wenn er ganz innerhalb des Kreises liegt.

Solche Bemerkungen sollen aber nur dazu dienen, dem Leser in gegebenen Fällen eine rohe Vorstellung von den zu erwartenden Erscheinungen zu verleihen.

91c. VII.) Ein neu eingeführter Conductor vergrössert die Capacitäten und verkleinert die numerischen Beträge der Inductionscoefficienten der schon vorhandenen Conductoren.

Wir geben dem Conductor A_1 ein Potential gleich 1 und machen die Potentiale aller anderen Conductoren gleich Null. Da der neu eingeführte Conductor durch Induction sich entgegengesetzt wie A_1 also negativ, ladet, so inducirt er in den andern Conductoren positive Electricitätsmengen. Er vermehrt also die positive Ladung von A_1 und verringert die negativen Ladungen der andern Conductoren.

Specielle Anwendungen.

92a. *Zwei kleine Conductoren.* Es seien A_1 und A_2 zwei Conductoren in einer mittlern Entfernung r von einander, die selbst gegen ihre grössten Dimensionen noch sehr gross ist. Bezeichnen K_1 und K_2 ihre Capacitäten, wenn jeder von ihnen sich allein im electrischen Felde befindet, dann ist dem obigen zufolge

$$p_{11} = \frac{1}{K_1}, \quad p_{12} = \frac{1}{r}, \quad p_{22} = \frac{1}{K_2},$$

also

$$V_1 = e_1 K_1^{-1} + e_2 r^{-1},$$

$$V_2 = e_1 r^{-1} + e_2 K_2^{-1}.$$

Digitized by Google

Berechnet man aus den beiden letzten Gleichungen e_1 und e_2 und benutzt die Gleichungen 4) in Art. 87, so folgt

$$q_{11} = K_1(1 - K_1 K_2 r^{-2})^{-1},$$

$$q_{12} = -K_1 K_2 r^{-1}(1 - K_1 K_2 r^{-2})^{-1},$$

$$q_{22} = K_2(1 - K_1 K_2 r^{-2})^{-1},$$

q_{11}, q_{22} sind die Capacitäten der beiden Conductoren, wenn sie, statt einzeln im electrischen Felde zu sein, sich gleichzeitig in demselben in einer Entfernung r von einander befinden.

92b. *Zwei Condensatoren.* Zwei Körper, die sich so nahe nebeneinander befinden, dass ihre gegenseitige Induction eine beträchtliche Grösse erreicht, bilden zusammen einen *Condensator*, oder, was dasselbe ist, die *Electroden* eines Condensators.

Es seien A, B die Electroden des Condensators (A, B), L gebe die Capacität von A, N die von B an, wenn (A, B) sich allein im electrischen Felde befindet, M bezeichne die gegenseitige Induction von A und B (M ist also eine negative Grösse). Entsprechend seien l, n, m Capacitäten und Induction der Electroden a, b eines andern Condensators (a, b) unter der Bedingung, dass er allein im Felde vorhanden ist.

Zunächst haben wir, wenn jeder Condensator für sich allein besteht, die Gleichungen

$$p_{AA} = D^{-1}N, \qquad p_{aa} = d^{-1}n,$$

$$p_{AB} = p_{BA} = -D^{-1}M, \quad p_{ab} = p_{ba} = -d^{-1}m,$$

$$p_{BB} = D^{-1}L, \qquad p_{bb} = d^{-1}l,$$

wo

$$D = LN - M^2, \quad d = ln - m^2$$

ist.

Befinden sich die beiden Condensatoren in einer Entfernung R von einander, die so gross ist, dass ihre Dimensionen dagegen verschwinden, so werden die obigen Potentialcoefficienten auch für den Fall gelten, dass beide Condensatoren gleichzeitig im electrischen Felde vorhanden sind. Es kommen dann noch 8 Coefficienten p hinzu, die, weil das Potential zweier Conductoren in sehr grosser Entfernung R von einander gleich R^{-1} ist, alle den Wert R^{-1} haben werden. Es gelten demnach noch die 8 Gleichungen

$$p_{Aa} = p_{aA} = p_{Ba} = p_{aB} = p_{Ab} = p_{bA} = p_{Bb} = p_{bB} = R^{-1}.$$

Nach Art. 87, 2) werden dann die Potentiale der 4 einzelnen Electroden

Digitized by Google

$$V_A = D^{-1}Ne_A - D^{-1}Me_B + R^{-1}e_a + R^{-1}e_b,$$
$$V_B = -D^{-1}Me_A + D^{-1}Le_B + R^{-1}e_a + R^{-1}e_b,$$
$$V_a = R^{-1}e_A + R^{-1}e_B + d^{-1}ne_a - d^{-1}me_b,$$
$$V_b = R^{-1}e_A + R^{-1}e_B - d^{-1}me_a + d^{-1}le_b.$$

Löst man diese Gleichungen nach e_A, e_B, e_a, e_b auf, so folgt aus den Gleichungen 4) in Art. 87

$$q_{AA} = L' = L + \frac{(L+M)^2(l+2m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)},$$
$$q_{AB} = M' = M + \frac{(L+M)(M+N)(l+2m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)},$$
$$q_{Aa} = -\frac{R(L+M)(l+m)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)},$$
$$q_{Ab} = -\frac{R(L+M)(m+n)}{R^2-(L+2M+N)(l+2m+n)}.$$

Die 12 andern Coefficienten $q_{BA}=q_{AB}$, $q_{BB}=N'$, q_{Ba}, q_{Bb}, $q_{aa}=l'$, $q_{ab}=q_{ba}=m'$, q_{aA}, q_{aB}; $q_{bb}=n'$, q_{bA}, q_{bB} ergeben sich aus den obigen 4, indem man N mit L, die grossen mit den kleinen Buchstaben vertauscht, endlich nach der letztern Vertauschung noch n in l verwandelt.

L', M', N'; l', m', n' haben für die einzelnen Conductoren, wenn beide Condensatoren gleichzeitig im Felde sind, dieselbe Bedeutung wie L, M, N; l, m, n, wenn nur je einer sich daselbst befindet.

Wenn ausser dem Condensator (A, B) nur noch ein Conductor a in der Entfernung R von diesem vorhanden ist, so muss $m=n=o$ sein, also

$$q_{AA} = L' = L + \frac{(L+M)^2 l}{R^2 - l(L+2M+N)},$$
$$q_{AB} = q_{BA} = M' = M + \frac{(L+M)(M+N)l}{R^2-l(L+2M+N)},$$
$$q_{Aa} = -\frac{Rl(L+M)}{R^2-l(L+2M+N)}.$$

Sind nur zwei Conductoren A und a in der grossen Entfernung R von einander vorhanden, so ist noch einfacher

$$q_{AA} = L' = L + \frac{L^2 l}{R^2 - Ll}, \quad q_{Aa} = -\frac{RLl}{R^2-lL},$$
$$q_{aa} = l' = l + \frac{l^2 L}{R^2 - lL},$$

und diese Ausdrücke fallen mit den in Art. 92 a) abgeleiteten zusammen.

Digitized by Google

Die Grösse $L + 2M + N$ giebt die gesammte Ladung eines Condensators, wenn seine beiden Electroden des Potential 1 haben, sie ist nicht grösser als die Hälfte des grössten Diameters des Condensators.

Diese Ladung $L + 2M + L$ verteilt sich so, dass die erste Electrode die Ladung $L + M$, die zweite die $N + M$ erhält. Da M eine negative Grösse ist, so sind diese Ladungen positiv und kleiner als die Capacitäten der Electroden (jede allein im Felde gedacht).

Die obigen Beispiele beziehen sich zwar nur auf näherungsweise gelöste Probleme, sie sind aber insofern von Wichtigkeit als sie den Weg zeigen, den man zur Lösung verwickelter Aufgaben einzuschlagen hat, welche wegen etwaiger complicirter Form der Conductoren eine strenge mathematische Behandlung nicht zulassen.

Arbeit während der Verschiebung eines Systems geladener Conductoren.

93a. *Ladungen unveränderlich.* Die Conductoren sollen zunächst isolirt sein, ihre Ladungen können sich dann während der Verschiebung nicht ändern. Ist daher die Energie vor der Verschiebung

$$W = \tfrac{1}{2}\Sigma e V,$$

so beträgt sie nach derselben

$$W' = \tfrac{1}{2}\Sigma e V'.$$

Die Arbeit der electrischen Kräfte während der Verschiebung, also $W - W'$, ist daher

$1_1)$ $$W - W' = \tfrac{1}{2}\Sigma e (V - V'),$$

gleichgültig ob die Verschiebung beträchtlich oder gering ist.

Bezeichnen wir weiter mit φ_r die Variabele, von der eine bestimmte Verschiebung abhängt, mit Φ_r die Kraft, welche eine solche Verschiebung φ_r zu Stande bringt, und rechnen Φ_r positiv, wenn es φ_r zu vergrössern sucht, so ist

$$\Phi_r \partial \varphi_r = -\partial W_e.$$

Die Kraft ist also

2a) $$\Phi_r = -\frac{\partial W_e}{\partial \varphi_r},$$

wo W_e die Energie als Function der Ladungen angiebt.

93b. Wir haben aber für die Energie drei Ausdrücke aufgestellt.

$$W = \tfrac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n} e_r V_r$$

als Function der Ladungen und Potentiale;

Digitized by Google

$$W_e = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n} e_r e_s p_{rs}$$

als Function der Ladungen und der Potentialcoefficienten, welche ihrerseits von den die Configuration des Leitersystems bestimmenden Variabeln abhängen;

$$W_V = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{r=n}\sum_{s=1}^{s=n} V_r V_s q_{rs}$$

als Function der Potentiale und mittelbar der Variabeln, die zur Festsetzung der Configuration des Systems dienen.

Diese drei Darstellungen sind sich natürlich vollkommen gleichwertig, so dass

$$W = W_e = W_V$$

ist. Demnach haben wir auch

$$W_e + W_V - 2W = 0.$$

Bezeichnet also e_r eine der zur Bestimmung der Configuration des Systems dienenden Variabeln, so ergiebt die vollständige Variation der letzten Gleichung nach den Ladungen, den Potentialen und den Variabeln

$$\sum\left\{\left(\frac{\partial W_e}{\partial e_s} - V_s\right)\delta e_s + \left(\frac{\partial W_V}{\partial V_s} - e_s\right)\delta V_s\right\} + \sum\left(\frac{\partial W_e}{\partial \varphi_r} + \frac{\partial W_V}{\partial \varphi_r}\right)\delta\varphi_r = 0.$$

Nach den Gleichungen 6) und 7) in Art. 85b verschwinden die Factoren der δe_s und δV_s, und da ausserdem die $\delta\varphi_r$ unabhängig von einander sind, so folgt die Beziehung

3) $$\frac{\partial W_e}{\partial \varphi_r} + \frac{\partial W_V}{\partial \varphi_r} = 0.$$

Daraus ergiebt sich

2b) $$\Phi_r = \frac{\partial W_V}{\partial \varphi_r}.$$

93c. *Potentiale unveränderlich.* Integrirt man die Gleichung unter 2b), so folgt

$$A = \int \Phi\, \partial\varphi = \int \partial W_V$$

Soll also die Verschiebung der Conductoren so vor sich gehen, dass die Potentiale dabei nicht geändert werden, so hat man

1_2) $$A = W'_V - W_V.$$

Die Arbeit, welche die electrischen Kräfte während einer solchen Verschiebung leisten, ist also gleich dem Betrag, um welchen die electrische Energie während der Verschiebung anwächst.

Digitized by Google

Der Sinn dieses Satzes, welcher eine Beziehung zwischen einer geleisteten Arbeit und einer angewachsenen Energie aufstellt, ist aber der, dass wenn wirklich die Potentiale der Conductoren durch die Verschiebung nicht afficirt werden sollen, dem System von Aussen her, etwa durch eine Voltasche Batterie, Energie zugeführt werden muss.

Die Arbeit, welche die Batterie verbraucht, ist gleich der Summe aus der von den electrischen Kräften geleisteten Arbeit und dem Anwuchs der Energie des Systems, sie ist also zufolge des Satzes unter 1_2) zweimal so gross wie die Arbeit, welche von den electrischen Kräften des Systems geleistet wird.

Beziehungen zwischen Körpern, die in ihrer Form oder in ihrer Ladung sich ähnlich sind.

94. Wenn zwei Systeme einander geometrisch ähnlich sind, das heisst, wenn correspondirende Strecken in ihnen überall in demselben Verhältnis $L : L'$ zu einander stehen, und wenn ferner die Leiter in beiden Systemen durch dasselbe Dielectricum von einander getrennt werden, so verhalten sich die Capacitäten entsprechender Leiter wie L zu L'.

Seien nämlich die Electricitätsmengen auf zwei entsprechenden Elementen A und A' beider Systeme gleich e bezüglich e', dann ist das Potential von A auf ein anderes Element B des ersten Systems gleich $V = e/AB$ und das Potential von A' auf ein dem B entsprechendes Element $V' = e'/A'B'$. Da aber $AB : A'B' = L : L'$ ist, so folgt

1_1) $$e : e' = LV : L'V',$$

woraus sich bei $V = V' = 1$ die Richtigkeit des obigen Satzes ergiebt.

Wenn aber bei Fortbestand des geometrischen Aehnlichkeitsverhältnisses beide Systeme verschiedene Dielectrica als Zwischenmedium haben, so dass die specifische inductive Capacität in dem einen gleich K, in dem andern gleich K' ist, so ergiebt sich

1) $$e : e' = LKV : L'K'V',$$

und diese Gleichung lehrt das Verhältnis der Ladungen entsprechender Teile der beiden Systeme kennen, wenn erstens diese Systeme geometrisch ähnlich sind, also entsprechende Strecken sich wie L zu L' verhalten, zweitens die specifischen inductiven Capacitäten der Dielectrica sich wie K zu K' verhalten, und drittens die Potentiale an entsprechenden Stellen in der Proportion von V zu V' stehen.

Für entsprechende Capacitäts- oder Inductionscoefficienten q, q' folgt hieraus

2) $$q : q' = LK : L'K'$$

und für entsprechende Potentialcoefficienten p, p'

3) $$p : p' = (LK)^{-1} : (L'K')^{-1}.$$

Digitized by Google

Verschiebt man zwei entsprechende Körper beider Systeme um Strecken, die zu einander in dem Verhältnis von $L : L'$ stehen, und braucht man dazu in dem einen Systeme eine Kraft F, in dem andern eine Kraft F', so ist das Verhältnis der geleisteten Arbeiten A, A' zu einander gegeben durch

4) $$A : A' = LF : L'F'.$$

Weiter stehen die totalen Energieen W, W' beider Systeme dem obigen zufolge im Verhältnis von eV zu $e'V'$, so dass

5) $$W : W' = eV : e'V'$$

ist, und das giebt zusammengehalten mit der Definition der Energie als Arbeit

6) $$FL : F'L' = eV : e'V'.$$

Für das Verhältnis der zur Verschiebung nötigen Kräfte folgt daraus wegen der Gleichung 1)

7a) $$F : F' = KV^2 : K'V'^2$$

oder

7b) $$F : F' = \frac{e^2}{L^2K} : \frac{e'^2}{L'^2K'}.$$

Nach der ersten dieser Proportionen ist das Verhältnis dieser Kräfte unabhängig von den Dimensionen der Systeme und gleich dem der Producte aus den Quadraten der electromotorischen Kräfte in die specifischen inductiven Capacitäten.

Bringt man also zwei Conductoren in eine Flüssigkeit, deren specifische inductive Capacität grösser als die der Luft ist, so werden sie sich nach der Electrisirung zu bestimmten Potentialen hier stärker anziehen oder abstossen, als wenn sie sich in der Luft befänden und dort zu denselben Potentialen geladen würden.

Nach der zweiten Proportion verhalten sich die beiden Kräfte gerade wie die Quadrate der entsprechenden Ladungen und umgekehrt wie die Quadrate der Distanzen und die einfachen Potenzen der inductiven Capacitäten.

Ladet man demnach zwei Conductoren mit denselben Electricitätsmengen e, e' einmal in Luft und ein andermal in einer Flüssigkeit, die ein grösseres specifisches Inductionsvermögen als die Luft besitzt, so werden sie in letzterer sich weniger stark anziehen, bezüglich abstossen als in der Luft.

Digitized by Google

Cap. IV.

Allgemeine Theoreme.

—×—

Vorbemerkungen.

95a. Wir haben im zweiten Capitel die Potentialfunction unter Annahme einer Wirkung in die Ferne zu berechnen gelernt, und sie als Resultante der verschiedenen Einzelwirkungen der electrisirten Körperteile auf einander dargestellt.

Daraus haben wir dann eine Anzahl ihrer Eigenschaften abgeleitet.

Wir schlagen nun den entgegengesetzten Weg ein, indem wir die Eigenschaften der Potentialfunction als bekannt voraussetzen und aus ihnen die Form der Potentialfunction zu ergründen suchen.

Die erste directe Methode ist nur da anwendbar, wo ausser der geometrischen Configuration des electrischen Systems auch die electrische Verteilung in allen seinen Partieen gegeben ist. Ihre Hauptaufgabe besteht also in der Bestimmung der electrischen Kräfte, wenn die Electricität in und auf Körpern in vorgeschriebener Weise angehäuft ist.

Die zweite Methode dagegen dient zur Ergründung der electrischen Verteilung und des Potentials aus den Eigenschaften des letztern, und sie führt, wie wir noch zu zeigen haben werden, zu ebenso eindeutigen Resultaten, wie jene erste Methode.

Die fundamentale Eigenschaft des Potentials, von der wir bei der zweiten Methode Gebrauch zu machen haben, ist die durch die Laplace-Poissonsche Formel

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+4\pi\rho=0$$

ausgedrückte.

Sie stellt eine partielle Differentialgleichung für V vor, da sie eine Beziehung zwischen den zweiten Derivirten des Potentials in der Nachbarschaft eines bestimmten Punktes und der in diesem Punkte herrschenden Dichte der Electricität festsetzt.

Digitized by Google

Im Gegensatz dazu giebt die Hauptgleichung der ersten Methode

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\rho}{r} \, dx' \, dy' \, dz'$$

eine Beziehung zwischen dem Potential in einem Punkte (x, y, z) und den Dichten der Electricität in beliebig weit von diesem Punkte entfernten andern Punkten (x', y', z'). Der durchgreifende Unterschied zwischen ihr und der Laplace-Poissonschen Gleichung besteht also darin, dass das bestimmte Integral als der mathematische Ausdruck der Tatsache einer Wirkung in die Ferne betrachtet werden kann, während die Differentialgleichung sich nur mit dem beschäftigt, was unmittelbar an einer bestimmten Stelle geschieht.

Wir haben aber gesehen, dass das bestimmte Integral auch der Differentialgleichung genügt, und ich werde noch zeigen, dass es die einzige Lösung derselben ist, die gewisse Bedingungen befriedigt.

Beide Ausdrücke für das Potential werden sich uns also als äquivalent ergeben, und dadurch gewinnen wir den Uebergang von der Annahme einer Wirkung in die Ferne zu der einer Einwirkung benachbarter Teilchen aufeinander.

95 b. Bei den Theoremen, die ich in diesem Capitel zu begründen haben werde, wird es sich vornehmlich um die Eigenschaften von Raumintegralen, erstreckt über endliche Gebiete, die wir als electrische Felder bezeichnen werden, handeln.

Das Element dieser Integrale, also die Grösse unter dem Integrationszeichen, wird entweder das Quadrat eines gewissen Vectors, der in Betrag und Richtung von Punkt zu Punkt variirt, oder aber ein Product eines Vectors in die in seine Richtung genommene Componente eines andern Vectors sein.

Ueber die Verteilung von Vectoren im Raume, auf die es uns hier, wie man leicht sieht, namentlich ankommen wird, habe ich schon an andern Orten einiges gesagt.

Darnach haben wir namentlich zwei Verteilungsarten zu berücksichtigen.

Bei der ersten Verteilungsart, der irrotationalen, kann ein Vector als die Raum-Variation einer scalaren Function, die wir als Potential bezeichnet haben, betrachtet werden. (Art. 17.)

Die Attractions- und Repulsionskräfte eines Systems von Kraftcentren geben, sofern sie nur von Distanzen abängen, ein Beispiel für eine solche Verteilung von Vectoren ab.

Die zweite Art der Verteilung, die sphondyloidale, ist dadurch charakterisirt, dass der scalare Teil der Operation $\nabla \mathfrak{v} = i \, \partial \mathfrak{v}/\partial x + j \, \partial \mathfrak{v}/\partial y + k \, \partial \mathfrak{v}/\partial z$ — wir haben ihn früher die Convergenz genannt — in allen Punkten verschwindet. (Art. 25.)

Digitized by Google

In dieser (sphondyloidalen) Weise ist zum Beispiel die Geschwindigkeit in einer incompressiblen sich bewegenden Flüssigkeit verteilt.

Trifft es sich, dass Centralkräfte dem Newtonschen Gesetze gehorchen, so variirt die resultirende Kraft in dem Raume, wo keine Kraftcentren vorhanden sind, von Ort zu Ort sowohl in der sphondyloidalen als in der irrotationalen Weise.

Entsprechend findet die Verteilung der Geschwindigkeiten in einer incompressibeln Flüssigkeit gleichzeitig nach beiden Arten statt, wenn die sie bewegenden Kräfte nur Centralkräfte sind, oder wenn sie in Druckkräften bestehen und die Flüssigkeit reibungslos ist und sich ursprünglich in Ruhe befand.

Solche Verteilungen, die zugleich sphondyloidal und rotationslos verlaufen, sind namentlich von Laplace untersucht worden, und deshalb werde ich sie als Laplacesche Verteilungen bezeichnen.

Die Raumintegrale, mit denen wir uns zu beschäftigen haben werden, beziehen sich auf Ausdrücke für die Energie im electrischen Felde. In der ersten Gruppe der abzuleitenden Theoreme, die mit dem Greenschen Satz beginnt, wird die Energie als Function der electromotorischen Kraftintensität, also eines Vectors, der im Falle des electrischen Gleichgewichts irrotational verteilt ist, dargestellt.

Es wird sich dabei zeigen, dass bei vorgeschriebenen Potentialwerten für die Conductoroberflächen von allen irrotationalen Verteilungen diejenige die geringste Energie im electrischen Felde hervorbringt, welche zugleich sphondyloidal ausfällt. Daraus folgt dann, dass wenn die Potentialniveaus der Conductoren von vornherein gegeben sind, damit die Laplacesche Verteilung eindeutig bestimmt ist.

In der zweiten Gruppe von Theoremen, welche namentlich den Thomsonschen Satz einschliesst, ist die Energie durch die electrische Verschiebung ausgedrückt, also durch einen Vector mit sphondyloidaler Verteilung. Entsprechend wird man hier finden, dass bei gegebenen Oberflächenladungen von allen sphondyloidalen Verteilungen diejenige die geringste Energie entwickelt, welche gleichzeitig irrotational ist. Es giebt dann nur eine Laplacesche Verteilung, die mit gegebenen Flächenladungen sich vereinbaren lässt.

Die Beweise dieser Sätze werden alle nach demselben Schema geführt, und ich bemerke, um Wiederholungen zu vermeiden, dass in jedem Falle, wo es sich um Untersuchung eines Flächenintegrals handelt, der Satz III_1 in Art. 21,*) der eine Beziehung zwischen einem Flächenintegral und einem entsprechenden Raumintegral herstellt, anzuwenden sein wird. Man hat in

*) Den citirten Satz scheint zuerst Ostrogradsky aufgestellt zu haben, und zwar in einer Abhandlung, die 1828 gelesen und 1831 in den *Mém. de l'Acad. de St. Petersbourg* T. I. p. 39 veröffentlicht worden ist. Der Satz kann auch als ein besonderer Ausspruch der Continuitätsgleichung gelten.

Digitized by Google

diesem Satze für X, Y, Z die Componenten des Vectors einzusetzen, um den es sich in dem betreffenden Theoreme gerade handelt.

In der ersten Ausgabe dieses Buches habe ich jedes Theorem von einer Menge von Alternativen abhängig gemacht, die einerseits die allgemeine Gültigkeit desselben dartun sollten, und andererseits dazu bestimmt waren zu zeigen, in wie mannigfachen Fällen das Theorem verwendet werden könnte. Ich habe mich aber überzeugt, dass sie viel dazu beitrugen den Leser über das, was angenommen, und das, was bewiesen werden sollte, in Unklarheit zu lassen. Deshalb habe ich in dieser Ausgabe jedes der Theoreme zuerst in ganz bestimmter und etwas eingeschränkter Fassung ausgesprochen und dann erst gezeigt, in wie weit dasselbe einer Verallgemeinerung fähig ist.

Ich habe noch eine kleine Aenderung in der Bezeichnung anzuführen, die im Folgenden hervortreten wird. Das frühere Symbol V für das Potential soll nämlich so lange noch weiter beibehalten werden, als es sich um strict electrostatische Fragen handelt. Sonst benutze ich hier so wie im zweiten Bande dieses Werkes, wo wir electromagnetische Untersuchungen anzustellen haben werden, den Buchstaben Ψ als Bezeichnung für das electrische Potential.

Der Greensche Satz.

96a. Der in der Ueberschrift bezeichnete wichtige Satz ist von Green in seinem *Essay on the Application of Mathematics to Electricity and Magnetism* aufgestellt worden.

Es sei s ein von einer geschlossenen Fläche abgegrenztes Gebiet und ν eine nach dem Innern der Fläche gerichtete Normale mit den Richtungscosinussen l, m, n. Wir haben dann

$$\text{a)} \qquad l\frac{\partial\Psi}{\partial x} + m\frac{\partial\Psi}{\partial y} + n\frac{\partial\Psi}{\partial z} = \frac{\partial\Psi}{\partial\nu}$$

für die verhältnismässige Aenderung der Function Ψ auf der Normale ν.

Speciell soll aber unter $\partial\Psi/\partial\nu$ der Wert dieser Grösse auf der Oberfläche s verstanden werden, also wenn $\nu = 0$ ist.

Weiter setzen wir symbolisch

$$\text{b)} \qquad \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = -\nabla^2\Psi$$

und

$$\text{c)} \qquad \frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z} = -S.\nabla\Psi\nabla\Phi.$$

Für den Leser, der mit der Theorie der Quaternionen wenig vertraut ist, sind jene Symbole $\nabla^2\Psi$ und $S.\nabla\Psi\nabla\Phi$ weiter nichts als Abkürzungszeichen für die angegebenen Rechnungsoperationen, und da wir im Folgenden

Digitized by Google

lediglich die gewöhnliche Cartesische Methode anzuwenden haben werden, wird es auch nicht nötig sein, auf ihre Bedeutung in der Quaternionentheorie besonders einzugehen. Ich benutze aber gerade diese Symbole und nicht Buchstaben, die beliebig gewählt werden könnten, weil sie eben in der Sprache der Quaternionen vollständig die Grösse ausdrücken, zu deren Bezeichnung sie dienen sollen. Die Operation ∇ giebt nämlich, auf eine scalare Function Ψ angewendet, die Raum-Aenderung dieser Function, und die Operation $-S.\nabla\Psi\nabla\Phi$ bezeichnet den scalaren Teil des Products zweier Raum-Aenderungen, oder auch das Product einer dieser beiden Raum-Aenderungen in die in ihrer Richtung genommene Componente der andern.

Man hat übrigens in der Quaternionentheorie auch für die Grösse $\partial\Psi/\partial\nu$ eine besondere Bezeichnung, nämlich $S.U\nu\nabla\Psi$, wo $U\nu$ einen Einheits-Vector in Richtung der Normale angiebt. Die Benutzung dieser Bezeichnung ist bei der Untersuchung anisotroper Mittel von einiger Bedeutung, hier aber bietet sie weiter keine nennenswerten Vorteile dar.

Ich lasse nach diesen Vorbereitungen den Satz folgen, um den es sich handelt.

Sind Ψ und Φ zwei Functionen, die in einem durch eine geschlossene Fläche s abgegrenzten einfach zusammenhängenden Raum τ endlich und stetig verlaufen, dann gelten die Gleichungen

$$1)\qquad \iint\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\,ds-\iiint\Psi\,\nabla^2\Phi\,d\tau=\iiint S.\nabla\Psi\nabla\Phi\,d\tau,$$

$$2)\qquad \iint\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\,ds-\iiint\Psi\,\nabla^2\Phi\,d\tau=\iint\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial\nu}\,ds-\iiint\Phi\nabla^2\Psi\,d\tau.$$

Die Doppelintegrale beziehen sich auf die gesammte Grenzfläche s, die dreifachen auf den ganzen Raum τ innerhalb dieser Fläche.

Zum Beweise dieses Satzes setzen wir in Theorem III_1 Art. 21, in welchem dieselben Bedingungen der Continuität und Endlichkeit erfüllt sein müssen,

$$X=\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial x},\ Y=\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial y},\ Z=\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z},$$

und erhalten

$$R\cos\varepsilon=\Psi\left(l\frac{\partial\Phi}{\partial x}+m\frac{\partial\Phi}{\partial y}+n\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)$$

$$=\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}$$

$$\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=\Psi\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$=-\Psi\,\nabla^2\Phi-S.\nabla\Psi\nabla\Phi.$$

Digitized by Google

Nach dem citirten Theorem III_1 in Art. 21 ist aber

$$\iint R\cos\varepsilon\, ds = -\iiint\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)d\tau,$$

somit wird

$$\iint \Psi\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\,ds - \iiint \Psi\,\nabla^2\Phi\,d\tau = \iiint S\,.\,\nabla\Psi\,\nabla\Phi\,d\tau.$$

Eine analoge Gleichung erhält man, wenn Φ mit Ψ vertauscht wird und damit den ganzen oben ausgesprochenen Greenschen Satz.

96b. Wir bekommen eine Erweiterung unseres Theorems durch den Nachweis, dass eine der Functionen, etwa Ψ, auch mehrwertig sein kann, wenn nur ihre ersten Derivirten in dem einfach zusammenhängenden Raum einwertig und endlich sind.

Nach dieser Festsetzung ist $\nabla\Phi$ sowohl als $\nabla\Psi$ einwertig, also in der Gleichung 1) das Glied auf der rechten Seite auch einwertig, dagegen ist $\Psi\nabla^2\Phi$ vielwertig. Gehen wir aber von einem der Werte des Ψ in einem Punkte A, von Ψ_0 aus, dann ist in jedem andern Punkte P der Wert des Ψ eindeutig bestimmt, auf welchem Wege wir auch von A nach P gelangen mögen. Die durch den speciellen Wert Ψ_0 charakterisirte Reihe von Werten des Ψ bildet nämlich einen continuirlichen Zweig der Function Ψ, und wenn man trotzdem auf zwei von A nach P führenden Wegen in P zu zwei verschiedenen Werten des Ψ gelangen sollte, die zwei Zweigen der Function angehören, so kann das nur dadurch geschehen, dass diese beiden Wege einen Punkt einschliessen, in welchem zwei Werte zweier verschiedener Zweige zusammenfallen, so dass man continuirlich aus dem einen Zweig in den andern übergehen vermag. In einem Verzweigungspunkt werden aber die Derivirten der Function unendlich gross, und da sie in unserem ganzen Gebiet endlich sein sollten, so kann ein solcher Verzweigungspunkt sich nur ausserhalb unseres Gebietes befinden. Wäre das Gebiet mehrfach zusammenhängend, so könnten die beiden Wege ihn doch noch einschliessen, ohne selbst aus dem Gebiete heraustreten zu müssen. Wir haben aber noch die Voraussetzung gemacht, dass unser Gebiet einfach zusammenhängt, und das ist gleichbedeutend damit, dass sich kein geschlossener Weg in demselben angeben lässt, der ausserhalb des Gebietes befindliche Teile umfasst. Es kann demnach, wenn die Annahmen für die Function Ψ bestehen sollen, überhaupt keine geschlossene im Gebiete τ verlaufende Curve einen Verzweigungspunkt einschliessen, das heisst aber, man muss auf jedem in dem Gebiete τ von A nach P führenden Wege stets zu demselben in dem Zweige, dem Ψ_0 angehört, befindlichen Wert für Ψ gelangen.

Hätten wir in A für Ψ_0 einen andern Wert $\Psi_0 + n\varkappa$ gewählt, so würde sich in P statt Ψ der Wert $\Psi + n\varkappa$ finden, die linke Seite der Gleichung 1) würde also noch um die Differenz

$$n\varkappa\left[\iint\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\,ds - \iiint\nabla^2\Phi\,d\tau\right],$$

Digitized by Google

anwachsen. Diese Differenz ist aber nach dem citirten Theorem III_1 gleich Null.

96c. Haben wir statt des einfach zusammenhängenden einen mehrfach zusammenhängenden Raum, so verwandeln wir ihn durch geeignete Schnitte oder Diaphragmen in einen einfach zusammenhängenden. Die Diaphragmen zählen dann mit zur Begrenzungsfläche des Raumes.

Ist s_1 ein solches Diaphragma und $\varkappa_1$ der Sprung, den Ψ beim Durchgang durch dieses Diaphragma erleidet, so ist, wenn Ψ_1 und Ψ_1' zwei unmittelbar zu beiden Seiten des Diaphragma geltende Werte des Ψ angeben

$$\Psi_1' = \Psi_1 + \varkappa_1.$$

Bei der Ausführung der Flächenintegration muss nun jedes Element des Diaphragma s_1 zweimal vorkommen, weil zu beiden Seiten desselben Stücke des Gebietes τ liegen, und wenn ν_1 die nach der positiven ν_1', die nach der negativen Seite gezogene Normale zu s_1 ist, so haben wir

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu_1'} = -\frac{\partial \Phi}{\partial \nu_1},$$

mithin

$$\Psi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_1} ds_1 + \Psi_1' \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_1'} ds_1 = -\varkappa_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_1} ds_1.$$

Die Gleichung 1) wird also in einem $n$fach zusammenhängenden Raum

$$3) \quad \iint \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds - \sum_{\rho=1}^{\rho=n-1} \varkappa_\rho \iint \frac{\partial \Phi}{\partial \nu_\rho} ds_\rho - \iiint \Psi \nabla^2 \Phi \, d\tau = \iiint S . \nabla \Psi \nabla \Phi \, d\tau.$$

Das erste Integral bezieht sich auf die Grenzfläche, die $n-1$ Integrale unter dem Summenzeichen erstrecken sich auf die einzelnen Diaphragmen, wobei jedes Element derselben nur einmal zu rechnen ist, und die Normalen in positiver Richtung laufen, die dreifachen Integrale umfassen das ganze Raumgebiet τ.

Die Notwendigkeit dieser Erweiterung des Greenschen Satzes ist von Helmholtz*) angegeben worden. Thomson hat sie dann in der angegebenen Weise ausgeführt.**)

96d. In der weitern Verallgemeinerung lassen wir mit Green für eine der Functionen, für Φ, die Voraussetzung, dass sie und ihre ersten Derivirten in dem gegebenen Gebiete endlich sind, fallen. Wir nehmen vielmehr an, dass Φ in dem Punkte P, aber nur in diesem, unendlich wird wie $1/r$. Ist also Φ_0 eine endliche stetige Grösse, so setzen wir in der Nachbarschaft von P das $\Phi = \Phi_0 + e/r$.

*) *Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen.* Crelle, Journal für reine und angewandte Mathematik 1858.

**) *On Vortex Motion.* Trans. R. S. Edin. XXV part I, pag. 241 (1867).

Digitized by Google

Einen solchen Wert würde Φ zum Beispiel haben, wenn es das Potential einer im Gebiete τ endlichen electrischen Verteilung und einer im Punkte P befindlichen Electricitätsmenge e wäre.

Schliessen wir den Punkt P durch eine kleine mit dem Radius a geschlagene Kugel ein, so können wir in dem Gebiete zwischen s und dieser Kugel den Greenschen Satz anwenden, wenn bei Berechnung des Flächenintegrals die Fläche der Kugel mit zur Grenzfläche gezählt wird, und bei Berechnung des Raumintegrals der Teil desselben, der sich auf die kleine Kugel bezieht, in Abzug gebracht wird.

Nun ist aber das eine Raumintegral,

$$\iiint \Phi \nabla^2 \Psi \, dx \, dy \, dz,$$

für die kleine Kugel numerisch nicht grösser als

$$(\nabla^2 \Psi)_g \left\{ \iiint \Phi \, dx \, dy \, dz \right\},$$

also auch nicht grösser als

$$(\nabla^2 \Psi)_g \left\{ 2\pi e a^2 + \tfrac{4}{3} \pi a^3 \Phi_0 \right\},$$

wenn der Index g angiebt, dass der innerhalb der Kugel grösste Wert einer Quantität genommen werden soll. Dieses Raumintegral der Kugel ist also von der Ordnung a^2 unendlich klein und kann vernachlässigt werden.

Das zweite Raumintegral $\iiint \Psi \triangle^2 \Phi \, dx \, dy \, dz$ kann numerisch nicht grösser sein als

$$\Psi_g \, (\nabla^2 \Phi_0) \, \tfrac{4}{3} \pi a^3$$

und ist demnach als von der Ordnung a^3 ebenfalls zu vernachlässigen.

Von den Flächenintegralen in Bezug auf die Kugel um P ist $\iint \Phi (\partial \Psi / \partial \nu) \, ds$ numerisch nicht grösser als $\Phi_g \iint (\partial \Psi / \partial \nu) \, ds$. Nun ist nach dem Theorem III_1

$$\iint \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} \, ds = - \iiint \nabla^2 \Psi \, dx \, dy \, dz,$$

und da das Integral auf der rechten Seite nicht grösser ist als $(\nabla^2 \Psi)_g \, 4\pi a^3/3$, so kann jenes Flächenintegral nicht grösser sein als

$$\Phi_g (\nabla^2 \Psi)_g \, \tfrac{4}{3} \pi a^3.$$

Auf der sehr kleinen Kugel ist aber Φ_g nahezu gleich e/a. Das erste Flächenintegral ist also von der Ordnung a^2 und kann vernachlässigt werden.

Das zweite Flächenintegral über die kleine Kugel, $\iint \Psi (\partial \Phi / \partial \nu) \, ds$, verschwindet aber nicht, denn da die Kugel sehr klein ist, und Ψ sich continuirlich ändert, so muss jenes Integral bis auf sehr kleine Grössen gleich $\Psi_0 \iint (\partial \Phi / \partial \nu) \, ds$ sein, wo Ψ_0 den Wert des Ψ im Punkte P bezeichnet.

Digitized by Google

Nach früheren Sätzen ist dann noch

$$\iint \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds = -4\pi e$$

und demnach

$$\iint \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds = -4\pi e \Psi_0.$$

der durch Gleichung 2) ausgedrückte Greensche Satz wird also unter diesen Umständen

$$4) \quad \iint \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds - \iiint \Psi \nabla^2 \Phi \, d\tau - 4\pi e \Psi_0 = \iint \Phi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} ds - \iiint \Phi \nabla^2 \Psi \, d\tau.$$

97a. Als Anwendung dieses besonderen Falles des Greenschen Satzes bestimmen wir die Flächendichte, mit der die Electricität sich auf einer Fläche verteilt, wenn die Potentiale innerhalb und ausserhalb derselben vorgeschriebene Werte erhalten. Auf der Fläche müssen die Potentialwerte von Innen und Aussen zusammenfallen, ferner ist innerhalb der Fläche $\nabla^2 \Psi = 0$ und ausserhalb derselben $\nabla^2 \Psi' = 0$.

Green, der dieses Problem auch behandelt hat, beginnt mit der früher charakterisirten directen Methode, welche, wenn die Dichte σ der auf der Fläche verteilten Electricität gegeben ist, die Potentiale für innerhalb bezüglich ausserhalb derselben liegende Punkte P, P' durch die Integrale

$$a) \quad \Psi_P = \iint \frac{\sigma}{r} ds, \quad \Psi_{P'} = \iint \frac{\sigma}{r'} ds,$$

in denen r, r' die Distanzen der Punkte P, P' von den Elementen ds der Fläche bedeuten, finden lehrt.

Wir setzen $\Phi = 1/r$ und wenden den Satz unter 4) auf Punkte P innerhalb der Fläche s an. Da $\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Psi = 0$ sein muss, so ergiebt jener Satz, wenn Ψ_P das Potential im Punkte P selbst bedeutet,

$$5) \quad \iint \Psi \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} ds - 4\pi \Psi_P = \iint \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} ds.$$

Ferner beziehen wir bei derselben Annahme für Φ den Satz unter 2) auf das Gebiet zwischen s und einer andern in der unendlichen Entfernung a von s sich befindenden geschlossenen Fläche. Hier ist $\nabla^2 \Phi = \nabla^2 \Psi' = 0$, und da das Integral in Bezug auf die unendlich weite Fläche von der Ordnung $1/a$ ist, so kann es fortgelassen werden, mithin wird

$$6) \quad \iint \Psi' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu'} ds = \iint \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu'} ds.$$

Digitized by Google

Für die Fläche s selbst ist $\Psi = \Psi'$, ferner sind ν und ν' Teile derselben Normale, die in entgegengesetzte Richtungen verlaufen, so dass

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial \nu'} = 0$$

wird. Die Gleichungen 5) und 6) setzen sich also zusammen zu

$$7) \qquad -4\pi \Psi_P = \int\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu'}\right) ds,$$

und hieraus folgt dann wegen der Gleichungen unter a) die bekannte charakteristische Gleichung

$$-4\pi\sigma = \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu'}$$

zur Bestimmung der Flächendichte im Element ds, die in Art. 78b in ganz anderer Weise ihre Ableitung gefunden hat.

97b. Eine andere Anwendung, die Green von seinem Satze gemacht hat, besteht in dem Nachweise, dass, wenn das Potential in jedem Punkte auf einer geschlossenen Fläche s beliebig gegeben ist, dasselbe sofort auch für alle Punkte innerhalb und ausserhalb dieser Fläche mitbestimmt ist.

Er nimmt zunächst an, dass sich stets eine Function Φ angeben lässt, die in der Nähe eines innerhalb der Fläche s gelegenen Punktes P sehr nahe gleich $1/r$ ist, für jeden Punkt der Fläche s verschwindet und überall innerhalb der Fläche s der Laplaceschen Gleichung $\nabla^2 \Phi = 0$ genügt.

Die Existenz einer solchen Function resultirt aus der folgenden Betrachtung. Versteht man unter s die Fläche eines Conductors, den man durch einen Draht mit der Erde verbunden hat, und unter P einen mit einer Electricitätseinheit geladenen Punkt, so ist das Potential auf s wegen der Ableitung zur Erde gleich Null, und da das Gesammtpotential in irgend einem Punkte innerhalb s der Electricität in P und der durch diese in s inducirten Ladung seine Entstehung verdankt, so wird auch allda $\nabla^2 \Phi = 0$ sein. Endlich ist auch in der Nähe von P das Potential nahezu gleich $1/r$. Dieses Potential genügt also genau den Bedingungen, denen Φ unterworfen werden sollte, und weil der auseinandergesetzte Fall physikalisch existirt, muss Φ auch eindeutig bestimmbar sein.

Der Greensche Satz giebt nach alledem

$$8a) \qquad 4\pi \Psi_P = \int\int \Psi \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} ds.$$

wo Ψ unter dem Integrationszeichen den Wert des Potentials in dem Flächenelement ds festsetzt, der der Annahme nach gegeben sein sollte.

Digitized by Google

Eine andere Fassung erhält dieser Satz durch Einführung einer Grösse σ_P die mit $\partial\Phi/\partial\nu$ durch die Gleichung

$$4\pi\sigma_P + \frac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0$$

verbunden ist. Man bekommt so

8b) $$\Psi_P = \iint \Psi\,\sigma_P\,ds.$$

Hier giebt σ_P, wie man sich leicht aus den Bedingungen, denen die Function Φ unterworfen worden ist, überzeugt, die Flächendichte der Electricität, welche, wenn in P eine Electricitätseinheit concentrirt wäre, auf dem Flächenelement ds inducirt werden würde. Ist also das Potential für jeden Punkt der Fläche s gegeben und genügt es im ganzen Raum innerhalb s der Laplaceschen Gleichung $\nabla^2\Psi = 0$, so ist es in jedem Punkte durch eine mechanische Quadratur bestimmbar, wenn man die Flächendichte der durch eine in dem betreffenden Punkte P concentrirte Electricitätseinheit auf s inducirten Electricität anzugeben vermag.

Später werden wir noch sehen, dass diese Bedingungen das Potential auch eindeutig bestimmen.

Die Greensche Function.

98. Das eben behandelte Problem giebt uns Gelegenheit zur Einführung einer Function, die unter dem Namen Greensche Function bekannt ist.

Es sei s eine geschlossene Fläche, die (durch eine Verbindung mit der Erde) stets auf dem Potential Null erhalten wird; P und Q mögen zwei auf der positiven Seite von s (gleichgiltig ob es die äussere oder die innere Seite ist) befindliche Punkte bezeichnen. Bringen wir nach P einen sehr kleinen mit einer Electricitätseinheit geladenen Körper, so wird in s Electricität von entgegengesetztem Zeichen inducirt, und das Potential in Q setzt sich demzufolge aus zwei Teilen zusammen. Ein Teil rührt von der directen Wirkung, welche die Electricitätseinheit in P auf Q ausübt, her, der andere verdankt seine Entstehung der in s durch P inducirten Electricität. Diesen zweiten Teil des Potentials in Q nennen wir die *Greensche Function* und bezeichnen sie durch den Buchstaben G_{pq}.

Offenbar hängt der Betrag dieser Function von der Lage der Punkte P und Q gegen einander und zur Fläche ab, während ihre Form durch die geometrische Gestalt der Fläche s bestimmt wird. Man kennt sie in einigen wenigen Fällen und namentlich dann, wenn s eine Kugel ist.

Kurz lässt sich diese Function so definiren, dass sie das Potential der in einer Fläche s durch eine in einem festen Punkt P concentrirte Electricitätseinheit inducirten Ladung auf einen Punkt Q angiebt.

Digitized by Google

Bezeichnet r_{pq} den Abstand zwischen P und Q, so ist dem obigen zufolge das Gesammtpotential in Q gleich $1/r_{pq} + G_{pq}$.

Auf der Fläche s und in allen Punkten auf der Seite derselben, wo P nicht liegt, sollte das Gesammtpotential verschwinden. Giebt also G_{ps} den Wert der Greenschen Function auf s an, so haben wir

1) $$G_{ps} = -\frac{1}{r_{ps}}.$$

Damit können wir nun einen analytischen Ausdruck für G_{pq} ableiten und dann einen wichtigen Satz beweisen.

Sei nämlich $\sigma_{ps'}$ die durch eine in P concentrirte Electricitätseinheit auf s in Punkt A' inducirte Flächendichte und ds' das Flächenelement von s in A', so ist zunächst

2a) $$G_{pq} = \int\int \frac{\sigma_{ps'}}{r_{qs'}}\, ds',$$

wo die Integration sich auf die ganze Fläche s bezieht. Hätten wir umgekehrt die Electricitätseinheit nach Q versetzt, so wäre nach der Gleichung 1)

1a) $$\frac{1}{r_{qs'}} = -\, G_{qs'}.$$

Bezeichnet aber σ_{qs} die Flächendichte der durch die Electricitätseinheit in Q auf s im Punkte A inducirten Electricität, ds das Flächenelement von s in A und $r_{ss'}$ den Abstand zweier Flächenpunkte A und A', so ist auch

1b) $$G_{qs'} = \int\int \frac{\sigma_{qs}}{r_{ss'}}\, ds,$$

also nach 1a)

$$\frac{1}{r_{qs'}} = -\int\int \frac{\sigma_{qs}}{r_{ss'}}\, ds,$$

und folglich

2b) $$G_{pq} = -\int\int\int\int \frac{\sigma_{ps'}\,\sigma_{qs'}}{r_{ss'}}\, ds\, ds'.$$

Man bemerkt, dass das Integral auf der rechten Seite der Gleichung symmetrisch in Bezug auf p und q ist, demnach wird

3) $$G_{pq} = G_{qp}.$$

Ich habe diesen Satz, der hier als eine Folge der Bestimmungsweise der Greenschen Function sich erweist, schon im Art. 87 aus ganz andern Betrachtungen abgeleitet.

Die Greensche Function drückt auch bei geeigneter Wahl des inducirenden Punktes und der inducirten Fläche das Potential irgend eines electrischen Systems auf einen Punkt Q aus. Bringt man nämlich in einen

Digitized by Google

Punkt P eine Electricitätseinheit und denkt sich diejenige Niveaufläche s, für welche das Gesammtpotential gleich Null ist, als Leiterfläche, so besteht, wenn P durch s vollständig von dem gegebenen electrischen System getrennt wird, das Potential in einem Punkte Q, der mit P auf derselben Seite von s liegt, aus drei Teilen, aus dem Potential von P auf Q, aus dem Potential G_{pq} der durch P auf s inducirten Electricität, endlich aus dem Potential $\mathfrak{P}$ des electrischen Systems, und da die Niveaufläche s so gewählt ist, dass auf ihr $1/r + \mathfrak{P} = 0$, also nach der unter 1) gegebenen Gleichung 1) $G_{pq} - \mathfrak{P} = 0$ ist, so muss überall in dem Gebiete, wo P liegt, wenn man von der in P befindlichen Electricitätseinheit wieder abstrahirt, das Potential $G_{pq} - \mathfrak{P}$ verschwinden, das heisst aber, es ist $\mathfrak{P} = G_{pq}$.

In dieser Weise kann man sich eine Reihe von Fällen construiren, das heisst Flächen s herstellen, in denen die Greensche Function für bestimmte Lagen des inducirenden Punktes P von vornherein bekannt ist. Weit schwieriger ist die Lösung der umgekehrten Aufgabe, die Greensche Function für bestimmte gegebene Flächen bei beliebiger Lage des inducirenden Punktes zu berechnen. Sie ist aber, wie ich gezeigt habe, mathematisch möglich, und deshalb darf man voraussetzen, dass derartige Probleme sich in jedem Falle auflösen lassen.

Befindet sich der mit einer Electricitätseinheit geladene Punkt P innerhalb der Fläche s, so ist dem obigen zufolge das Potential der auf s durch P inducirten Electricität auf einen Punkt Q ausserhalb s gleich und entgegengesetzt dem von P in Q verursachten Potential. Demnach ist die Verteilung der Electricität auf s eine centrobarische*), sie wirkt auf äussere Punkte mit derselben Kraft, wie ein in dem Innern der Fläche s in gewisser Weise orientirter, mit einer Electricitätseinheit geladener Punkt P.

Electrische Energie.

99a. Macht man in dem analytischen Ausdruck für den Greenschen Satz die beiden Functionen Φ und Ψ einander gleich, so wird

$$1) \qquad \iint \Psi \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} ds - \iiint \Psi \nabla^2 \Psi \, d\tau = \iiint S.(\nabla \Psi)^2 \, d\tau.$$

Ist Ψ das Potential einer electrischen Ansammlung im Raume von der Raumdichte ρ und einer electrischen Verteilung auf Conductoren mit den Flächendichten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ und den bezüglichen Potentialen $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ so ist

$$\nabla^2 \Psi = 4\pi\rho,$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial \nu_1'} = 0, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial \nu_1} = -4\pi\sigma_1, \ldots\ldots$$

*) Thomson und Tait, *Theoretische Physik* § 526.

Digitized by Google

also

$$\iint \frac{\partial \Psi_1}{\partial \nu_1} ds_1 = -4\pi e_1, \ldots .$$

wenn e_1 die Ladung eines bestimmten Conductors angiebt. Aus der Gleichung unter 1) wird also nach Division mit -8π

2) $$\tfrac{1}{2}(\Psi_1 e_1 + \Psi_2 e_2 + \ldots) + \tfrac{1}{2}\iiint \Psi \rho \, dx\, dy\, dz$$
$$= \frac{1}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz.$$

Das erste Glied auf der linken Seite dieser Gleichung stellt die Energie der Ladungen der Conductoren dar, und das zweite giebt die Energie der im electrischen Felde etwa vorhandenen Electricitätsmengen. Beide zusammen umfassen demnach die gesammte Energie der Electricität, und somit muss auch das Glied auf der rechten Seite die gesammte Energie ausdrücken.

Da wir noch oft Gelegenheit haben werden, diesen neugewonnenen Ausdruck für die Energie anzuwenden, so führe ich eine besondere Bezeichnung W_Ψ für ihn ein, indem ich

3) $$W_\Psi = \frac{1}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$

setze.

Wenn im electrischen Felde ausser den Ladungen auf den Conductoren weiter keine Electricitäten vorhanden sind, so wird $\rho = 0$, und es bleibt nur die Energie der auf den Conductoren aufgehäuften Electricität. Für diesen speciellen Fall lasse ich den Index Ψ fort und verstehe demnach, wie in Art. 84, unter

3_1) $$W = \frac{1}{8\pi}\iiint \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz$$

die Energie, wenn alle im electrischen Felde vorhandene Electricität sich auf Oberflächen von Leitern befindet.

99b. Wir beschränken die Anzahl der Conductoren auf einen, bezeichnen also mit s eine ringsgeschlossene Fläche und mit Ψ eine Function von x, y, z, die auf dieser Fläche den vorgeschriebenen Wert Ψ hat. Wenn Ψ weiter keinen Bedingungen unterworfen wird, so ist sie noch ganz beliebig, und es lassen sich eine Menge Functionen angeben, die auf s den Wert Ψ haben. Von allen diesen Functionen entspricht nun derjenigen Function Ψ_1, welche innerhalb der Fläche s auch noch der Laplaceschen Gleichung $\nabla^2 \Psi_1 = 0$ genügt, die kleinste Energie W.

Digitized by Google

Es sei Ψ eine Function, welche auf s mit Ψ_1 zusammenfällt, sonst aber in jedem Punkte innerhalb s von Ψ_1 verschieden ist. Setzen wir also

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2,$$

so ist Ψ_2 auf s gleich Null, und wenn W, W_1, W_2 die dem Ψ, Ψ_1 bezüglich Ψ_2 entsprechende Energie ist, so wird nach 3_1)

$$W = W_1 + W_2 + \iiint \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} + \frac{\partial\Psi_1}{\partial y}\frac{\partial\Psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\Psi_1}{\partial z}\frac{\partial\Psi_2}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz.$$

Nach dem Greenschen Satz ist aber das auf der rechten Seite stehende dreifache Integral gleich

$$\frac{1}{4\pi}\iiint \Psi_2 \nabla^2 \Psi_1 d\tau - \frac{1}{4\pi}\iint \Psi_2 \frac{\partial\Psi_1}{\partial\nu} ds,$$

und da einerseits im Raume τ das $\nabla^2\Psi_1 = 0$ ist und andererseits auf der Fläche s das Ψ_2 verschwinden soll, so reducirt sich jenes Integral auf Null, und es bleibt

$$W = W_1 + W_2.$$

Die Elemente unter den Integralausdrücken 3_1) für die Energie sind aber Summen von Quadraten, die Integrale bezeichnen ihrerseits auch weiter nichts als Summen, also muss W_1 wie W_2 stets positiv sein. Verschwindet W_2 nicht, so ist es jedenfalls positiv, also $W > W_1$. Verschwindet es aber, so ist jedes seiner Elemente gleich Null, das heisst

$$\frac{\partial\Psi_2}{\partial x} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial y} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichungen zeigen an, dass Ψ_2 im ganzen durch s begrenzten Raum τ einen und denselben Wert haben muss, und da es auf der Fläche s gleich Null ist, so verschwindet es überhaupt. W ist also gleich W_1, wenn Ψ gleich Ψ_1 ist, sonst ist stets $W > W_1$.

Gleichzeitig ergiebt sich, dass Ψ_1 auch die einzige Function ist, die innerhalb der Fläche s der Laplaceschen Gleichung genügt und auf derselben einen vorgeschriebenen Wert $\overline{\Psi}$ hat.

Denn wäre Ψ_3 eine andere Function, die ganz denselben Bedingungen genügt wie Ψ_1, so müsste dem obigen zufolge die ihr entsprechende Energie die kleinstmögliche sein, sie kann aber nicht kleiner sein als die der Function Ψ_1 entsprechende Energie W_1, sie muss dieser also gleich sein, und das bedeutet, wie wir eben gezeigt haben, dass überhaupt Ψ_3 mit Ψ_1 zusammenfällt.

Am nützlichsten wird sich für uns der Fall erweisen, wo das electrische Feld durch eine äussere Fläche s begrenzt ist, auf der das Potential gleich Null ist, und eine Reihe von Conductoren $s_1, s_2, \ldots$, auf denen das Potential die bezüglichen constanten Werte $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ hat, enthält.

Auch hier hat die Function Ψ_1, welche den genannten Oberflächenbedingungen genügt und in jedem Punkte des electrischen Feldes die Laplacesche Gleichung befriedigt, die kleinste Energie W_Ψ.

Digitized by Google

Der Thomsonsche Satz.

100a. *Hilfssatz.* Ich brauche zur Ableitung des Thomsonschen Satzes ein anderes Theorem, das ich zunächst deduciren werde.

Es sei Ψ eine Function von x, y, z, die innerhalb einer geschlossenen Fläche s endlich und stetig verläuft und auf andern geschlossenen Flächen $s_1, s_2, \ldots$ mit den für die betreffenden Flächen geltenden constanten Werten $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ zusammenfällt.

Neben dieser Function Ψ wählen wir noch drei andere Functionen u, v, w von x, y, z, die wir als Componenten eines Vectors $\mathfrak{C}$ betrachten können, und unterwerfen sie der Bedingung

a) $$-S.\nabla\,\mathfrak{C} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Ersetzen wir in dem Theorem III_1 Art. 21 die X, Y, Z durch

b) $$X = \Psi u, \quad Y = \Psi v, \quad Z = \Psi w,$$

so folgt aus demselben

1) $$\Sigma_p \iint \Psi_p (l_p u + m_p v + n_p w)\, ds_p + \iiint \Psi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) d\tau + \iiint \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) d\tau = 0.$$

Die Flächenintegrale gehen über alle Flächen $s, s_1, s_2 \ldots$, die Raumintegrale über das ganze electrische Feld. Wegen der unter a) aufgestellten Bedingung verschwindet aber das erste Raumintegral und es bleibt

2) $$\Sigma_p \iint \Psi_p (l_p u + m_p v + n_p w)\, ds_p + \iiint \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) d\tau = 0$$

oder, da $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$ auf den betreffenden Flächen s_1, s_2 constant sein sollten,

2_1) $$\iint \Psi (lu + mv + nw)\, ds + \sum_{p=1} \Psi_p \iint (l_p u + m_p v + n_p w)\, ds_p + \iiint \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) d\tau = 0.$$

Specialisiren wir noch die Fläche s dadurch, dass wir sie nur aus Teilen zusammensetzen, in denen entweder

c) $$\Psi = 0 \text{ oder } lu + mv + nw = 0$$

ist, und nehmen ferner für die Flächen $s_1, s_2, \ldots$ an, dass in jeder von ihnen entweder

Digitized by Google

d) $\Psi_p = 0$ oder $l_p u + m_p v + n_p w = 0$ oder $\iint (l_p u + m_p v + n_p w)\, ds_p = 0$

ist, so erhalten wir

3) $$M = \iiint \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) d\tau = 0.$$

Das ist die Beziehung, die ich habe ableiten wollen.

100b. *Der Thomsonsche Satz.* Nun sei das electrische Feld wie im vorigen Artikel durch die äussere Fläche s und durch eine Reihe anderer geschlossener Flächen $s_1, s_2, \ldots$ begrenzt.

Die Function Ψ von x, y, z

a_1) sei überall im electrischen Felde endlich und stetig,

a_2) verschwinde auf der äussern geschlossenen Fläche s,

a_3) habe auf den innern geschlossenen Flächen $s_1, s_2, \ldots$ die für die betreffenden Flächen constanten Werte $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$

a_4) und genüge im ganzen Felde der Laplaceschen Gleichung

$$\nabla^2 \Psi = 0.$$

Die Ladung e_1 irgend einer Fläche s_1 ist dann

b) $$e_1 = -\frac{1}{4\pi} \iint \frac{\partial \Psi}{\partial \nu_1} ds_1,$$

wo die Normale ν_1 von der Fläche fort in das electrische Feld zu ziehen ist.

Weiter seien f, g, h Functionen von x, y, z, die wir als Componenten eines Vectors $\mathfrak{D}$ betrachten. Für jeden Punkt des electrischen Feldes soll

c) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

sein, und für jeden Conductor s_1 die Gleichung

d) $$\iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h)\, ds_1 = e_1$$

gelten, in der l_1, m_1, n_1 die Richtungscosinusse der Normale ν_1 angeben, und e_1 die Ladung von s_1, wie sie durch die Formel unter b) bestimmt wird, ist.

Nach diesen Festsetzungen vergleichen wir die beiden Raumintegrale

e) $$W_{\mathfrak{D}} = 2\pi \iiint (f^2 + g^2 + h^2)\, dx\, dy\, dz$$

und

f) $$W_\Psi = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz,$$

deren Gebiet das gesammte electrische Feld innerhalb der Fläche s und ausserhalb der Flächen $s_1, s_2, \ldots$ ausmacht.

Digitized by Google

Zur Verbindung der Functionen f, g, h mit Ψ nehmen wir noch drei andere Functionen u, v, w, die wir so bestimmen, dass

g) $$u = f + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial x},\ v = g + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial y},\ w = h + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

ist und setzen

h) $$W_{\mathfrak{C}} = 2\pi \iiint (u^2 + v^2 + w^2)\, dx\, dy\, dz,$$

indem wir unter $\mathfrak{C}$ die Resultante der u, v, w verstehen.

Wir haben dann nach den Gleichungen g) für das Element von $W_{\mathfrak{D}}$ die Gleichung

$$f^2 + g^2 + h^2 = \frac{1}{16\pi^2}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right] + u^2 + v^2 + w^2 - \frac{1}{2\pi}\left(u\frac{\partial \Psi}{\partial x} + v\frac{\partial \Psi}{\partial y} + w\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right),$$

mithin nach e), f), h)

1) $$W_{\mathfrak{D}} = W_{\Psi} + W_{\mathfrak{C}} - \iiint \left(u\frac{\partial \Psi}{\partial x} + v\frac{\partial \Psi}{\partial y} + w\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz.$$

Die hier eingeführten Functionen u, v, w genügen aber ganz denselben Bedingungen wie die durch gleiche Symbole bezeichneten im vorhergehenden Artikel.

Denn erstens ist wegen der Beziehungen unter a_4) und c)

i) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{4\pi}\nabla^2 \Psi = 0.$$

Ferner haben wir

$$\iint (l_1 u + m_1 v + n_1 w)\, ds_1 = \iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h)\, ds_1 + \frac{1}{4\pi}\iint \frac{\partial \Psi}{\partial \nu_1}\, ds_1,$$

woraus bei Berücksichtigung der Gleichungen unter b) und d) folgt

k) $$\iint (l_1 u + m_1 v + u_1 w)\, ds_1 = 0.$$

Endlich ist Ψ auf den Flächen s_1, s_2, . . . constant gleich Ψ_1, Ψ_2, . . und verschwindet ganz auf der Fläche s. Damit sind aber alle Bedingungen zur Existenz der Gleichung 3) in Art. 100a) erfüllt, und die Gleichung 1) reducirt sich auf

1_1) $$W_{\mathfrak{D}} = W\Psi + W_{\mathfrak{C}}.$$

Das Element von $W_{\mathfrak{C}}$ besteht aus einer Summe von Quadraten, diese Grösse kann also nur positiv oder Null sein, und im letztern Falle müssen die Functionen u, v, w jede für sich verschwinden. In den Punkten des

Digitized by Google

electrischen Feldes, wo die u, v, w von Null verschieden sind, wird $W_{\mathfrak{D}} > W_{\Psi}$ sein.

Wir können aber immer die Beziehungen für die f, g, h unter g) so wählen, dass für jeden Punkt des electrischen Feldes $u = v = w = 0$ ist, denn die Supposition

$$g_1) \qquad f = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad g = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

ändert nichts in den vorangehenden Deductionen.

In diesem Falle haben wir dann

$$2_1) \qquad W_{\mathfrak{D}} = W_{\Psi},$$

und dieser Wert von $W_{\mathfrak{D}}$ ist kleiner als der bei irgend einer andern Annahme für die Functionen f, g, h stattfindende.

Dass das Potential für unsern Fall eindeutig bestimmbar ist, haben wir bereits Art. 99b) nachgewiesen, wir sehen jetzt, dass auch die electrische Verschiebung — denn diese wird durch die ersten Differentialquotienten des Potentials gegeben — sich eindeutig ableiten lässt.

Dieser Satz ist in allgemeinerer Form, die wir bald kennen lernen werden, zuerst von W. Thomson aufgestellt worden.*)

100c. Das Thomsonsche Theorem ändert sich gar nicht, wenn wir die Bedingungen unter c) und d) für die Functionen f), g), h) dadurch verallgemeinern, dass wir für jeden Punkt des electrischen Feldes

$$c') \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \rho$$

setzen, wo ρ, die electrische Raumdichte, überall im Felde gegeben ist und continuirlich oder discontinuirlich verlaufen kann, wenn nur $\iiint \rho\, dx\, dy\, dz$ in jedem endlichen Gebiet auch einen endlichen Wert hat.

Natürlich muss dann auch

$$a_4') \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + 4\pi\rho = 0$$

sein.

Weiter können wir für einige der innern Grenzflächen in dem Felde statt der Gleichung d) die allgemeinere

$$d') \qquad l_1 f_1 + m_1 g_1 + n_1 h_1 + l_1' f_1' + m_1' g_1' + n_1' h_1' = \sigma_1$$

setzen, wenn l, m, n und l', m', n' die Richtungscosinusse einer Normale der Fläche nach den Gebieten, wo die Verschiebungscomponenten f, g, h bezüglich f', g', h' sind, bezeichnen und wenn σ_1, die Flächendichte in einem Punkte der betreffenden Fläche, überall so gegeben ist, dass sie stetig oder unstetig der Bedingung, dass $\iint \sigma_1\, ds_1$ für ein endliches Stück der Fläche

*) *Cambridge and Dublin Mathem. Journ.* 1848 Febr.

Digitized by Google

endlich ist, genügt. Nehmen wir auch noch an, dass für jeden Punkt der äussern Fläche s das Potential Ψ constant und die Gleichung

a') $$lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h' = \sigma$$

erfüllt ist, wo wieder die Flächendichte σ in dem betreffenden Punkte der äussern Fläche gegeben ist, dann fällt auch die frühere Bedingung, dass Ψ auf der Fläche s verschwinden sollte, fort.

Es gilt dann in allen Flächen die Gleichung

b') $$\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu'} + 4\pi\sigma = 0.$$

Durch diese neu eingeführten Bedingungen ändert sich die Form der Functionen u, v, w gar nicht, es bleibt

g) $$u = f + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial x},\quad v = g + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial y},\quad w = h + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Ferner haben wir für jeden Punkt des Feldes nach c'), a$_4'$), g)

i) $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{1}{4\pi}\nabla^2 \Psi = 0,$$

und für irgend eine der innern Grenzflächen

$$\iint (l_1 u + m_1 v + u_1 w)\, ds_1 + \iint (l_1' u' + m_1' v' + n_1' w')\, ds_1$$
$$= \iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h)\, ds_1 + \iint (l_1' f' + m_1' g' + n_1' h')\, ds$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iint \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu_1} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu_1'}\right) ds_1,$$

also wegen d') und b')

k') $$\iint \left(l_1 u + m_1 v + n_1 w + l_1' u' + m_1' v' + n_1' w'\right) ds_1 = 0.$$

Endlich ist noch in der Fläche s

$$\iint \Psi (lu + mv + nw)\, ds + \iint \Psi (l'u' + m'v' + n'w')\, ds$$
$$= \iint \Psi (lf + mg + nh)\, ds + \iint \Psi (l'f' + m'g' + n'h')\, ds$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\iint \Psi \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \nu} + \frac{\partial \Psi'}{\partial \nu'}\right) ds,$$

also weil Ψ constant und die Bedingung a') mit b') zusammen besteht

$$\iint \left(lu + mv + nw + l'u' + m'v' + n'w'\right) ds = 0.$$

Digitized by Google

Nach 100a ist demnach wieder

$$M = \iiint \left(u \frac{\partial \Psi}{\partial x} + v \frac{\partial \Psi}{\partial y} + w \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) d\tau = 0,$$

also

1) $$W_{\mathfrak{D}} = W_{\mathfrak{C}} + W_{\Psi},$$

so dass

2) $$W_{\mathfrak{D}} = W_{\Psi}$$

ein wirkliches Minimum ist, wenn wie früher

g_1) $$f = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad g = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad h = -\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

gesetzt wird.

Dielectrische Medien.

Componenten der Verschiebung und der electromotorischen Kraft.

101a. Bis jetzt haben wir unsere Theoreme so gefasst, als ob die Eigenschaften eines electrischen Systems lediglich von der Configuration und Lage der einzelnen Körper und von ihren Ladungen abhängt. Von den Einwirkungen der dielectrischen Zwischenmedien haben wir dagegen ganz abgesehen.

Solche Gesetze also, wie zum Beispiel das Coulombsche, dass die electromotorische Kraftintensität R unmittelbar an einem Conductor stets durch die Beziehung

$$R = 4\pi\sigma$$

gegeben ist, gelten nur so lange, als wir uns in ein und demselben Dielectricum, das wir als Standard betrachten, aufhalten. Jene Relation ändert sich aber von Medium zu Medium, wie schon Cavendish experimentell gefunden, wenn auch nicht bekannt gemacht hat, und wie es später von Faraday nochmals unabhängig entdeckt worden ist. Ich habe aber schon an einer andern Stelle bemerkt, dass wir, um die Erscheinungen in ihrer möglichsten Allgemeinheit verfolgen zu können, zwei Vectorgrössen einführen müssen. Diese beiden Grössen — die electromotorische Kraftintensität und die electrische Verschiebung — sind zwar für sich durch Gleichungen von unveränderlicher Form mit dem Potential bezüglich mit der electrischen Verteilung verbunden. Aber die Relation zwischen ihnen wird durch die Natur des dielectrischen Zwischenmediums bestimmt, und noch ist die

Digitized by Google

allgemeinste Form der sie verknüpfenden Gleichungen nicht völlig eruirt und scheint nur experimentell durch in verschiedenen Dielectricis anzustellende Versuche entdeckt werden zu können.

101b. Die electromotorische Kraftintensität ist nach ihrer in Art. 68 gegebenen Definition die mechanische Kraft, welche auf eine kleine Electricitätsmenge e ausgeübt wird, dividirt durch diese Electricitätsmenge.

Wir bezeichnen ihre Componenten durch P, Q, R und sie selbst als Vector durch $\mathfrak{E}$.

In einem im electrischen Gleichgewicht befindlichen Felde ist das zwischen zwei Punkten genommene Linienintegral von $\mathfrak{E}$ unabhängig von dem Integrationsweg, $\mathfrak{E}$ ist also die Raum-Variation eines Potentials Ψ und man hat

1) $$P = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad Q = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad R = -\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

was sich in der Sprache der Quaternionen kürzer durch die Gleichung

2) $$\mathfrak{E} = -\nabla \Psi$$

ausdrücken lässt.

101c. Die nach einer Richtung vor sich gehende electrische Verschiebung ist nach ihrer in demselben Art. 68 gegebenen Definition gleich der Electricitätsmenge, welche durch eine zur Verschiebungsrichtung senkrechte kleine Fläche hindurchgeht, dividirt durch den Inhalt dieser Fläche.

Wir bezeichnen ihre Componenten durch f, g, h und sie selbst als Vector durch $\mathfrak{D}$.

Die Raumdichte der Electricität ist dann in irgend einem Punkte

3a) $$\rho = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z},$$

oder in der Sprache der Quaternionen

3b) $$\rho = -S . \nabla \mathfrak{D}.$$

Die Flächendichte einer geladenen Fläche folgt aus der Gleichung

4a) $$\sigma = lf + mg + nh + l'f' + m'g' + n'h'$$

f, g, h; f', g', h' sind die Verschiebungscomponenten unmittelbar an der Fläche in den bezüglichen Gebieten, nach denen die bezüglichen Normalen ν, ν' mit den Richtungscosinussen l, m, n; l', m', n' gezogen sind. Benutzen wir wieder die Ausdrucksweise der Quaternionentheorie, so lautet jene Gleichung

4b) $$\sigma = -[S . U\nu \mathfrak{D} + S . U\nu' \mathfrak{D}'],$$

wo $U\nu, U\nu'$ Einheiten der Normalen zu beiden Seiten der Fläche bedeuten, und das vorgesetzte S wie bisher angiebt, dass man von den Producten $U\nu \mathfrak{D}$, $U\nu' \mathfrak{D}'$ den scalaren Teil zu nehmen hat.

Digitized by Google

Für den speciellen Fall, dass wir es mit einer Conductorfläche zu tun haben, bei der ν die nach aussen gehende Normale bedeutet, ist $f' = g' = h' = \mathfrak{D}' = 0$ und

$$4_1) \qquad \begin{aligned} \sigma &= lf + mg + nh \\ &= -S \,.\, U\nu\mathfrak{D}, \end{aligned}$$

die gesammte Ladung des Conductors also

$$5_1) \qquad \begin{aligned} e &= \iint (lf + mg + nh)\, ds \\ &= -\iint S \,.\, U\nu\mathfrak{D}\, ds. \end{aligned}$$

101d. Die electrische Energie W des Systems ist, wie wir in Art. 84 bestimmt haben, gleich der Summe der halben Producte aus den Ladungen in die zugehörigen Potentiale, also

$$6a) \qquad \begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2}\Sigma e\Psi \\ &= \tfrac{1}{2}\iiint \rho\Psi\, dx\, dy\, dz + \tfrac{1}{2}\iint \sigma\Psi\, ds \\ &= \tfrac{1}{2}\iiint \Psi\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz + \tfrac{1}{2}\iint \Psi (lf + mg + nh)\, ds. \end{aligned}$$

Das Raumintegral bezieht sich auf das ganze electrische Feld, das Flächenintegral auf die Oberflächen aller Conductoren.

Noch einen andern Ausdruck für die Energie liefert uns der Satz III_1 Art. 21. Indem wir nämlich daselbst

$$X = \Psi f, \quad Y = \Psi g, \quad Z = \Psi h$$

schreiben, erhalten wir

$$\begin{aligned} \iint \Psi (lf + mg + nh)\, ds = &-\iiint \Psi\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \\ &-\iiint \left(f\frac{\partial \Psi}{\partial x} + g\frac{\partial \Psi}{\partial y} + h\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

Darnach wird W zufolge der obigen Gleichung für die Energie

$$6b) \qquad \begin{aligned} W &= -\tfrac{1}{2}\iiint \left(f\frac{\partial \Psi}{\partial x} + g\frac{\partial \Psi}{\partial y} + h\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz \\ &= \tfrac{1}{2}\iiint (fP + gQ + hR)\, dx\, dy\, dz. \end{aligned}$$

101e. Nach diesen Vorbereitungen stellen wir die Beziehung zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ für die uns am meisten interessirenden Fälle auf.

Gewöhnlich leitet man die Einheit der Electricität aus Versuchen, die in Luft angestellt sind, ab. Seitdem aber Boltzmann experimentell nach-

Digitized by Google

gewiesen hat, dass die dielectrische Constante der Luft grösser ist, als die eines Vacuums, und dass sie mit Aenderung der Dichte der Luft in ihrem Betrag variirt, sind alle electrischen Messungen streng genommen entweder auf Luft von bestimmter Dichte und Temperatur, oder, noch wissenschaftlicher, auf ein Vacuum zu beziehen, ganz so wie auch die in der Luft gemessenen Brechungsindices für das Vacuum corrigirt werden müssen. In beiden Fällen sind aber die anzubringenden Reductionen so unbeträchtlich, dass sie nur bei sehr feinen Messungen sich bemerkbar machen.

Für das Standard-Medium haben wir nun, wenn es isotrop ist,

$$7_1) \qquad 4\pi\mathfrak{D} = \mathfrak{E}$$

und

$$8_1) \qquad 4\pi f = P, \quad 4\pi g = Q, \quad 4\pi h = R,$$

also in einem andern ebenfalls isotropen Medium mit der Dielectricitätsconstante K

$$7_2) \qquad 4\pi\mathfrak{D} = K\mathfrak{E},$$

$$8_2) \qquad 4\pi f = KP, \quad 4\pi g = KQ, \quad 4\pi h = KR.$$

In manchen Medien freilich, wie in Glas, das man am sorgfältigsten untersucht hat, ist die Relation zwischen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{E}$ complicirter, da sie die zeitliche Aenderung eines oder beider Vectoren enthält.

Ihre Form ist dann

$$F(\mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \dot{\mathfrak{D}}, \dot{\mathfrak{E}}, \ddot{\mathfrak{D}}, \ddot{\mathfrak{E}} \ldots) = 0.$$

Ich werde aber hier noch keinen Versuch machen, Beziehungen solch allgemeiner Art zu entwickeln, sondern mich auf den einfachsten Fall, in welchem $\mathfrak{D}$ eine homogene lineare Vectorfunction von $\mathfrak{E}$ ist, beschränken.

Verstehen wir also unter φ eine lineare, homogene Vectorfunction, so setzen wir allgemein

$$7) \qquad 4\pi\mathfrak{D} = \varphi(\mathfrak{E}),$$

und haben dann für die Componenten von $\mathfrak{D}$ entsprechende lineare, homogene Functionen der Componenten von $\mathfrak{E}$, also

$$8) \qquad \begin{aligned} 4\pi f &= K_{xx}P + K_{xy}Q + K_{xz}R, \\ 4\pi g &= K_{yx}P + K_{yy}Q + K_{yz}R, \\ 4\pi h &= K_{zx}P + K_{zy}Q + K_{zz}R. \end{aligned}$$

In den Coefficienten zeigt der erste Index die Richtung der Componente der Verschiebung, der zweite die der Componente der electromotorischen Kraftintensität an.

Drücken wir umgekehrt $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{D}$ aus, so ist

$$9) \qquad \frac{1}{4\pi}\mathfrak{E} = \varphi'(\mathfrak{D}),$$

Digitized by Google

$$\frac{1}{4\pi} P = k_{xx} f + k_{yx} g + k_{zx} h,$$

10) $$\frac{1}{4\pi} Q = k_{xy} f + k_{yy} g + k_{zy} h,$$

$$\frac{1}{4\pi} R = k_{xz} f + k_{yz} g + k_{zz} h.$$

Die linearen, homogenen Vectorfunctionen φ und φ' enthalten in ihrer allgemeinen Form 9 Coefficienten, die durch die Natur des Mediums bedingt werden. Fallen die Coefficienten mit gleichem Indexpaar zusammen, so heissen sie sich selbst conjugirt.

101f. Man kann aber leicht zeigen, dass, wenn die Dielectrica conservative Systeme bilden — und man weiss, dass das in der Tat der Fall ist, weil sie ungestört beliebig lange Energie aufzubewahren im Stande sind —, die Functionen φ und φ' wirklich selbstconjugirt sein müssen.

Bezeichnen wir nämlich mit dW die Arbeit der electromotorischen Kraftintensität während einer Verschiebung, die sich aus den auf die Volumeinheit des Mediums bezogenen Componenten df, dg, dh zusammensetzt, so ist

11) $$dW = P\,df + Q\,dg + R\,dh,$$

und da das dielectrische Medium sich bei einer electrischen Verschiebung conservativ verhalten sollte, so muss W eine Function von f, g, h sein. Die Verschiebungscomponenten können aber ganz unabhängig von einander gewählt werden, mithin haben wir zu setzen

12) $$P = \frac{\partial W}{\partial f}, \quad Q = \frac{\partial W}{\partial g}, \quad R = \frac{\partial W}{\partial h}.$$

Aus derselben Tatsache der Unabhängigkeit der Componenten f, g, h von einander, folgt dann weiter

13) $$\frac{\partial^2 W}{\partial f \partial g} = \frac{\partial^2 W}{\partial g \partial f}, \text{ also}$$

14) $$\frac{\partial P}{\partial g} = \frac{\partial Q}{\partial f}.$$

Beachten wir aber, dass $\partial P/\partial g = 4\pi k_{yx}$ und $\partial Q/\partial f = 4\pi k_{xy}$ ist, und dass dieselben Betrachtungen auch für die Paare P, R; Q, R gelten, so erhalten wir

a) $$k_{yx} = k_{xy}, \quad k_{zy} = k_{yz}, \quad k_{xz} = k_{zx}.$$

Damit ergiebt sich dann leicht auch

b) $$K_{yx} = K_{xy}, \quad K_{zy} = K_{yz}, \quad K_{xz} = K_{zx}.$$

101g. Benutzen wir diese Resultate zur Umgestaltung der electrischen Energie, die wir durch $W_{\mathfrak{E}}$, $W_{\mathfrak{D}}$ bezeichnen, je nachdem sie durch die

Digitized by Google

Componenten der electromotorischen Kraftintensität oder durch die der Verschiebung bestimmt ist, so erhalten wir

15a) $$W_{\mathfrak{E}} = \frac{1}{8\pi}\iiint\Big(K_{xx}P^2 + K_{yy}Q^2 + K_{zz}R^2 + 2K_{yz}QR + 2K_{zx}RP + 2K_{xy}PQ\Big)\,dx\,dy\,dz,$$

15b) $$W_{\mathfrak{D}} = 2\pi\iiint\Big(k_{xx}f^2 + k_{yy}g^2 + k_{zz}h^2 + 2k_{yz}gh + 2k_{zx}hf + 2k_{xy}fg\Big)\,dx\,dy\,dz,$$

15c) $$W = \tfrac{1}{2}\iiint\Big(fP + gQ + Rh\Big)\,dx\,dy\,dz$$

oder

15a) $$W_{\mathfrak{E}} = -\frac{1}{8\pi}\iiint S.\mathfrak{E}\varphi(\mathfrak{E})\,d\tau,$$

15b) $$W_{\mathfrak{D}} = -2\pi\iiint S.\mathfrak{D}\varphi'(\mathfrak{D})\,d\tau,$$

15c) $$W = -\tfrac{1}{2}\iiint S.\mathfrak{D}\mathfrak{E}\,d\tau.$$

Der Vollständigkeit wegen habe ich noch die letzte Form hinzugefügt, die schon in Art. 101d) abgeleitet worden ist.

Im ganzen haben wir also 6 Ausdrucksformen für die Energie in einem electrischen Felde kennen gelernt, nämlich ausser den drei eben gegebenen noch die drei anderen in Art. 87 aufgestellten. Die letztern sind aus den Ladungen und Potentialen der Conductoren zusammengesetzt, sie gelten also unter der Annahme einer Wirkung in die Ferne.

Die erstern drei dagegen stellen die Energie durch Raumintegrale erstreckt über das ganze electrische Feld dar und drücken die Tatsache einer Wirkung vermittelst des Zwischenmediums aus. Sie enthalten die Componenten der electromotorischen Kraftintensität, bezüglich die Componenten der electrischen Verschiebung, bezüglich die Componenten beider genannten Grössen.

Allgemeine Form des Greenschen Satzes.

101h. Wir leiten den Greenschen Satz für diesen allgemeinen Fall eines heterogenen anisotropen Mittels ab, indem wir in Theorem III_1 Art. 21

$$X = \Psi\Big(K_{xx}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K_{xy}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K_{xz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big),$$

$$Y = \Psi\Big(K_{yx}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K_{yy}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K_{yz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big),$$

$$Z = \Psi\Big(K_{zx}\frac{\partial\Phi}{\partial x} + K_{zy}\frac{\partial\Phi}{\partial y} + K_{zz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big)$$

Digitized by Google

setzen. Die Substitution ergiebt unter Berücksichtigung der Gleichungen unter b) in Art. 101f)

$$
\begin{aligned}
1a)\quad & \iint\Big[(K_{xx}l+K_{yx}m+K_{zx}n)\frac{\partial\Phi}{\partial x}+(K_{xy}l+K_{yy}m+K_{zy}n)\frac{\partial\Phi}{\partial y}\\
&\qquad+(K_{xz}l+K_{yz}m+K_{zz}n)\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big]\Psi\,ds\\
&+\iiint\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(K_{xx}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+K_{xy}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+K_{xz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial y}\Big(K_{yx}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+K_{yy}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+K_{yz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial z}\Big(K_{zx}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+K_{zy}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+K_{zz}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big)\Big]\Psi\,d\tau\\
&=-\iiint\Big[K_{xx}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+K_{yy}\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+K_{zz}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\\
&\qquad+K_{yz}\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\Big)+K_{zx}\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big)\\
&\qquad+K_{xy}\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big)\Big]\,d\tau\\
&=\iint\Big[(K_{xx}l+K_{yx}m+K_{zx}n)\frac{\partial\Psi}{\partial x}+(K_{xy}l+K_{yy}m+K_{zy}n)\frac{\partial\Psi}{\partial y}\\
&\qquad+(K_{xz}l+K_{yz}m+K_{zz}n)\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big]\Phi\,ds\\
&+\iiint\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(K_{xx}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+K_{xy}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+K_{xz}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial y}\Big(K_{yx}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+K_{yy}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+K_{yz}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial z}\Big(K_{zx}\frac{\partial\Psi}{\partial x}+K_{zy}\frac{\partial\Psi}{\partial y}+K_{zz}\frac{\partial\Psi}{\partial z}\Big)\Big]\Phi\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Kürzer lässt sich das in der Sprache der Quaternionentheorie durch die Gleichungen ausdrücken

$$
\begin{aligned}
1b)\quad & \iint\Psi S\,.\,U\nu\varphi(\nabla\Phi)\,ds-\iiint\Psi S.(\nabla\varphi\nabla)\Phi\,d\tau\\
&=-\iiint S.\nabla\Psi\varphi\nabla\Phi\,d\tau=+\iiint S.\nabla\Phi\varphi\nabla\Psi\,d\tau\\
&=\iint\Phi S\,.\,U\nu\varphi(\nabla\Psi)\,ds-\iiint\Phi S.(\nabla\varphi\nabla)\Psi\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Grenzwerte für die electrische Capacität.

102a. Als Anwendung der bisherigen Untersuchungen bestimmen wir nach der von J. W. Strutt in der Abhandlung *On the Theory of Resonance* Phil. Trans. 1871 entwickelten Methode die Grenzwerte, zwischen denen die Capacität eines Conductors liegen muss.

Als Capacität eines Conductors oder eines Systems von Conductoren haben wir die Electricitätsmenge definirt, welche sich auf ihm befindet, wenn sein Potential gleich der Einheit, das aller andern noch etwa vorhandenen Conductoren aber gleich Null ist.

Es seien nun s_1, Ψ_1, e_1 und s_0, Ψ_0, e_0 Flächeninhalt, Potential und Ladung des Systems von Conductoren, dessen Capacität bestimmt werden soll, bezüglich des Systems, das sich sonst noch im Felde befindet. e_1 ist dann gleich $-e_0$.

Giebt q die Capacität von s_1 an, so ist

1a) $$q = \frac{e_1}{\Psi_1 - \Psi_0},$$

ferner die Energie des Gesammtsystems bei der betreffenden electrischen Verteilung

a) $$W = \tfrac{1}{2} e_1 (\Psi_1 - \Psi_0),$$

demnach

1b) $$q = \frac{2W}{(\Psi_1 - \Psi_0)^2}$$

1c) $$= \frac{e_1^2}{2W}.$$

Nehmen wir nun einen speciellen Wert für Ψ, der auf s_1 gleich 1 und auf s_0 gleich Null wird, und berechnen mit ihm das über das ganze electrische Feld zu erstreckende Raumintegral

b) $$W_\Psi = \frac{1}{8\pi} \iiint \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz,$$

so kann nach Art. 99b) W jedenfalls nicht grösser sein als dieses W_Ψ; die obere Grenze von q ist also gleich $2W_\Psi$.

Zur Bestimmung der untern Grenze von q benutzen wir ein System von Werten von f, g, h, welches der Gleichung

c) $$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0$$

genügt, und ferner

d) $$\iint (l_1 f + m_1 g + n_1 h)\, ds_1 = e_1$$

Digitized by Google

macht. Berechnet man mit den so bestimmten Functionen das ebenfalls über das ganze electrische Feld zu erstreckende Raumintegral

e) $$W_{\mathfrak{D}} = 2\pi \iiint (f^2 + g^2 + h^2)\, dx\, dy\, dz.$$

so ist nach Art. 100c) W jedenfalls nicht grösser als dieses $W_{\mathfrak{D}}$, die untere Grenze von q ist daher $e_1^2/2W_{\mathfrak{D}}$, also

2) $$2W_{\Psi} > q > \frac{e_1^2}{2W_{\mathfrak{D}}}.$$

Darnach verfährt man bei der Bestimmung der Grenzen von q so, dass man auf s_1 und s_0 electrische Verteilungen annimmt, deren Summe Null giebt. Damit berechnet man ein dieser Verteilung entsprechendes Potential Ψ, das auf s_1 gleich 1 und auf s_0 gleich 0 ist, und aus der Gleichung b) die entsprechende Energie W_{Ψ}. Es ist dann

$$q < 2W_{\Psi}.$$

Ferner macht man

$$f = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial x},\quad g = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial y},\quad h = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

und bestimmt nach e) die Energie $W_{\mathfrak{D}}$. Man erhält so

$$q > \frac{e_1^2}{2W_{\mathfrak{D}}}.$$

Es ist dabei nicht nötig $W_{\mathfrak{D}}$ durch eine Integration über das ganze electrische Feld zu eruiren, denn da im ganzen Felde $\nabla^2 \Psi = 0$ sein muss, so haben wir auch

e_1) $$W_{\mathfrak{D}} = \tfrac{1}{2}\iint \Psi \sigma_1\, ds_1 + \tfrac{1}{2}\iint \Psi \sigma_0\, ds_0,$$

wo sich das erste Integral auf die Conductoroberfläche s_1, das zweite auf die s_0 bezieht.

Wenn gar keine anderweitigen Conductoren in endlicher Entfernung von s_1 vorhanden sind, verschwindet das zweite Integral.

Wegen weiterer Ausführungen verweise ich auf Art. 308.

102b. Die obige Methode für die Bestimmung der Grenzen, innerhalb deren die Capacität eines Conductors sich befindet, erfordert die Berechnung eines Potentials, dessen Eruirung selbst meist mit grossen Schwierigkeiten verbunden ist. Ich will daher noch zeigen, wie man das Potential von Conductoren mit beliebiger Annäherung bestimmen kann, wenn seine Werte auf den Conductoren selbst gegeben sind.

Es sei also, um bei dem uns interessirenden Fall zu bleiben, s_1 die Fläche des Conductors (oder eines Systems von Conductoren), auf dem das

Digitized by Google

Potential 1 ist, und s_0 die eines andern Conductors (oder eines Systems von Conductoren), auf dem das Potential den Wert Null hat.

Stellen wir uns vor, dass man die Kraftlinien von s_1 nach s_0 in gewisser Annäherung zu ziehen vermag und bezeichnen mit $s_1 s_0$, Ps_0 die Bogenlänge einer solchen Linie vom System s_1 bis zu dem s_0 bezüglich von einem Punkte P bis zu s_0, so können wir in erster Annäherung für das Potential Ψ den Wert

1) $$\Psi_1 = \frac{Ps_0}{s_1 s_0}$$

nehmen, der auf s_1 gleich 1 und auf s_0 gleich 0 wird.

Ziehen wir nun die Kraftlinien, welche senkrecht zu den Niveauflächen $\Psi = \text{const.}$ sind, und bezeichnen ein Bogenelement derselben mit ds, so haben wir für die Kraftcomponenten in erster Annäherung

a) $$R_1 \frac{dx}{ds} = f_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \quad R_1 \frac{dy}{ds} = g_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \quad R_1 \frac{dz}{ds} = h_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial z},$$

wenn R die resultirende Kraft bezeichnet. Um zu einer zweiten Annäherung zu gelangen, nehmen wir diese Kraftcomponenten etwas allgemeiner

b) $$R_2 \frac{dx}{ds} = f_2 = -p\frac{\partial \Psi_1}{\partial x}, \quad R_2 \frac{dy}{ds} = g_2 = -p\frac{\partial \Psi_1}{\partial y}, \quad R_2 \frac{dz}{ds} = h_2 = -p\frac{\partial \Psi_1}{\partial z}$$

und bestimmen p so, dass die Laplacesche Gleichung $\partial f/\partial x + \partial g/\partial y + \partial h/\partial z = 0$ erfüllt wird.

Wir machen also

c) $$-p\,\nabla^2 \Psi_1 + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichung für p lässt sich aber leicht integriren, denn da wegen der Beziehungen unter a)

d) $$\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = -R_1 \frac{dp}{ds} = -R_1^2 \frac{dp}{ds}\frac{1}{R_1}$$
$$= R_1^2 \frac{dp}{ds}\frac{1}{\frac{d\Psi_1}{ds}} = R_1^2 \frac{dp}{d\Psi_1}$$

ist, so folgt aus c)

c') $$p\,\nabla^2 \Psi_1 = R_1^2 \frac{dp}{d\Psi_1},$$

somit

e) $$p = C\, e^{\int_0^{\Psi_1} \frac{\nabla^2 \Psi_1}{R_1^2}\, d\Psi_1}.$$

Die Integration nach Ψ_1 bezieht sich auf alle Werte des Ψ_1 längs der Kraftlinie $s_1 s_0$. Führt man diesen Wert von p in die Gleichungen b) ein,

Digitized by Google

so erhält man die zweite Annäherung für die Kraftcomponenten. Die zweite Annäherung für das Potential, also Ψ_2, ergiebt sich dann, weil

$$-\frac{d\Psi_2}{ds} = f\frac{dx}{ds} + g\frac{dy}{ds} + h\frac{dz}{ds} = -p\frac{d\Psi_1}{ds}$$

ist, aus

2) $$\Psi_2 = C\int_0^{\Psi_1} e^{\int_0^{\Psi_1} \frac{\nabla^2\Psi_1}{R_1^2} d\Psi_1} d\Psi_1.$$

Ψ_2 verschwindet schon, wenn Ψ_1 gleich Null ist, also auf s_0, damit es auch die zweite Bedingung erfüllt und auf s_1 gleich 1 wird, muss die Constante C aus

f) $$C\int_0^1 e^{\int_0^{\Psi_1} \frac{\nabla^2\Psi_1}{R^2} d\Psi_1} d\Psi_1 = 1$$

bestimmt werden. Aus dieser zweiten Annäherung Ψ_2 kann man wieder eine dritte Ψ_3 u. s. f. rechnen.

Die damit bestimmten Energieen W_{Ψ_1}, $W_{\mathfrak{D}_1}$, W_{Ψ_2}, $W_{\mathfrak{D}_2}$, ... geben dann nach der im Vorigen auseinandergesetzten Methode für die Capacität Werte, die bald grösser bald kleiner, als ihr wahrer Wert sind und diesem sich möglichst zu nähern gestatten.

Zur Ausführung dieser Methode ist aber, wie man sieht, die genäherte Kenntnis des Verlaufs der Kraftlinien nötig, weil sonst die Integrationen sich nicht ausführen lassen, und das erschwert und beschränkt ihre Anwendbarkeit ganz beträchtlich.

102c. Ich lasse ein Beispiel zu ihrer Klarstellung folgen, indem ich die Niveauflächen und Inductionslinien (Kraftlinien) in einem electrischen Felde zwischen zwei schwach gekrümmten und nahezu parallelen Flächen angenähert bestimme.

Sei z die Axe, welche beide Flächen senkrecht verbindet,

$$z_1 = f_1(x, y) = a$$

die Gleichung der Fläche, auf der das Potential gleich Null, und

$$z_2 = f_2(x, y) = b$$

die derjenigen, auf welcher es gleich 1 sein sollte. a und b, wo b grösser sein soll als a, sind dann gegebene Functionen von x, y, deren Derivirte nach x und y wegen der schwachen Krümmung der Flächen sehr klein sind.

Offenbar kann man wegen des eben erwähnten Umstandes zunächst annehmen, dass die Kraftlinien parallel der zAxe laufen.

Da $\Psi_1 = Ps_0/s_1s_0$ sein sollte, so ist in erster Annäherung

$$\Psi_1 = \frac{z-a}{b-a}.$$

Digitized by Google

Die Kraftlinien laufen senkrecht zu den Flächen

$$\Psi_1 = \frac{z-a}{b-a} = \text{const.},$$

und die Kraftcomponenten sind

$$f_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial x},\ g_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial y},\ h_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = -\frac{1}{b-a}.$$

Bei der Bildung von R_1^2 können wir f_1 und g_1 als sehr klein gegen h_1 fortlassen und dann bleibt

$$R_1^2 = \frac{1}{(b-a)^2}.$$

Ferner ist bei Vernachlässigung von Producten der Derivirten von a und b nach x und y

$$\begin{aligned}\nabla^2 \Psi_1 &= \frac{1}{b-a}\left\{\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a}{\partial y^2} + \frac{z-a}{b-a}\left(\frac{\partial^2 (b-a)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (b-a)}{\partial y^2}\right)\right\} \\ &= -\frac{1}{b-a}\left\{\nabla^2 a + \Psi_1 \nabla^2 (b-a)\right\} \\ &= \frac{1}{b-a}\left\{A + \Psi_1 B\right\}.\end{aligned}$$

Also

$$\frac{\nabla^2 \Psi_1}{R_1^2}\, d\Psi_1 = (b-a)\,(A + B\Psi_1)\, d\Psi_1,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned}p &= C e^{(A\Psi_1 + \frac{1}{2}B\Psi_1^2)(b-a)} \\ &= C\left(1 + A(z-a) + \tfrac{1}{2}B\frac{(z-a)^2}{(b-a)}\right)\end{aligned}$$

und

$$\Psi_2 = C\left(\Psi_1 + (b-a)\left(\tfrac{1}{2}A\Psi_1^2 + \tfrac{1}{6}B\Psi_1^3\right)\right).$$

Für $\Psi_1 = 1$ sollte $\Psi_2 = 1$ sein, man hat also bis auf kleine Grössen zweiter Ordnung

$$C = 1 - (b-a)\left(\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{6}B\right),$$

und damit

$$p = 1 + \tfrac{1}{6}(b-a)\nabla^2(2a+b) - (z-a)\nabla^2 a - \tfrac{1}{2}\frac{(z-a)^2}{b-a}\nabla^2(b-a)$$

$$\Psi_2 = \frac{z-a}{b-a} + \tfrac{1}{6}(z-a)\nabla^2(2a+b) - \tfrac{1}{2}\frac{(z-a)^2}{b-a}\nabla^2 a - \tfrac{1}{6}\frac{(z-a)^3}{(b-a)^2}\nabla^2(b-a).$$

Ψ_2 ist die zweite Annäherung an das Potential.

Digitized by Google

Die zweitgenäherten Werte für die Kraftcomponenten ergeben sich aus den Gleichungen b) des vorigen Artikels zu

$$f_2 = -\frac{p}{b-a}\left[\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{z-a}{b-a}\frac{\partial(b-a)}{\partial x}\right],$$

$$g_2 = -\frac{p}{b-a}\left[\frac{\partial a}{\partial y} + \frac{z-a}{b-a}\frac{\partial(b-a)}{\partial y}\right],$$

$$h_2 = -\frac{p}{b-a}.$$

Sind endlich σ_a, σ_b die Flächendichten auf den Flächen a und b und Ψ_a, Ψ_b die zugehörigen Potentiale, so haben wir noch

$$\sigma_a = \frac{1}{4\pi}(\Psi_a - \Psi_b)\left[\frac{1}{b-a} + \tfrac{1}{6}\nabla^2(2a+b)\right],$$

$$\sigma_b = \frac{1}{4\pi}(\Psi_b - \Psi_a)\left[\frac{1}{b-a} - \tfrac{1}{6}\nabla^2(a+2b)\right].$$

Digitized by Google

Cap. V.

Mechanische Kräfte zwischen zwei electrischen Systemen.

—x—

103. Wir bezeichnen die beiden electrischen Systeme, um deren Einwirkung auf einander es sich handelt, durch E_1 und E_2 und die bezüglichen Raumdichten der in ihnen angehäuften Electricitätsmengen durch ρ_1 und ρ_2.

Die in Richtung der x Axe wirkende Abstossungskraft eines Elements (x_2, y_2, z_2) in E_2 auf ein Element (x_1, y_1, z_1) in E_1 ist dann

$$A' = \rho_1 \rho_2 \frac{x_1 - x_2}{r^3} dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2,$$

wo

$$r^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$

ist. Giebt also A die nach der x Axe gerichtete Krafteinwirkung des ganzen Systems E_2 auf das ganze System E_1, so haben wir

1a) $$A = \iiint\iiint \frac{x_1 - x_2}{r^3} \rho_1 \rho_2 dx_1 dy_1 dz_1 dx_2 dy_2 dz_2.$$

Die Grenzen der Integrationen werden durch die Grenzen der beiden Systeme E_2 und E_1 bestimmt. Da aber ρ_1 nur in E_1 und ρ_2 nur in E_2 von Null verschieden ist, so kann man auch $\pm \infty$ als Integrationsgrenzen wählen.

Die obige Formel für die Kraftwirkung ist der mathematische Ausdruck der Annahme einer Wirkung in die Ferne zwischen den beiden electrischen Systemen, ohne Rücksicht auf eine etwaige Modificirung des Kraftgesetzes durch das beide Systeme trennende Medium.

Führen wir wieder das Potential ein, das wir durch Ψ_2 bezeichnen, wenn es von der Einwirkung des Systems E_2 auf ein Element (x_1, y_1, z_1) von E_1 und durch Ψ_1, wenn es von der Einwirkung des Systems E_1 auf ein Element (x_2, y_2, z_2) in E_2 herrührt, so haben wir zunächst

Digitized by Google

a) $$\Psi_2 = \iiint \frac{\rho_2}{r}\, dx_2\, dy_2\, dz_2,$$

b) $$\Psi_1 = \iiint \frac{\rho_1}{r}\, dx_1\, dy_1\, dz_1;$$

c) $$\nabla^2 \Psi_2 = +4\pi\rho_2,$$

d) $$\nabla^2 \Psi_1 = +4\pi\rho_1,$$

wozu noch kommt, dass Ψ_2 und Ψ_1 in der Unendlichkeit verschwinden.

Damit erhalten wir

1b) $$A = -\iiint \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\rho_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1,$$

oder wenn von der Gleichung d) Gebrauch gemacht wird,

1c) $$A = -\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\nabla^2 \Psi_1\, dx_1\, dy_1\, dz_1,$$

ein Ausdruck für die Kraft, der nur noch die beiden Potentiale enthält.

Es ist dabei vorausgesetzt, dass Ψ_2 sowohl wie Ψ_1 in jedem Punkte des electrischen Feldes einen bestimmten Wert hat.

104. Wir haben schon bemerkt, dass man als Integrationsgrenzen auch $\pm\infty$ wählen darf, allgemein also irgend welche Grenzen, durch die das System E_1 vollständig eingeschlossen wird. Im Folgenden werden wir annehmen, dass die beiden Systeme E_1 und E_2 so zu einander liegen, dass sich stets eine geschlossene Fläche s angeben lässt, welche E_1 gänzlich einschliesst und E_2 gänzlich ausschliesst.

Setzen wir dann

e) $$\rho = \rho_1 + \rho_2, \quad \Psi = \Psi_1 + \Psi_2,$$

so ist innerhalb s

$$\rho_2 = 0, \quad \rho = \rho_1,$$

und ausserhalb s

$$\rho_1 = 0, \quad \rho = \rho_2,$$

also auch

1d) $$A = -\iiint \frac{\partial \Psi_2}{\partial x}\rho\, dx_1\, dy_1\, dz_1.$$

Auch die Form 1c) für die Kraftcomponente A können wir in ähnlicher Weise umgestalten.

Es ist nämlich zunächst

$$4\pi A = -\iiint \frac{\partial (\Psi - \Psi_1)}{\partial x}\nabla^2(\Psi - \Psi_2)\, dx_1\, dy_1\, dz_1,$$

Digitized by Google

und da innerhalb der Grenzfläche s die Grösse $\nabla^2 \Psi_2 = 0$ ist, so wird

$$4\pi A = -\iiint \frac{\partial (\Psi - \Psi_1)}{\partial x} \nabla^2 \Psi \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1.$$

Die Grösse

$$A_{11} = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} \nabla^2 \Psi \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1$$

bezeichnet aber die in Richtung der x Axe fallende Kraftwirkung des Systems E_1 auf sich selbst, sie muss also verschwinden, weil die Wirkungen zweier Teilchen aufeinander sich gleich und entgegengesetzt sind. Damit wird

1e) $$A = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\partial \Psi}{\partial x} \nabla^2 \Psi \, dx_1 \, dy_1 \, dz_1.$$

Ψ ist das Potential beider Systeme auf ein Element des Systems E_1, und die Integration erstreckt sich auf den ganzen Raum innerhalb der Grenzfläche s, die das ganze System E_1 einschliessen muss, aber keinen Teil des Systems E_2 enthalten darf.

105. Ich leite für die Kraftwirkung A noch einen andern Ausdruck ab, in welchem die dreifache Integration über den Raum innerhalb s durch ein zweifaches Integral über die Fläche s ersetzt ist.

Hier leistet uns, wie im vorigen Capitel, das Theorem III_1 in Art. 21 die nötigen Dienste. Ehe wir es aber anwenden können, müssen wir die Grösse

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x} \nabla^2 \Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right)$$

auf die Form

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

bringen.

Nun ist

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) - \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2$$

und ähnlich

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) - \tfrac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right)^2,$$

Digitized by Google

Setzt man also

$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2=8\pi\,p_{xx},$$
$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2=8\pi\,p_{yy},$$
$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2=8\pi\,p_{zz},$$

2)
$$\frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial z}=4\pi\,p_{yz}=4\pi\,p_{zy},$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial x}=4\pi\,p_{zx}=4\pi\,p_{xz},$$
$$\frac{\partial\Psi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial y}=4\pi\,p_{xy}=4\pi\,p_{yx},$$

so wird

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\Psi}{\partial x}\nabla^2\Psi=\frac{\partial p_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial p_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial p_{zx}}{\partial z},$$

also nach dem citirten Satz

1f)
$$A=\iint(lp_{xx}+mp_{yx}+np_{zx})\,ds,$$

2f)
$$B=\iint(lp_{xy}+mp_{yy}+np_{zy})\,ds,$$

3f)
$$C=\iint(lp_{xz}+mp_{yz}+np_{zz})\,ds.$$

Die Integrationen erstrecken sich über die Fläche s, welche E_1 ganz einschliesst und E_2 ganz ausschliesst. Wenn nun die Wirkung von E_2 auf E_1 direct ohne Inanspruchnahme des zwischenliegenden Mediums vor sich geht, so haben die Grössen p weiter keine physikalische Bedeutung; sie sind dann einfach als Abkürzungen für die Grössen zu betrachten, denen sie gleichgesetzt sind.

Abstrahirt man aber von einer *actio in distans* und sucht die Einwirkung zweier electrischer Systeme aufeinander aus einem Zwange, der in gewisser Weise im Zwischenmedium verteilt ist, abzuleiten, so ist klar, dass man die ganze mechanische Wirkung von E_2 auf E_1 muss berechnen können, wenn man die Zwangskräfte in jedem Punkte einer Fläche s, welche E_1 von E_2 trennt und E_1 ganz einschliesst, kennt. Denn wenn man damit nicht die ganze Kraftwirkung von E_2 auf E_1 erhielte, so müsste eben noch eine Wirkung von Teilen, die ausserhalb s liegen, auf Teile, die sich innerhalb s befinden, zur Vervollständigung hinzutreten.

Digitized by Google

Das erste Erfordernis zur Rechtfertigung der Annahme einer Wirkung vermittelst des Zwischenmediums ist also die Umwandelbarkeit der Raumintegrale für die Kraftcomponenten über den Raum innerhalb s in Flächenintegrale über s.

Wir haben aber eben gezeigt, dass eine solche Transformirung wirklich möglich ist, und wir haben die drei Kraftcomponenten durch die drei Flächenintegrale unter 1f), 2f) und 3f) dargestellt.

Vergleicht man aber diese Ausdrücke mit den für die entsprechenden Grössen in der Elasticitätstheorie geltenden Gleichungen, so folgt, dass wenn wir der Annahme folgen, vermöge deren zwei electrische Systeme auf einander nicht direct, sondern vermittelst eines Zwanges, der in dem Zwischenmedium continuirlich verteilt ist, wirken, dass wir dann die eingeführten Functionen $p_{xx}, \ldots$ als die Componenten eines in dem Medium wirklich vorhandenen Zwanges zu betrachten haben.

106. Die Verteilung des Zwanges und seine Natur wird uns klarer werden, wenn wir die Fläche s specialisiren. Da diese Fläche keiner andern Bedingung unterworfen ist, als der, dass sie E_1 vollständig einschliesst und E_2 vollständig ausschliesst, so können wir auch irgend eine äquipotentielle Fläche, welche der obigen Bedingung genügt, zur Fläche s benutzen. Ist dann ν die nach aussen gerichtete Normale derselben und R die resultirende Kraftintensität in Richtung von ν, so ist

$$-R = \frac{\partial \Psi}{\partial \nu}$$

$$-Rl = \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad -Rm = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad -Rn = \frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

also nach den Gleichungen unter 2)

$$2_1) \qquad \begin{aligned} p_{xx} &= \frac{1}{8\pi} R^2 (l^2 - m^2 - n^2), \\ p_{yy} &= \frac{1}{8\pi} R^2 (m^2 - n^2 - l^2), \\ p_{zz} &= \frac{1}{8\pi} R^2 (n^2 - l^2 - m^2), \\ p_{yz} &= p_{zy} = \frac{1}{4\pi} R^2 mn, \\ p_{zx} &= p_{xz} = \frac{1}{4\pi} R^2 nl, \\ p_{xy} &= p_{yx} = \frac{1}{4\pi} R^2 lm. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Bezeichnen wir durch a_π, b_π, c_π die Componenten der Druckkraft, welche senkrecht zu ds auf die Flächeneinheit wirkt, so ist

$$3) \qquad \begin{aligned} a_\pi &= lp_{xx} + mp_{xy} + np_{xz}, \\ b_\pi &= lp_{yx} + mp_{yy} + np_{yz}, \\ c_\pi &= lp_{zx} + mp_{zy} + np_{zz}, \end{aligned}$$

also zufolge der obigen Werte für die p

$$3_1) \qquad \begin{aligned} a_\pi &= \frac{1}{8\pi} R^2 l, \\ b_\pi &= \frac{1}{8\pi} R^2 m, \\ c_\pi &= \frac{1}{8\pi} R^2 n, \end{aligned}$$

$$4_1) \qquad \left(a_\pi^2 + b_\pi^2 + c_\pi^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8\pi} R^2.$$

Daraus ergiebt sich, dass die Kraftwirkung des ausserhalb ds befindlichen Mediums auf das Medium, welches sich innerhalb ds aufhält, senkrecht zu ds und nach aussen gerichtet ist. Sie besteht also in einer Spannung gleich der eines Seils, und hat zur Resultanten

$$\frac{1}{8\pi} R^2.$$

Wir nehmen zweitens an, dass ds ein Flächenelement von s ist, welches senkrecht zu den Niveauflächen, die es treffen, steht.

Wir haben dann

$$l\frac{\partial \Psi}{\partial x} + m\frac{\partial \Psi}{\partial y} + n\frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0.$$

Andererseits ist aber

$$8\pi(lp_{xx} + mp_{yx} + np_{xz}) = l\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right] + 2m\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial y} + 2n\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

also durch Combination beider Gleichungen

$$8\pi(lp_{xx} + mp_{xy} + np_{xz}) = -l\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right] = -lR^2.$$

Die drei Componenten a_σ, b_σ, c_σ des auf die Flächeneinheit und senkrecht zu derselben wirkenden Druckes sind demnach

Digitized by Google

$$-a_\sigma = \frac{1}{8\pi} R^2 l,$$

$3_2)$ $$-b_\sigma = \frac{1}{8\pi} R^2 m,$$

$$-c_\sigma = \frac{1}{8\pi} R^2 m,$$

$4_2)$ $$(a_\sigma^2 + b_\sigma^2 + c_\sigma^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8\pi} R^2.$$

Steht also das Flächenelement ds senkrecht zu den Niveauflächen, so ist die darauf wirkende Kraft eine Druckkraft, die wieder das Element senkrecht angreift. Ihr numerischer Betrag ist gleich dem der vorher bestimmten Zugkraft, die auf ds wirkt, wenn es parallel einer Niveaufläche verläuft.

Damit ist der Charakter des Zwanges in dem Medium vollständig klar gestellt.

Die Richtung, nach der die electromotorische Kraftintensität an einer Stelle des Mediums wirkt, ist eine Hauptaxe des Zwanges, der längs derselben eine Spannung von der Grösse $R^2/8\pi$ verursacht.

Jede zu der Richtung der electromotorischen Kraftintensität senkrechte Richtung ist ebenfalls eine Hauptaxe des Zwanges. Doch äussert sich hier der Zwang in einem Druck von derselben Grösse $R^2/8\pi$ wie die zuerst angeführte Spannung.

Der Zwang ist von ziemlich specieller Natur, denn alle Hauptcomponenten desselben haben numerisch denselben Betrag. Die Zeichen der den Zwang in Richtung der electromotorischen Kraftintensität zusammensetzenden Componenten sind aber den Zeichen der Componenten, aus welchen der Zwang senkrecht zu jener Richtung resultirt, entgegengesetzt.

Demnach gelten zwischen den sechs eingeführten Variabeln p, welche den Zwangzustand des Zwischenmediums bestimmen, wie man leicht aus den Formeln unter 2) deduciren kann, die folgenden drei Bedingungsgleichungen

$5)$ $$\begin{aligned} p_{yz}^2 &= (p_{xx} + p_{yy})\ (p_{zz} + p_{xx}), \\ p_{zx}^2 &= (p_{yy} + p_{zz})\ (p_{xx} + p_{yy}), \\ p_{xy}^2 &= (p_{zz} + p_{xx})\ (p_{yy} + p_{zz}), \end{aligned}$$

und es fallen die sechs Variabeln p zu drei zusammen. Ebenso ist ja auch der Zustand des Mediums durch die drei Derivirten des Potentials, durch

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial x}, -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, -\frac{\partial \Psi}{\partial z}$$

bestimmt.

Digitized by Google

107. Die bisherigen Untersuchungen basiren auf der Annahme, dass die Dichte der Electricität überall endlich ist, die Electricität also räumlich verteilt ist. Ich werde jetzt zeigen, dass man mit Hilfe desselben durch die Gleichungen unter 2) in Art. 105 definirten Zwangzustandes des Zwischenmediums auch die electrische Kraftwirkung erklären kann, wenn eine endliche Electricitätsmenge auf einer endlichen Fläche ausgebreitet ist, wo also die Raumdichte derselben unendlich gross wird, die Flächendichte aber endlich bleibt.

Da die Kraftcomponenten beim Durchgang durch eine electrisirte Fläche Sprünge erleiden, so kann auch der Zwang, welcher im Zwischenmedium herrschen soll, nicht im ganzen Felde stetig variiren, er muss vielmehr ebenfalls zu beiden Seiten der electrischen Fläche um einen endlichen Betrag verschiedene Werte haben.

Sind nun l, m, n die Richtungscosinusse der Normale zu dem Element ds einer electrischen Fläche, P, Q, R die Componenten der electrischen Kraftintensität auf der Seite von ds, wohin die Normale läuft, und P', Q', R' die Componenten auf der entgegengesetzten Seite, so haben wir für die in Richtung der xAxe die Flächeneinheit angreifende Componente a des zu beiden Seiten des Flächenelements ds wirkenden Zwanges

$$6') \qquad a = l(p_{xx} - p'_{xx}) + m(p_{xy} - p'_{xy}) + n(p_{xz} - p'_{xz}),$$

also nach den Gleichungen unter 2) in Art. 105

$$a = \frac{1}{8\pi} l\{(P^2 - P'^2) - (Q^2 - Q'^2) - (R^2 - R'^2)\} + \frac{1}{4\pi} m(PQ - P'Q') + \frac{1}{4\pi} n(PR - P'R'),$$

$$= \frac{1}{8\pi} l\{(P - P')(P + P') - (Q - Q')(Q + Q') - (R - R')(R + R')\} + \frac{1}{8\pi} m\{(P - P')(Q + Q') + (P + P')(Q - Q')\} + \frac{1}{8\pi} n\{(P - P')(R + R') + (P + P')(R - R')\}.$$

Es ist aber nach den Gleichungen 2) bis 4) in Art. 78a und 2) in Art. 78b

$$P - P' = 4\pi l\sigma,$$
$$Q - Q' = 4\pi m\sigma,$$
$$R - R' = 4\pi n\sigma,$$

wo σ die Flächendichte der Electricität angiebt, mithin wird

$$a = \tfrac{1}{2} l\sigma\{l(P + P') - m(Q + Q') - n(R + R')\} + \tfrac{1}{2} m\sigma\{l(Q + Q') + m(P + P')\} + \tfrac{1}{2} n\sigma\{l(R + R') + n(P + P')\}$$

oder

Digitized by Google

$$6)\quad \begin{aligned} a &= \tfrac{1}{2}\sigma(P + P'),\\ b &= \tfrac{1}{2}\sigma(Q + Q'),\\ c &= \tfrac{1}{2}\sigma(R + R'). \end{aligned}$$

Definiren wir also den Zwangzustand in einem Medium durch die Gleichungen unter 2) in Art. 105, so ist die in irgend einer Richtung wirkende Componente des ein Element ds der electrischen Fläche senkrecht angreifenden Zwanges gleich dem Product aus der daselbst herrschenden Flächendichte in das arithmetische Mittel der zu beiden Seiten des fraglichen Elements ds in jener Richtung wirkenden electrischen Kraftcomponenten.

Dieses Resultat stimmt aber vollständig mit dem überein, das wir schon im Art. 79 in ganz anderer Weise abgeleitet haben.

Die Hypothese eines Zwangzustandes im Zwischenmedium reicht also auch in dem Falle einer superficiellen Verteilung einer endlichen Electricitätsmenge vollständig zur Ableitung der mechanischen Kraftwirkung der Electricität hin.

108. Ich benutze die Entwicklung dieser Hypothese, um einen Satz zu beweisen, von dem ich schon im Art. 104) zur Ableitung der Formel 1c) Gebrauch gemacht habe, dass nämlich die resultirende Kraftwirkung eines Systemes auf sich selbst verschwindet, also

$$A = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{\partial \Psi}{\partial x}\, \nabla^2 \Psi \, d\tau = 0$$

wird, wenn Ψ das Potential der im Raume τ verteilten electrischen Massen auf einen Punkt (x, y, z) dieses Raumes angiebt.

Dieser Satz scheint zwar evident genug zu sein, wenn man bedenkt, dass die Wirkungen zweier Teilchen aufeinander sich gleich und entgegengesetzt sind. Allein hier handelt es sich zunächst darum, dass eine Summe von Gliedern ohne Rücksicht auf ihre physikalische Bedeutung verschwinden soll, wenn die Function Ψ von vornherein durch gewisse Bedingungen, die sie zu erfüllen hat, gegeben ist, und ob das wirklich zutrifft, ist so ohne weiteres nicht einzusehen.

Einen Beweis für den obigen Satz können wir aus dem in den Art. 99b und 100c abgeleiteten Resultat erhalten, dass wenn $\nabla^2 \Psi$ in jedem Punkte gegeben ist und Ψ in der Unendlichkeit verschwindet, das Potential Ψ'' in jedem Punkte (x', y', z') einen und nur einen endlichen Wert

$$\Psi' = \frac{1}{4\pi}\int\int\int \frac{1}{r}\, \nabla^2 \Psi \, d\tau$$

hat.

Einen andern Beweis erhalten wir durch die früher vorgenommene Umwandlung des Raumintegrals für eine Kraftcomponente in ein Flächenintegral, wenn wir von der directen Darstellung des Potentials als Function der Coordinaten ausgehen, also das Potential Ψ selbst und nicht die Grösse $\nabla^2 \Psi$ als das Primäre betrachten.

Digitized by Google

Wir haben

$$A = \iint (lp_{xx} + mp_{xy} + np_{xz})\, dS,$$

wo S irgend eine das electrische System einschliessende Fläche bedeutet.

Die p_{xx}, p_{xy}, p_{xz} können dem frühern zufolge nicht grösser als $R^2/8\pi$ sein. Wählen wir aber, was uns vollständig freisteht, die Fläche S in sehr bedeutender Entfernung a von der Fläche s, welche alle Punkte einschliesst, für die $\nabla^2\Psi$ einen von Null verschiedenen Wert hat, so ist, wie man weiss, Ψ numerisch nicht grösser als e/a, und R numerisch nicht grösser als $\partial\Psi/\partial a$ oder e/a^2, die p sind also numerisch nicht grösser als $e^2/8\pi a^4$. Specialisiren wir die Fläche S noch weiter, indem wir sie als eine Kugel mit dem sehr grossen Radius a ansehen, so folgt, dass A nicht grösser als $e^2/2a^2$ ist. Wächst demnach a unendlich an, so convergirt A gegen Null. Allein die Darstellung des A durch das Flächenintegral über S ist identisch mit der durch das Raumintegral über τ. Dieses letztere giebt aber nach Art. 104 stets denselben Wert für A, wie gross auch der von S eingeschlossene Raum τ sein mag, wenn ihm nur jeder Punkt angehört, in welchem $\nabla^2\Psi$ von Null verschieden ist. Es muss also A überhaupt verschwinden, wenn es die Kraftwirkung eines electrischen Systems auf sich selbst bezeichnet, wie auch die Fläche S sonst gewählt sein mag, vorausgesetzt dass sie keinen electrischen Punkt ausschliesst.

109. Der Zwangzustand in dem Zwischenmedium, wie ich ihn in diesem Capitel zur Erklärung der Kraftwirkung electrischer Systeme auf einander angenommen habe, unterscheidet sich in nichts von dem von Faraday bei seinen Untersuchungen über die Induction durch Dielectrica hindurch supponirten.

Faraday kommt nämlich in seinen *Researches* zu folgenden Resultaten:

„(1297) Die direct inducirende Kraft, die man sich als längs Linien wirkend vorstellen kann, welche von der Oberfläche eines geladenen Conductors zu der eines andern gezogen sind, wird von einer seitlichen oder transversalen Kraft begleitet, welche eine Dilatation oder Repulsion jener vorgestellten Linien hervorbringt.

(1224) Die in Richtung der Inductionslinien zwischen den Teilchen des dielectrischen Mediums wirkende Attraction ist von einer seitlich wirkenden und eine Divergenz der Inductionslinien verursachenden Abstossungskraft begleitet.

(1298) Induction scheint in einem gewissen durch den electrisirten Körper in den einzelnen Partikeln des Mediums hervorgerufenen und erhaltenen Polarisationszustand zu bestehen, der sich dadurch charakterisirt, dass die Partikel zwei entgegengesetzt begabte, positive und negative Teile erhalten, welche gegen einander und gegen die inducirenden Flächen oder Teilchen symmetrisch angeordnet sind. Der Zustand, in den das Medium

Digitized by Google

dadurch gerät, ist ein erzwungener, denn er entsteht durch eine äussere Kraft, bleibt solange diese Kraft wirkt und verschwindet sobald die Kraft entfernt wird. Dieser Zustand wird aber nur in Isolatoren durch ein und dieselbe Electricitätsmenge fortdauernd erhalten, denn nur bei ihnen bleiben die einzelnen Partikel in ihrer erzwungenen Lage, solange die Electricitätsmenge vorhanden ist."

Diese Theorie entspricht vollständig den Schlüssen, zu denen wir in den obigen Auseinandersetzungen gelangt sind, denen zufolge das Medium in jedem Punkte tangential zu der durch ihn hindurchgehenden Kraftlinie einen Zug, proportional dem Quadrate der electrischen Kraftintensität und senkrecht zu derselben einen dem Zuge numerisch gleichen Druck erleiden sollte.

Wenn ich mich statt der Bezeichnung „Zug" des Namens „electrische Spannung" — ein Wort, das von verschiedenen Physikern vielfach in sehr verschiedenem Sinne gebraucht wird — bedienen sollte, so verstehe ich darunter stets die mechanische Kraftwirkung in Richtung der Kraftlinien, also eine Grösse, welche von Punkt zu Punkt proportional dem Quadrate der electrischen Kraftintensität variirt.

110. Es könnte nun zunächst scheinen, als ob die Hypothese, dass ein solcher Zwangzustand in flüssigen Dielectricis, wie in Luft oder Terpentin, wirklich existirt, mit der Tatsache im Widerspruche steht, dass in solchen Flüssigkeiten ein Druck sich gleichmässig nach allen Seiten fortpflanzt und an jeder Stelle nach allen Richtungen mit derselben Stärke wirkt. Indessen wird bei der Ableitung dieses Princips aus den für das Gleichgewicht einer Flüssigkeit unter der Annahme einer vollständigen Beweglichkeit ihrer Teilchen geltenden Bedingungen von solchen Vorgängen, wie sie nach unsern früheren Schilderungen an den Kraftlinien stattfinden sollen, gänzlich abstrahirt. In der Tat ist auch ein solcher Zwangzustand in einer Flüssigkeit sehr wol mit dem Gleichgewicht und der Beweglichkeit ihrer Partikel verträglich, denn wenn ein Teil der Flüssigkeit nicht electrisch geladen ist, so üben die an seiner Oberfläche verteilten Zwangskräfte, wie gross sie da auch sein mögen, doch im Innern dieses ungeladenen Teiles keine von Null verschiedene Wirkung aus. Nur wenn dieser Teil selbst geladen ist, bringen die an der Oberfläche wirkenden Kräfte im Innern einen gezwungenen Zustand hervor, und dann sucht auch das Medium, wie ich schon im Art. 55 auseinandergesetzt habe, wirklich sich zu bewegen. Sonst wird das Gleichgewicht der Flüssigkeit durch den charakterisirten Zwangzustand nicht weiter gestört.

Wir können nun die Grösse W, deren Eigenschaften uns in Art. 99 beschäftigt haben, als die Energie des Zwanges, der durch das ganze Medium wirkt, definiren. Es folgt dann aus den an der betreffenden Stelle abgeleiteten Theoremen, dass der Zwangzustand ein absolutes Minimum der Energie hervorbringt, wenn er den dort aufgestellten Bedingungen entspricht. Wenn aber ein System in einer gewissen Configuration ein

Digitized by Google

Minimum der Energie besitzt, so befindet es sich in dieser Configuration in stabilem Gleichgewicht. Ein Dielectricum kommt also von selbst, wenn es unter dem Einfluss der Induction electrischer Körper aufeinander steht, in einen Zwangzustand, der in der angegebenen Weise im Medium verteilt ist.

Mit der Hypothese eines Zwangzustandes in dem Zwischenmedium sind wir aber nur einen Schritt in der Erkenntnis der Rolle, welche das Zwischenmedium bei der Fortleitung der electrischen Kraft von einem electrisirten Körper zu einem anderen spielt, vorwärts gekommen, denn einstweilen haben wir weder die Art und Weise dargelegt, wie dieser Zwang physikalisch entsteht, noch auch, wie er erhalten wird. Der nächste Schritt, den wir zu machen hätten, müsste uns erklären, wie dieser Zwang durch die Einwirkung der einzelnen Partikel des Mediums auf einander zu Stande kommt. Er scheint mir deshalb von grosser Wichtigkeit zu sein, weil er Erscheinungen, die man früher nur durch die Annahme der Existenz einer Wirkung in die Ferne hat erklären können, auf das Spiel molecularer Kräfte reduciren würde.

Ich bin aber nicht im Stande gewesen, diesen zweiten Schritt zu machen und mit den Principien der Mechanik jenen Zwangzustand eines Mediums aus Molecularkräften abzuleiten. Ich werde daher die Theorie auf diesem Punkte noch stehen lassen und mich zu den andern Erscheinungen, die in einem Dielectricum während der Induction zu Tage treten, wenden.

111. I. *Electrische Verschiebung.* Wenn ein Körper auf einen andern durch ein Dielectricum hindurch inducirend einwirkt, so findet in dem Dielectricum in Richtung der Induction eine electrische Verschiebung statt. So geht, zum Beispiel, in einer Leydener Flasche, deren innere Belegung positiv und deren äussere Belegung negativ geladen ist, durch den trennenden Glaskörper der Flasche eine electrische Verschiebung von innen nach aussen vor sich.

Ein Ansteigen der electrischen Verschiebung während einer gewissen Zeit entspricht einem während dieser Zeit in Richtung der Verschiebung stattfindenden electrischen Strome, ein Abnehmen der Verschiebung ist einem in entgegengesetzter Richtung verlaufenden Strome äquivalent.

Die gesammte Electricitätsmenge, welche durch eine bestimmte Fläche s in dem Medium verschoben wird, ist nach Art. 75 gegeben durch

$$\frac{1}{4\pi} K \iint R \cos\varepsilon \, ds,$$

wo K die specifische inductive Capacität bezeichnet und die Integration auf das Stück der Fläche sich bezieht, für welches die verschobene Electricitätsmenge gemessen werden soll.

II. *Die Flächenladung der einzelnen Teilchen des Dielectricums.* Trennen wir von dem Dielectricum einen Teil durch eine geschlossene Fläche ab, so geht durch diese Fläche eine electrische Verschiebung nach dem Aeussern vor

Digitized by Google

sich. Wir müssen daher annehmen, dass jedes Element der Trennungsfläche eine Ladung besitzt, deren Grösse durch die durch das Element nach dem Innern verschobene Electricität gemessen wird.

Die Ladung ist positiv auf der Seite der Fläche, welche von der Verschiebungsrichtung getroffen wird, negativ, wo sie von ihr verlassen wird; in einer Leydener Flasche, deren innere Belegung positiv, deren äussere Belegung negativ electrisirt ist, wird also ein Stück des Glaskörpers auf der nach dem Innern der Flasche zugewendeten Partie positiv, auf der nach aussen gerichteten negativ geladen sein.

Befindet sich also das abgegrenzte Stück des Dielectricums ganz innerhalb des Mediums, so hebt sich die Ladung eines Elements seiner Oberfläche durch die Ladung des daran stossenden Elementes des Restes des Dielectricums auf. Stösst dagegen dieser Teil an einen Conductor, der als solcher nicht im Stande ist, in sich von selbst den inductiven Zustand zu erhalten, so wird seine Flächenladung nicht mehr neutralisirt, sondern sie bringt die scheinbare Ladung des Conductors hervor, die wir gewöhnlich als die Ladung des Conductors bezeichnen.

Was man also in der älteren Theorie als Ladung eines Conductors ansah, muss nach dieser Theorie der Induction durch das Zwischenmedium als die Ladung der an dem Conductor anstossenden Fläche des Dielectricums bezeichnet werden.

Darnach besteht also jede Ladung in dem Zutagetreten der nicht neutralisirten Polarisation eines Teiles des Dielectricums. Die Polarisation existirt zwar im ganzen Medium, aber ihre Wirkungen werden in dem Innern des Dielectricums durch die entgegengesetzte Ladung benachbarter Teile aufgehoben und treten nur da hervor, wo eben eine solche Neutralisirung nicht stattfinden kann, weil ein Conductor die Continuität des Mediums unterbricht.

Diese Theorie giebt auch Rechenschaft von der im Art. 77 aufgestellten Behauptung, der zufolge die gesammte Induction durch eine geschlossene Fläche gleich dem Product der innerhalb der Fläche befindlichen Electricitätsmenge in 4π sein sollte. In der Tat ist die Induction durch eine Fläche nichts weiter als die electrische Verschiebung multiplicirt mit 4π, und die gesammte nach aussen durch die Fläche stattfindende electrische Verschiebung muss nach den obigen Betrachtungen gleich der innerhalb der Fläche befindlichen Ladung sein.

Nach unserer Theorie sollte jedes Partikel des Dielectricums an entgegengesetzten Stellen gleiche und entgegengesetzte Ladungen haben, was wir vielleicht besser so ausdrücken, dass wir sagen, es sollte unter dem Einflusse der electrischen Polarisation an entgegengesetzten Seiten mit gleichen aber entgegengesetzten Electricitätsmengen geladen sein. Sie giebt also auch von der Tatsache, dass es nicht möglich ist, einem Körper eine absolute Ladung einer Electricitätsart mitzuteilen, Rechenschaft.

Digitized by Google

Das Dielectricum besitzt im polarisirten Zustande eine electrische Energie, die für die Volumeinheit von derselben Grösse ist, wie die auf die Flächeneinheit des Dielectricums wirkende electrische Spannung. Beide Grössen sind gleich dem halben Product aus der electrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ in die electrische Kraftintensität $\mathfrak{E}$. Ist also p die Spannung, so haben wir

$$p = \tfrac{1}{2}\mathfrak{D}\mathfrak{E} = \frac{1}{8\pi} K\mathfrak{E}^2 = \frac{2\pi}{K}\mathfrak{D}^2.$$

Wenn das Medium nicht vollständig isolirt, so lässt der Zwangzustand, den wir als electrische Polarisation bezeichnet haben, stetig nach. Das Medium weicht der electromotorischen Kraft, der Zwang erlahmt, und seine potentielle Energie geht in Wärme über. Das Verhältnis, in dem diese Abnahme der Polarisation mit der Zeit vor sich geht, hängt von der Natur des jeweiligen Mediums ab. Beim Glase zum Beispiel nimmt der Zwang so langsam ab, dass Jahre vergehen können, ehe er auf die Hälfte seines Wertes gesunken ist, beim Kupfer dagegen geschieht das schon in kaum einem Billionteil einer Secunde.

Das gilt so lange als das Medium nach seiner Polarisirung sich selbst überlassen ist.

Wird es dagegen von einem electrischen Strome durchflossen, so sucht dieser fortdauernd die Polarisation in demselben Verhältnis wieder zu ergänzen, als sie durch die Leitung abnimmt. Die äussere Kraft, welche den Strom unterhält, muss also bei der Wiederherstellung der Polarisation eine Arbeit leisten; die Polarisation nimmt fortdauernd ab und wird fortdauernd ergänzt, ihr Verlust geht aber in Wärme über. Das Schlussresultat besteht darin, dass die Energie, die dazu diente, den Strom zu unterhalten, die Temperatur der Strombahn soweit erhöht, bis die von ihr in der Zeiteinheit erzeugte Wärmemenge den durch Fortleitung und Strahlung in dieser Zeit entstandenen Verlust gerade deckt.

Digitized by Google

Cap. VI.

Punkte und Linien des Gleichgewichts.

—×—

Bedingungen an Stellen des electrischen Gleichgewichts.

112. Ein Punkt des electrischen Feldes heisst ein *Gleichgewichtspunkt*, wenn in ihm die resultirende electrische Kraft verschwindet.

Besteht eine Linie aus lauter solchen Gleichgewichtspunkten, so heisst sie eine *Gleichgewichtslinie*.

Bezeichnet V das Potential in einem Punkte (x, y, z), so ist die Bedingung dafür, dass dieser Punkt ein Gleichgewichtspunkt ist,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

Das Potential ist also daselbst in Bezug auf die Coordinatenvariationen ein Maximum oder ein Minimum oder stationär. Nun kann das Potential in einem Punkte ein Maximum oder Minimum nur dann sein, wenn dieser Punkt entweder selbst positiv bezüglich negativ geladen ist, oder wenn er sich innerhalb einer positiv bezüglich negativ geladenen Fläche befindet. Kommt also ein Gleichgewichtspunkt in einem nicht electrisirten Teile des Feldes vor, so wird das Potential daselbst nur stationär sein, nicht aber einen grössten oder einen kleinsten Wert haben.

In der Tat, die erste Bedingung für ein Maximum bezüglich Minimum besteht darin, dass die zweiten Derivirten

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2},$$

wenn sie endlich sind, alle einen negativen bezüglich positiven Wert haben. Nach der Laplaceschen Gleichung verschwindet aber die Summe jener drei Abgeleiteten in jedem nicht selbst geladenen Punkt, sie können also nicht alle zugleich negativ oder positiv sein.

Ich will aber statt den Fall, dass die Kraftcomponenten in einem Punkte verschwinden, analytisch weiter zu verfolgen, eine allgemeine Unter-

Digitized by Google

suchung über diese Verhältnisse mit Hilfe der äquipotentiellen Flächen anstellen.

Wenn in irgend einem Punkte P das Potential V ein wirkliches Maximum besitzt, so kann das nur so sein, dass V in allen P umgebenden Punkten einen kleinern Wert als in P selbst hat. P wird also von einer Reihe von geschlossenen Niveauflächen umgeben, deren jede alle vorhergehenden völlig umhüllt. In allen Punkten einer jeden dieser äquipotentiellen Flächen wirkt die electrische Kraft von innen nach aussen, und da nach den Ausführungen des Art. 76 das Flächenintegral der electromotorischen Kraftintensität über die betreffende Niveaufläche multiplicirt mit 4π die innerhalb dieser Fläche befindliche Ladung darstellt, dieses Flächenintegral aber, weil die Kraft nach aussen gerichtet ist, einen positiven Wert hat, so muss die Ladung innerhalb der äquipotentiellen Fläche positiv sein. Man kann aber die Fläche dem Punkte P beliebig nahe annehmen, und es folgt, dass V nur dann in P ein Maximum sein kann, wenn dieser Punkt positiv geladen ist.

Ganz ebenso lässt sich zeigen, dass V in P nur dann ein Minimum besitzt, wenn P negativ electrisirt ist.

Befindet sich P in einer nicht electrisirten Region des electrischen Feldes, so kann das Potential auf einer kleinen um P gelegten Kugelfläche nicht in allen ihren Punkten grösser oder kleiner als in P sein. Es ist vielmehr in einigen Teilen der Kugel grösser, in andern kleiner und in den Linien, welche diese Teile gegen einander begrenzen, gleich dem in P. Längs den Linien, die P mit Punkten der Kugel verbinden, in denen das Potential kleiner ist als in P, wirkt die electrische Kraft von P fort, längst denen dagegen, die von P zu Punkten der Kugel führen, die ein grösseres Potential als P haben, wirkt die Kraft nach P hin. Für Verrückungen nach gewissen Richtungen ist also P ein Punkt des stabilen Gleichgewichts, für solche nach andern Richtungen ein Punkt des labilen Gleichgewichts.

Im freien Raume können Gleichgewichtslinien nur unter ganz besondern Verhältnissen existiren, auf Conductoren treten sie stets da auf, wo beide Electricitätsarten neben einander vorhanden sind.

Ein Conductor kann aber nur dann auf seiner Oberfläche entgegengesetzte Ladungen beherbergen, wenn im electrischen Felde Gebiete vorhanden sind, in denen das Potential einen höhern Wert, und solche, in denen es einen niederern Wert als auf dem Conductor hat.

Wir verfolgen diese Verhältnisse etwas näher für den Fall, dass zwei Conductoren im Felde existiren, die beide positiv und zu demselben Potential geladen sind. Man übersieht leicht, dass dann zwischen beiden Körpern ein Gleichgewichtspunkt sich befinden muss. Verringert man allmählich das Potential des ersten Conductors, so rückt der Gleichgewichtspunkt diesem näher, bis er, wenn die Verringerung einen gewissen Grad erreicht hat, auf seine Oberfläche fällt. Die Niveaufläche des zweiten Conductors, der ein Potential von der Grösse, welche das Potential des ersten Conductors nach

Digitized by Google

jener Verkleinerung erreicht hat, zugehört, berührt dann die Oberfläche des ersten Conductors. Fahren wir mit der Verkleinerung des Potentials des ersten Conductors fort, so schneidet die bezeichnete Niveaufläche seine Oberfläche rechtwinklig und giebt dadurch Anlass zur Entstehung einer Gleichgewichtslinie. Je weiter die Verringerung vor sich geht, desto weiter rückt die Gleichgewichtslinie auf dem Conductor fort, bis sie bei einer bestimmten Grösse des Potentials wieder zu einem Punkt zusammenschrumpft, der auf der von dem zweiten Conductor abgewendeten Seite des ersten Conductors liegt. Bei noch weiterer Verkleinerung des Potentials rückt der Gleichgewichtspunkt vom Conductor fort und befindet sich in der Unendlichkeit, wenn beide Körper gleiche und entgegengesetzte Ladungen besitzen.

Anzahl der Gleichgewichtspunkte und Gleichgewichtslinien.

113. Zur Bestimmung der Anzahl der Gleichgewichtspunkte und Gleichgewichtslinien teilen wir das electrische Feld in Regionen ein, die von einander durch Niveauflächen getrennt sind, in denen das Potential einen vorgeschriebenen Wert C hat. Die Teile des Feldes, für welche $V < C$ ist, bezeichnen wir als negativ, und die, für welche $V > C$ ist als positiv. Weiter sei V_0 der kleinste, V_1 der grösste Wert, den das Potential im electrischen Felde überhaupt annimmt. Machen wir dann $C = V_0$, so umfasst die negative Region nur den Punkt oder Conductor, wo das Potential ein Minimum erreicht, also eine Region, die negativ geladen sein muss. Das positive Gebiet, der Rest des ganzen Feldes, umgiebt dieses negative und ist demnach periphractisch. Lassen wir C von V_0 ab anwachsen, so breitet sich das negative Gebiet aus, und es entstehen immer mehr negative Regionen um negativ geladene Körper. Jede so neu auftretende negative Region vermehrt zunächst die periphractische Zahl des positiven Gebietes um eine Einheit.

Je weiter sich aber die negativen Regionen ausdehnen, um so eher werden sich zwei oder mehr von ihnen durchsetzen, und dadurch verliert das positive Gebiet wieder an Periphraxe. Schneiden sich $n + 1$ negative Regionen, so nimmt die periphractische Zahl des positiven Gebietes um n ab und es entsteht ein Gleichgewichtspunkt oder eine Gleichgewichtslinie vom $n$ten Grade.

Wird endlich C gleich V_1, so hat sich das positive Gebiet auf einen Punkt oder einen Conductor, in dem das Potential seinen höchsten Wert besitzt, reducirt, und schliesst weiter keine fremden Regionen in sich ein.

Aus diesen Betrachtungen folgt, dass, wenn wir jeden Gleichgewichtspunkt bezüglich jede Gleichgewichtslinie so oft rechnen, als der Grad desbezüglich derselben Einheiten besitzt, die Anzahl aller so entstehenden Gleichgewichtspunkte oder Gleichgewichtslinien gleich der um eine Einheit verminderten Anzahl der negativ geladenen Körper ist.

Digitized by Google

Verfahren wir genau so, indem wir von $C = V_1$ ausgehen und das positive Gebiet sich ausbreiten lassen, so müssen wir wieder ebenso viele (Punkte und Linien vom $n$ten Grade $n$mal gerechnet) Gleichgewichtspunkte bezüglich Linien erhalten, als die um 1 verminderte Anzahl aller positiv geladenen Körper beträgt.

Hat also ein Feld p positiv und n negativ geladene Körper, so ist die Anzahl der Grade der positiven Gleichgewichtspunkte und Gleichgewichtslinien gleich $p - 1$ und die Anzahl der Grade der negativen gleich $n - 1$, falls jene durch die Durchsetzung der positiven diese durch die der negativen Regionen entstehend gedacht werden. Dabei ist diejenige Fläche, welche in der Unendlichkeit liegt und das ganze electrische System einschliesst, mit der Ladung in Rechnung zu bringen, welche gleich der algebraischen Summe der Einzelladungen des Systems ist.

Ausser diesen in ihrer Zahl bestimmt angebbaren Punkten und Linien des Gleichgewichts sind noch andere vorhanden, von denen wir weiter nichts auszusagen vermögen, als dass sie in ihrer Summe eine gerade Zahl ergeben müssen. Denn während sich eine negative Region ausbreitet, kann es vorkommen, dass ihre Grenzfläche sich selbst einmal oder mehrmal schneidet oder berührt, so dass die Region mehrfach zusammenhängend wird, und jeder Zunahme des Zusammenhanges um eine Einheit entspricht die Entstehung eines Punktes oder einer Linie des Gleichgewichts. Je weiter sich aber die negative Region ausbreitet, um so mehr Grade des Zusammenhanges verliert sie wieder, und wenn sie das ganze Feld umfasst, ist sie nur noch einfach zusammenhängend. Es muss also wieder ebensoviele Punkte und Linien des Gleichgewichts geben, wo das negative Gebiet an Graden des Zusammenhanges verliert, als es Punkte und Linien gab, wo es an Zusammenhang gewann. Hieraus folgt, dass allgemein die Anzahl der so entstehenden Punkte und Linien des Gleichgewichts gerade ist. Weiter können wir auch über sie nichts aussagen, solange wir von der Form der geladenen Körper nichts näheres wissen. Besteht das System nur aus geladenen Punkten oder kugelförmigen Conductoren, so kann die Zahl der in der angegebenen Weise entstehenden Gleichgewichtspunkte nicht grösser als $(n - 1)(n - 2)$ sein, wo n die Summe aller Einzelkörper des Systems bezeichnet.

114. Man kann das Potential V in der Nähe eines Punktes P, in welchem es den Wert V_0 erreicht, durch eine Reihe

$$V = V_0 + H_1 + H_2 + \ldots$$

darstellen, in der H_k eine homogene Function des $k$ten Grades der vom Punkte P ab gerechneten Coordinaten x, y, z bezeichnet. Ist nun P ein Punkt des Gleichgewichts, so haben wir in ihm $\partial V/\partial x = \partial V/\partial y = \partial V/\partial z = 0$, und da H_1 vom ersten Grade ist, so muss H_1 in P überhaupt verschwinden. Es können noch eine Anzahl anderer H gleich Null sein, wenn dann H_n das erste H ist, das einen von Null verschiedenen Wert hat, so

Digitized by Google

kann man, weil die Coordinaten von P aus gerechnet werden, in der Nähe dieses Punktes alle folgenden H gegen H_n vernachlässigen, und es bleibt

$$V = V_0 + H_n.$$

Im Punkte P ist $V = V_0$, also $H_n = 0$. Letztere Gleichung stellt aber einen Kegel vom $n$ten Grade dar, der mit der durch P gelegten äquipotentiellen Fläche die innigste Berührung eingeht.

Die den Punkt P enthaltende Niveaufläche hat also in P einen singulären Punkt, in welchem sie von einer Kegelfläche von mindestens dem zweiten Grade berührt wird.

Den Durchschnitt dieser Kegelfläche mit einer um P gelegten Kugel bezeichnen wir als eine *Knotenlinie*.

Liegt P nicht auf einer Gleichgewichtslinie, so besteht die Knotenlinie aus n oder aus einer geringern Anzahl getrennter geschlossener Curven.

Befindet sich dagegen P auf einer Gleichgewichtslinie, so schneidet sich die Knotenlinie in einem oder in mehreren Punkten und dem entsprechend durchsetzt sich die zugehörige Niveaufläche in der Gleichgewichtslinie, der P angehört.

So oft sich die Knotenlinie an nicht gerade entgegenstehenden Stellen der Kugel schneidet, so oft muss das auch bei der äquipotentiellen Fläche der Fall sein, und da jede Durchsetzung der äquipotentiellen Fläche in einer Gleichgewichtslinie geschieht, so gehen durch P dann drei oder mehr Gleichgewichtslinien.

Durchschnitt einer Niveaufläche durch sich selbst.

115. Zwei Stücke einer und derselben äquipotentiellen Fläche können sich, wenn sie es überhaupt tun, nur rechtwinklig schneiden.

Legt man nämlich die zAxe in Richtung der Tangente der Durchschnittslinie der beiden Stücke und lässt die xAxe eines derselben berühren, so ist $\partial^2 V/\partial x^2 = \partial^2 V/\partial z^2 = 0$. Demnach ist nach der Laplaceschen Gleichung auch $\partial^2 V/\partial y^2 = 0$, das heisst die yAxe ist dann Tangente des zweiten Stückes an der Durchschnittstelle, oder die Stücke der Niveaufläche durchsetzen sich rechtwinklig.

Damit sich aber an derselben Stelle nur zwei Schalen derselben äquipotentiellen Fläche schneiden, muss in der Entwicklung des Potentials nach den H das H_2 von Null verschieden sein.

Ist das nicht der Fall, so können sich mehrere Schalen in derselben Linie schneiden, und wenn das n Schalen tun, so geschieht das unter einem Winkel π/n.

Dieser Satz rührt von Rankine*) her und lässt sich folgendermassen beweisen.

*) „*Summary of the Properties of certain Stream Lines*". Phil. Mag. 1864 Oct.; Thomson und Tait, *Theoretische Physik* § 780; Rankine und Stokes in den Proc. R. S. 1867, pag. 468; W. R. Smith Proc. R. S. Edin. 1869—70, pag. 79.

Digitized by Google

Man legt die z Axe wieder in Richtung der Tangente der Schnittlinie der Schalen der Niveaufläche und den Coordinatenursprung in die Schnittlinie. Da dann $\partial^2 V/\partial z^2 = 0$ wird, so geht die Laplacesche Gleichung über in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Macht man $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$, so resultirt

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \vartheta^2} = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung nach steigenden Potenzen von r hat die Form

$$V = V_0 + A_1 r\cos(\vartheta + \alpha_1) + A_2 r^2\cos(2\vartheta + \alpha_2) + A_3 r^3\cos(3\vartheta + \alpha_3) + \ldots.$$

Die Niveaufläche schneidet sich selbst aber in einer Gleichgewichtslinie, demnach ist $A_1 = 0$ zu setzen, und das Potential V geht, wenn das erste nicht verschwindende Glied von der $n$ten Potenz nach r ist, über in

$$V = V_0 + A_n r^n\cos(n\vartheta + \alpha_n) + A_{n+1} r^{n+1}\cos(\overline{n+1}\vartheta + \alpha_{n+1}) + \ldots$$

Für sehr kleine r wird

$$V - V_0 = A_n r^n\cos(n\vartheta + \alpha_n),$$

und daraus folgt schon, dass n Schalen einer Niveaufläche $V = V_0$ sich unter gleichen Winkeln π/n schneiden.

Earnshaw's Theorem.

116. Der folgende auf das Gleichgewicht von Körpern im electrischen Felde sich beziehende Satz rührt von Earnshaw her.

Ein geladener Körper kann sich an keiner Stelle des electrischen Feldes in stabilem Gleichgewicht befinden.

Ich beweise die Richtigkeit dieses Satzes zunächst für electrisirte Isolatoren. Demnach sollen also der bewegliche electrisirte Körper A und das System B der umgebenden geladenen Körper so beschaffen sein, dass sich die Electricität auf ihnen in keiner Weise verschieben kann.

Ist V das Potential des Systems B auf einem Punkt (x, y, z) des beweglichen Körpers A und e die Electricitätsmenge eines den Punkt (x, y, z) umgebenden Flächenelements, so haben wir für die potentielle Energie von A in Bezug auf B

$$M = \Sigma Ve,$$

wo die Summation sich auf alle geladenen Teile von A bezieht.

Digitized by Google

Ausser dem im Raume festen Axensystem der x, y, z nehme ich noch ein zweites, diesem paralleles der a, b, c an, dessen Ursprung sich mit dem Körper A bewegt und in Bezug auf das feste System der x, y, z die Coordinaten ξ, η, ζ hat.

Beschränkt man die Bewegung des Körpers A so, dass er nur sich selbst parallel sich verrücken kann, so ändert das neue Coordinatensystem der a, b, c nur die Lage seines Ursprungs, nicht die Richtung seiner Axen im Raume. Die absoluten Coordinaten eines Punktes a, b, c sind in diesem Falle

$$x = \xi + a, \quad y = \eta + b, \quad z = \zeta + c,$$

und das Potential V der Körper B auf einen Punkt a, b, c in A ist eine Function der a, b, c und der ξ, η, ζ. Das Gesammtpotential M auf A besteht demnach aus einer Reihe von Gliedern, deren Summe ebenfalls eine Function der a, b, c, die bei der Bewegung von A für jeden Punkt constant bleiben, und der ξ, η, ζ, deren Aenderung allein eine Bewegung des Körpers A anzeigt, ist. Es muss ebenso wie jedes seiner constituirenden Glieder der Laplaceschen Gleichung genügen, demnach haben wir

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Bezeichnet dM die Aenderung, welche dieses Potential, während einer Verschiebung des Körpers A um eine Strecke dr, deren Componenten

$$d\xi = l dr, \quad d\eta = m dr, \quad d\zeta = n dr$$

sind, erleidet, so erhält man durch dM/dr die Kraft, welche bei dieser Aenderung von r um dr wachgerufen wird. Dieselbe strebt r wieder zu verkleinern, wenn dM positiv ist, sie sucht r noch weiter zu vergrössern, wenn dM einen negativen Wert hat. Nimmt also das Potential bei der Verrückung von A zu, muss also dabei eine Arbeit geleistet werden, so befindet sich A in einem stabilen Gleichgewicht, verkleinert es sich dagegen, so befindet sich A in einem labilen Gleichgewicht.

Legt man aber um den Ursprung als Mittelpunkt mit dem Radius r eine Kugel S, die so klein ist, dass solange der feste Punkt (ξ, η, ζ) des beweglichen Körpers sich in ihr befindet, dieser in keinem Teile mit irgend einer Partie des Systems B zusammenfällt, so ist, innerhalb der Kugel überall $\nabla^2 M = 0$, also auch das Flächenintegral

$$\iint \frac{dM}{dr} dS$$

über die ganze Kugel gleich Null, und das kann nur sein, wenn auf der Kugel neben positiven Werten des dM/dr auch negative vertreten sind. Es muss also auch Richtungen geben, nach denen eine Verrückung des Körpers A parallel mit sich selbst eine Verkleinerung des Potentials des Systems B auf ihn hervorbringt, in denen der Körper also immer weiter von seiner Gleichgewichtslage sich entfernt. Geschieht das aber schon bei einer so

Digitized by Google

beschränkten Verrückungsart, so muss es *a fortiori* bei ganz frei und beliebig vor sich gehenden Verschiebungen eintreten.

Wenn der Körper A ein Leiter ist, die Electricität auf ihm also sich frei bewegen kann, so mag man diese Electricität als einen Teil des Systems A betrachten, A mit seiner Electricität hat dann mehr Freiheitsgrade als früher, wo seine Electricität sich nicht bewegen können sollte. Man mag dann so argumentiren, dass wenn ein System bei weniger Freiheitsgraden sich schon im labilen Gleichgewicht befand, seine Lage *a fortiori* keine stabile sein kann, wenn es mehr Freiheitsgrade besitzt.

Strenger ist aber der folgende Beweis.

Wir denken uns zunächst den Körper A allein um dr verrückt, während seine Electricität auf ihm fixirt ist, die Potentialänderung ist dann $(dM/dr)\,dr$. Nun stellen wir uns vor, dass seine Electricität in die ihr für seine neue Position zukommende Gleichgewichtslage sich begiebt. Bei dieser zweiten Bewegung muss das Potential abnehmen um eine Grösse, die wir mit $C\,dr$ bezeichnen.

Die gesammte Aenderung des Potentials ist demnach für den Fall, dass A ein Leiter ist,

$$\left(\frac{dM}{dr} - C\right) dr$$

und die daraus entspringende Kraft

$$\frac{dM}{dr} - C,$$

wo C stets positiv ist.

Den grössten Wert hat diese Kraft also, wenn $C = 0$ ist. Wir haben aber gesehen, dass wenn die Electricität auf A fixirt ist, dM/dr auch für gewisse Richtungen negativ sein muss. Durch die Beweglichkeit der Electricität kann also die Labilität des Körpers A nur vermehrt werden.

Digitized by Google

Cap. VII.

Aequipotentielle Flächen und Kraftlinien.

Beschreibung der Niveauflächen und Kraftlinien in einfachen Fällen.

117. Die Bestimmung der Verteilung der Electricität auf Conductorflächen hängt, wie wir gesehen haben, von der Auflösung der Laplaceschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

für das Potential V unter Berücksichtigung der Bedingungen ab, dass dasselbe als Function von x, y, z überall im electrischen Felde endlich und stetig ist, auf den vorhandenen Conductoren vorgeschriebene constante Werte annimmt und in der Unendlichkeit verschwindet.

Da es aber mit den jetzigen mathematischen Hilfsmitteln im allgemeinen nicht möglich ist, jene Gleichung für beliebig gegebene Formen der Conductoren aufzulösen, so schlägt man mit Vorteil den entgegengesetzten Weg ein, indem man — was nicht schwer ist — eine Reihe von Functionen, welche der Laplaceschen Gleichung genügen, niederschreibt und aus ihnen dann die Conductorformen ableitet, für welche sie gelten.

Es scheint also, dass das umgekehrte Problem der Bestimmung der Conductorform zu einem vorgeschriebenen Potential sich leichter und bequemer lösen lässt, als das directe der Berechnung des Potentials für eine gegebene Conductorform.

In der Tat ist auch fast jedes Problem der Electrostatik, dessen Lösung wir besitzen, auf jenem umgekehrten Wege bewältigt worden. Deshalb ist es für den Electriker von grösster Wichtigkeit, sich mit allen so bereits gewonnenen Ergebnissen vertraut zu machen, da die einzige Möglichkeit, ein neues Problem zu lösen, darauf beruht, dass man es auf Fälle, für die die angeführte umgekehrte Methode die Lösungen schon kennen gelehrt hat, zurückzuführen vermag. Eine solche historische Kenntnis gewonnener Resultate ist uns in zweifacher Weise von Nutzen. Einmal können wir,

Digitized by Google

wenn für electrische, in der Messung grosse Genauigkeit erfordernde Untersuchungen, Instrumente gebaut werden sollen, für die zu electrisirenden Körper immer die Formen uns heraussuchen, für welche exacte Lösungen der Laplaceschen Gleichung schon vorliegen. Dann aber gewinnen wir auch für den schwierigern Fall, dass uns die Form der zu electrisirenden Körper schon vorgeschrieben ist, aus unserer bezeichneten Kenntnis wenigstens die Möglichkeit, angenäherte Lösungen herzustellen. Zunächst suchen wir uns nämlich aus den gewonnenen Resultaten eine äquipotentielle Fläche aus, die einigermassen der gegebenen Conductorform entspricht, und dann ändern wir versuchsweise das schon gelöste Problem so lange ab, bis wir zu einer äquipotentiellen Fläche gelangen, die in der Form dem gegebenen Conductor noch mehr gleicht.

Diese Methode ist vom mathematischen Standpunkte aus zwar sehr unvollkommen, aber einstweilen hat die Wissenschaft noch keine exactere entdeckt, und da wo man sich die Bedingungen nicht selbst stellen kann, muss man sich eben mit möglichster Annäherung an die gegebenen Verhältnisse begnügen.

Wir haben also unser Augenmerk darauf zu richten, so viele Formen von äquipotentiellen Flächen und Inductionslinien zu ergründen, als nur irgend möglich ist. Für gewisse Klassen von Problemen, so namentlich für solche, die sich auf kugelförmige Conductoren beziehen, hat man mathematische Methoden kennen gelernt, die ihre Lösung ermöglichen. In andern Fällen dagegen kann man sich noch nicht anders helfen, als durch die weniger wissenschaftliche Methode, auf Papier versuchsweise nach bekannten Formeln Figuren zu zeichnen und diejenigen unter ihnen auszuwählen, welche der gegebenen Conductorform am meisten entsprechen.

Ich glaube übrigens, dass diese letztere Methode selbst in den Fällen noch von grossem Nutzen ist, wo man die strenge Lösung besitzt, denn ich finde, dass eine Kenntnis äquipotentieller Flächen aus directer Anschauung oft zur Wahl einer richtigen mathematischen Methode bei der Lösung eines Problems führt.

Deshalb habe ich auch eine Reihe von Zeichnungen für äquipotentielle Flächen und zugehörige Kraftlinien ausgeführt, damit der Leser ihre Formen seinem Gedächtnisse genügend einprägen kann. Ich lasse zunächst eine Beschreibung der einzelnen Zeichnungen folgen, in Art. 123 werde ich auch angeben, wie ich bei ihrer Herstellung verfahren bin.

118. In der Tafel II. am Ende dieses Bandes haben wir die Schnitte der äquipotentiellen Flächen, welche zwei gleichnamig im Verhältnis von 20 zu 5 geladene Punkte*) umgeben, mit einer durch diese Punkte gelegten Ebene.

*) Die Anzahl der Electricitätseinheiten, welche jeder Punkt enthält, ist in allen Figuren entsprechend der Faradayschen Ansicht von der Bedeutung der Kraftlinien (Art. 82) durch die Anzahl der Kraftlinien, die von ihm einseitig ausgehen, charakterisirt. Anm. d. Uebers.

Digitized by Google

Zunächst ist jeder der beiden Punkte von einer Reihe von äquipotentiellen Flächen eingeschlossen, die sich in der Form um so mehr einer Kugel anschliessen, je näher sie dem betreffenden Punkte sind, ohne doch je ganz kugelförmig zu werden. Versehen wir also zwei entsprechende, um die beiden Punkte gelegte Niveauflächen, die wir uns zu Conductoren erstarrt denken, mit bezüglichen Ladungen, die zu einander im Verhältnis von 4 zu 1 stehen, so giebt uns die Tafel II. die Niveauflächen dieser Conductoren, wenn wir die in ihrem Innern gezeichneten Flächen uns fortgelöscht denken. Die Wirkung zwischen zwei solchen Conductoren ist also ganz dieselbe, wie die zwischen den beiden bezeichneten Punkten, die dem frühern zufolge von dem Halbirungspunkt der Verbindungslinie zwischen beiden Conductoren etwas weiter entfernt sind, als die Mitten der Axen der Conductoren.

Eine der äquipotentiellen Flächen — ihr Schnitt ist in der Figur durch die aus Strichen und Punkten gezeichnete Curve charakterisirt — besteht aus zwei Schalen, die sich in dem vielfachen Punkte P schneiden. Dieser Durchsetzungspunkt P ist ein Gleichgewichtspunkt. Auf einem Conductor von der Form der bezeichneten Niveaufläche hat die Electricität in diesem Punkte die Flächendichte Null.

Die dieser Fläche folgenden Niveauflächen umgeben beide geladenen Punkte und sind oval geformt. Denken wir uns eine dieser Flächen wieder zum Conductor erstarrt und mit 25 Einheiten Electricität geladen, so zeigt die Figur, dass die grösste Flächendichte auf dem spitzen Ende herrscht, eine geringere auf dem stumpfen und die geringste auf einem Kreise sich befindet, der dem spitzen Ende näher liegt als dem stumpfen.

Die Kraftlinien bestehen aus zwei verschiedenen Systemen von Curven, die von einander durch eine Fläche sechsten Grades — ihr Schnitt mit der Ebene der Figur ist durch eine aus Punkten bestehende Linie markirt — getrennt sind. Die Fläche geht durch den Gleichgewichtspunkt P und sieht einer Schale eines zweischaligen Hyperboloids nicht unähnlich.

Uebrigens kann dieselbe Figur auch zur Versinnbildlichung des Verlaufs der Niveauflächen und Kraftlinien zweier gravitirender Kugeln, deren Massen zu einander im Verhältnis von 4 zu 1 stehen, benutzt werden.

119. Die dritte Tafel gilt für den Fall, dass zwei Punkte wieder im Verhältnis von 20 zu 5, diesmal aber entgegengesetzt, der erste positiv, der andere negativ, geladen sind.

Man ersieht aus dem Diagramm, dass zwei runde entgegengesetzt geladene Conductoren sich gegenseitig in derselben Weise anziehen, wie zwei entsprechend electrisirte Punkte, die einander näher gerückt sind als die Mitten der beiden Conductoren.

Die wichtigste Niveaufläche, auf welche ich noch in der Theorie der electrischen Bilder zu sprechen kommen werde, ist die mit dem Potential 0. Sie ist kugelförmig und in der Figur durch einen aus Strichen gezeichneten Schnitt Q markirt.

Digitized by Google

Auch hier giebt es wie im vorigen Fall eine Niveaufläche — ihr Schnitt ist in der Figur aus Strichen und Punkten zusammengesetzt —, welche aus zwei Schalen besteht, die sich in dem Gleichgewichtspunkt P durchsetzen, und deren eine den mit fünf Einheiten geladenen Punkt umgiebt, während die andere beide Punkte umfasst.

Hat ein Conductor gerade die Form der äussern Schale, die einem Apfel, dessen Stielgrund sich in P befindet, nicht unähnlich sieht, so kann man leicht die Verteilung der Electricität auf ihm aus dem Diagramm studiren. Ich hebe hervor, dass in dem Stielgrund dieses apfelförmigen Conductors die Flächendichte der Electricität gleich Null ist.

Die äussere Schale der bezeichneten äquipotentiellen Fläche wird von einer Reihe anderer Flächen umgeben, welche alle an der P entsprechenden Stelle eine Vertiefung zeigen, die sich um so mehr verflacht, je weiter die Fläche von der genannten Schale entfernt ist, bis sie in einer durch den Punkt M der Figur gehenden Fläche verschwindet.

Die Kraftlinien setzen sich wieder aus zwei Systemen zusammen, die durch eine durch den Gleichgewichtspunkt P gehende Fläche — in der Figur durch eine punktirte Linie charakterisirt — getrennt werden.

Die resultirende Kraft in Richtung der Verbindungslinie der beiden electrischen Punkte A und B nimmt, je weiter man sich von B und gleichzeitig auch von A entfernt, immer mehr ab, bis sie in dem Doppelpunkt P ganz verschwindet. Von P ab ändert sie ihr Zeichen, erreicht in M (wo die Niveauflächen ihre Vertiefung verlieren) ein Maximum und nimmt dann wieder stetig ab.

Das eben bezeichnete Maximum ist aber kein absolutes Maximum, sondern gilt als solches nur für die in Richtung der Verbindungslinie von A und B wirkende Kraft, denn wenn man durch M eine Fläche senkrecht zu AB legt, so ist die resultirende Kraft (weil dort gerade die Vertiefung der Niveauflächen verschwindet) in allen in der Nähe von M gelegenen Punkten dieser Fläche grösser als in M selbst.

120. Die folgende Tafel IV. charakterisirt die Störung, welche ein mit zehn Einheiten geladener Punkt A in den Niveauflächen und Kraftlinien eines nach Grösse und Richtung der Kraft gleichförmigen electrischen Feldes (wie es etwa ein sehr weit entfernter electrischer Körper näherungsweise hervorbringt) verursacht. Die modificirten äquipotentiellen Flächen haben alle Asymptotenebenen. Eine von ihnen — in der Figur durch eine aus Strichen und Punkten zusammengesetzte Linie markirt — hat einen vielfachen Punkt P und eine Schale, die A umgiebt. Die unterhalb dieser liegenden Flächen sind einschalig und mit Vertiefungen versehen, durch welche eine gerade Kraftlinie hindurchgeht. Die oberhalb befindlichen bestehen aus zwei durch die bezeichnete Niveaufläche getrennten Stücken, deren eines den Punkt A ganz umgiebt, während das andere sich überall in die Unendlichkeit erstreckt und nach A hin in Richtung der geraden Kraftlinie leicht deprimirt ist.

Digitized by Google

Setzen wir an Stelle zweier zu beiden Seiten von A liegender Niveauflächen zwei entsprechend geformte Conductoren, so bestimmen die dazwischen befindlichen Flächen und Linien die Verteilung der Kraftwirkung im electrischen Felde. Befindet sich der untere Conductor in genügender Entfernung von A, so geht seine Begrenzungsfläche in eine Ebene über. Wir erhalten dann durch das Diagramm die Verteilung der Electricität auf zwei Conductoren, die beide nahezu parallel und eben sind, und von denen der obere einen mehr oder minder nach dem andern Conductor zu vorragenden Buckel hat, während der untere eine entsprechende Einbuchtung zeigt.

121. Tafel V. enthält eine Zeichnung der äquipotentiellen Flächen und Kraftlinien für drei electrisirte Punkte, von denen A 15 Einheiten positiver, B 12 Einheiten negativer und C 20 Einheiten positiver Electricität in sich concentrirt. Die drei Punkte sind in einer Graden in den Entfernungen

$$AB = 9, \quad BC = 16, \quad AC = 25$$

angeordnet.

Die Fläche, für welche das Potential gleich Null ist, besteht aus zwei Kugeln mit den Mittelpunkten in A und C und mit den Radien 15 und 20. Die beiden Kugeln schneiden sich in einem Kreise, der die Ebene der Zeichnung senkrecht in den Punkten D und D' trifft, dessen Mittelpunkt in den negativ geladenen Punkt B fällt und dessen Radius die Länge 12 hat.

Die resultirende Kraft verschwindet in jedem Punkte dieses Kreises, er bildet das erste Beispiel einer Gleichgewichtslinie.

Wird die Kugel, deren Centrum in A liegt, zum Conductor, dessen aus drei Einheiten positiver Electricität bestehende Ladung unter dem Einflusse der in C concentrirten 20 Einheiten positiver Electricität sich befindet, so giebt unser Diagramm alle auftretenden Niveauflächen und Kraftlinien, wenn die Curven innerhalb der bezeichneten Kugel gelöscht werden. Die Ladung der Kugel ist dann unter dem Einfluss von C innerhalb des kleinen Kreises DD' negativ, ausserhalb desselben positiv. Auf dem Kreise selbst befindet sich keine freie Electricität.

Ebenso können wir dasselbe Diagramm benutzen, wenn die Kugel mit dem Centrum in C durch acht Einheiten positiver Electricität geladen und unter den Einfluss der 15 Einheiten positiver Electricität in A gestellt wird.

Endlich bleibt das Diagramm noch ungeändert, wenn der Conductor aus den zwei grössern Kugelfragmenten besteht, die im Kreise DD' an einander stossen und zusammen eine Ladung von 23 Einheiten positiver Electricität haben. Doch komme ich auf diese Tafel noch einmal zurück, wenn ich Illustrationen zu der Thomsonschen Theorie von den electrischen Bildern vorzuführen haben werde (Art. 168).

122. Man bedient sich dieser Diagramme mit Vorteil, um für die Faradayschen Bezeichnungen „Kraftlinie“, „Wirkungen auf einen electrisirten Körper“ u. a. m. eine Versinnbildlichung zu gewinnen.

Digitized by Google

So wird nach Faraday die Electricitätsmenge eines Körpers durch die Anzahl der Kraftlinien, oder richtiger gesprochen, der Inductionslinien gemessen, welche von ihm ausgehen. Diese Linien müssen aber alle irgendwo ein Ende finden, sei es auf andern in der Nachbarschaft vorhandenen Körpern oder auf den Wänden und der Decke des Zimmers, in dem sich das electrische System befindet, oder auf der Erde oder endlich auf den Himmelskörpern. Wo eine Kraftlinie endet, da muss sich eine Electricitätsmenge befinden, die an Quantität gleich, im Zeichen aber entgegengesetzt ist der Ladung an der Stelle des Conductors, von der die Kraftlinie ausgegangen ist. Dasselbe lehren aber auch die vorgeführten Diagramme, die nach mathematischen Rechnungen ausgeführt sind, wie sie die alte Theorie der Electricitätswirkungen vorschreibt. In den Resultaten besteht kein Widerspruch zwischen der Faradayschen Annahme einer Vermittelung der electrischen Wirkungen durch Kraflinien und der alten Theorie einer Fernewirkung. Die Conception der Kraftlinien bringt aber noch den Vorteil mit sich, dass durch sie die mathematischen Resultate unmittelbar in eine physikalische Beschreibung der auftretenden Erscheinungen übertragen werden können. Ausserdem scheint es, als ob man mit Hilfe der Kraftlinien mit der Zeit tiefer in das Verständnis der electrischen Erscheinungen wird eindringen können, als es die alte Theorie je ermöglichen kann.

Anleitung zum Zeichnen von Niveauflächen und Kraftlinien.

123. Ich lasse nun eine Beschreibung der Methode folgen, nach der solche Diagramme angefertigt werden können, und von mir angefertigt worden sind.

Wir betrachten zunächst als einfachsten Fall einen kleinen mit der Electricitätsmenge e geladenen Körper. Das Potential V dieses kleinen Körpers ist in der Entfernung r von demselben gleich e/r. Legen wir mit dem Radius $r = e/V$ eine Kugel um den kleinen Körper, so haben alle Punkte ihrer Oberfläche dasselbe Potential V. Machen wir demnach der Reihe nach $V = 1, 2, 3, \ldots$, so erhalten wir ein System von concentrischen Kugelflächen, die die Niveauflächen darstellen, deren Potentiale der Reihe nach die natürlichen Zahlen angeben. Eine durch ihren gemeinschaftlichen Mittelpunkt gelegte Ebene schneidet alle Niveauflächen in Kreisen, die wir der Reihe nach durch die die betreffenden Potentiale repräsentirenden Zahlen kennzeichnen. Auf der rechten Hälfte der auf Tafel I. gezeichneten Figur sieht man die Hälften dieser Kreise durch punktirte Linien angedeutet.

Befindet sich im Felde noch ein zweiter Kraftmittelpunkt, so können wir für ihn ohne Berücksichtigung des ersten Kraftcentrums ganz ebenso die äquipotentiellen Flächen zeichnen.

Digitized by Google

Wir finden dann die äquipotentiellen Flächen bei gleichzeitiger Existenz beider Kraftcentren durch die Ueberlegung, dass in irgend einem Punkte das Potential V beider Kraftcentren gleich $V_1 + V_2$ ist, wenn V_1 das vom ersten, V_2 das vom zweiten Kraftcentrum für sich allein an der betreffenden Stelle hervorgebrachte Potential angiebt. Man kennt aber V_1 und V_2 an den Durchschnittsstellen der beiden den einzelnen Centren angehörigen Systeme äquipotentieller Flächen, also ist dort auch der Wert von V gegeben. Wir suchen nun von allen Schnittstellen diejenigen heraus, die für $V = V_1 + V_2$ einen und denselben Wert ergeben, und legen durch diese eine Fläche, die an den Schnittstellen sich an die entsprechende äquipotentielle Fläche beider Centren anschmiegen wird. Je näher aneinander die Niveauflächen jedes der Systeme gezogen sind, um so mehr solcher zusammengehöriger Schnittstellen haben wir, und um so genauer schliesst sich die gezeichnete Fläche einer wirklichen Niveaufläche beider Centren an. Wir können so jeden beliebigen Grad von Präcision in der Zeichnung der Niveauflächen bei gleichzeitiger Existenz beider Centren erreichen.

In dieser Weise sind zum Beispiel die äquipotentiellen Flächen zweier gleich und entgegengesetzt geladener Punkte gewonnen, und auf der rechten Seite der auf Tafel I. befindlichen Zeichnung durch ihre Schnittlinien mit einer durch die electrischen Punkte gelegten Ebene fixirt.

Selbstverständlich kann man dieselbe Methode in jedem Falle anwenden, wenn das Potential aus einer Summe von Potentialen gebildet ist, für die man schon die Niveauflächen gezeichnet hat.

Was ferner die Kraftlinien anbetrifft, so sind sie bei einem einzelnen Kraftcentrum radial von diesem ausgehende gerade Linien. Sollen sie aber nicht blos die Richtung der Kraft kennzeichnen, sondern auch ein Maass für die electrische Kraftintensität liefern, so muss man sie vom Kraftcentrum aus so ziehen, dass sie auf den äquipotentiellen Flächen Stücke ausschneiden, für welche das Flächenintegral der Induction (Art. 75, 76) vorgeschriebene Werte hat.

Am einfachsten gelangt man dazu, wenn man die in der Ebene des Kraftcentrums angefertigte Zeichnung als den Schnitt dieser Ebene mit einer Figur im Raume betrachtet, die durch Rotation der Zeichnung um eine durch das Kraftcentrum gehende Axe hervorgebracht wird. Eine Kraftlinie, die mit der Axe einen Winkel ϑ bildet, beschreibt dann einen Kegel, der von den äquipotentiellen Flächen bestimmte Stücke ausschneidet.

Das Flächenintegral der Induction für ein solches die positive Axe schneidendes Stück ist nach Art. 76 gleich

$$2\pi e(1 - \cos\vartheta).$$

Demnach ist die Induction Φ durch den Teil des betrachteten Stückes, der durch zwei Ebenen abgeschnitten wird, welche durch die Axe gehen

Digitized by Google

und einen Winkel, dessen Bogen gleich dem halben Radius ist, einschliessen, gleich dem $1/4\pi$ ten Teil der Grösse $2\pi e(1 - \cos\vartheta)$, also

$$2\Phi = e(1 - \cos\vartheta),$$

und hieraus folgt

$$\vartheta = \arccos\left(1 - 2\frac{\Phi}{e}\right).$$

Giebt man dem Φ nach einander die Werte 1, 2, 3 ... e, so erhält man eine Reihe entsprechender Werte für ϑ, und wenn e eine ganze Zahl ist, wird die Anzahl der Werte für ϑ, also auch die Anzahl der Kraftlinien, die Axe als solche mitgerechnet, gleich e.

Diese Methode lehrt die Kraftlinien eines Centrums so zu ziehen, dass ihre Anzahl in einer durch das Centrum gehenden Halbebene gleich der Ladung dieses Centrums ist, und dass die Induction durch ein Kugelstück, welches von zwei im Bogenabstand $1/4\pi$ gezogenen Meridianen und einem bestimmten Breitenkreise begrenzt wird, durch die Anzahl aller dieses Flächenstück schneidenden Kraftlinien gemessen wird. Auf der linken Hälfte der Figur auf Tafel I. bezeichnen die gestrichelten Linien die Kraftlinien jedes der beiden electrischen Punkte. Entsprechend der Ladung + 10 und — 10 derselben zählt man auch für jeden Punkt 10 solcher Kraftlinien.

Sollen nun die Kraftlinien gezeichnet werden, die der gleichzeitigen Existenz beider Punkte ihre Entstehung verdanken, so beginnt man damit, dass man erst die jedem Punkt für sich zugehörigen und den Inductionswerten Φ_1 bezüglich Φ_1' entsprechenden Kraftlinien zieht. Dann sucht man von den Schnittpunkten der so gewonnenen zwei Systeme von Kraftlinien diejenigen aus, welche für die Summe $\Phi_1 + \Phi_1'$ denselben Wert ergeben, und verbindet sie durch eine Linie, je mehr solcher Schnittpunkte man zur Verfügung hat, desto genauer schliesst sich die gezogene Linie einer Kraftlinie der combinirten electrischen Punkte an. Nach diesem Princip sind die Kraftlinien auf der linken Hälfte der oft genannten Figur auf Tafel I. in Gestalt ausgezogener Linien gezeichnet.

Ich habe so die Kraftlinien unabhängig von den äquipotentiellen Flächen ziehen gelehrt, letztere müssen aber von erstern senkrecht geschnitten werden, und das giebt eine Controle für die Exactheit der ganzen Zeichnung. Ferner muss der Abstand zweier aufeinanderfolgender äquipotentieller Flächen sich zu dem Abstand zweier aufeinanderfolgender Kraftlinien ebenso verhalten, wie die Hälfte des mittlern Abstandes von der Symmetrieaxe zur benutzten Längeneinheit, und damit können wir unsere Zeichnung einer zweiten Probe unterwerfen.

Wenn ein derartiges electrisches System endliche Dimensionen hat, so besitzt diejenige Kraftlinie, deren zugehörige Induction Φ kleiner als die Gesammtladung e des ganzen Systems ist, eine Asymptote, die durch das

Digitized by Google

electrische Centrum (Art. 89 d) hindurchgeht. Sie bildet mit der Axe einen Winkel ϑ, dessen Wert aus der Gleichung

$$\vartheta = \arccos\left(1 - 2\frac{\Phi}{e}\right)$$

folgt. Kraftlinien, deren zugehörige Induction grösser als e ist, hören in der Endlichkeit auf, haben also eine endliche Länge. Daraus ergiebt sich, dass wenn die Gesammtladung e verschwindet, keine Kraftlinie bis in die Unendlichkeit verlaufen kann.

In einem Felde, in welchem die Kraft überall gleichförmig parallel einer Axe verteilt ist, laufen die Kraftlinien dieser Axe parallel. Ihre Abstände von derselben repräsentiren die Quadratwurzeln einer arithmetischen Reihe.

Eine besondere Untersuchung verdient der Fall, dass die äquipotentiellen Flächen und Linien schon in zwei Dimensionen bestimmt sind. Ich komme aber später bei der Behandlung der Theorie der conjugirten Functionen darauf zurück.*)

*) Ich verweise noch auf die Abhandlung von W. R. Smith, „*On Flow of Electricity in conducting Surfaces*“ Proc. R. S. Edin. 1869—70. pag. 79.

Digitized by Google

Cap. VIII.

Einfache Fälle der electrischen Verteilung.

Zwei parallele unendlich ausgedehnte Ebenen.

124. Wir betrachten zunächst zwei parallele, unendlich ausgedehnte, leitende Ebenen A, B, deren Entfernung von einander gleich c ist und welche zu den Potentialen A bezüglich B geladen sind.

Von vornherein sieht man, dass die äquipotentiellen Flächen in diesem Falle selbst unendlich ausgedehnte, zu den gegebenen Ebenen parallele Ebenen sein müssen, die nur da, wo die Conductoren aufhören, also in der Unendlichkeit eine Gestaltsänderung erleiden würden. Nehmen wir demnach die Ebene A zur xy Ebene, so dass die z Axe senkrecht von A nach B übergeht, so reducirt sich die Laplacesche Gleichung auf

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

woraus das Potential V auf einen zwischen beiden Ebenen liegenden Punkt

$$V = C_1 + C_2 z$$

folgt. Für $z = 0$ ist $V = A$ und für $z = c$ ist $V = B$, also allgemein

$$V = A + (B - A)\frac{z}{c}.$$

Für die resultirende Kraftintensität R erhalten wir

$$R = \frac{A - B}{c},$$

sie ist also überall von derselben Grösse und wirkt normal zu den Platten.

In den Conductoren selbst ist $R = 0$, demnach die Flächendichte σ_1, σ_2 der auf A bezüglich B ausgebreiteten Electricität

$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{A - B}{c},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{4\pi}\frac{B - A}{c}.$$

Digitized by Google

Schliessen wir weiter von der ersten Conductorebene ein Stück S aus, das nirgends in die Unendlichkeit reicht, so ist die auf demselben befindliche Electricitätsmenge $e_1 = S\sigma_1$. Nach Art. 79 wirkt aber auf jede Electricitätseinheit eine Kraft von der Grösse $R/2$. Die Kraft, welche S angreift und es nach der andern Ebene B hinzudrängen sucht, wird demnach

$$F_1 = \tfrac{1}{2} R S \sigma = \frac{1}{8\pi} R^2 S = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{A-B}{c}\right)^2.$$

Die Kraft ist so durch die Grösse des Flächenstückes, den Abstand beider Conductorebenen und die Potentialdifferenz zwischen ihnen bestimmt. Einen Ausdruck für dieselbe durch die Grösse des Flächenstückes und durch die auf demselben befindliche Electricitätsmenge gewinnt man durch die Beziehung

$$e_1 = \frac{S}{4\pi} \frac{A-B}{c},$$

welche

$$F_1 = \frac{2\pi}{S} e_1^2$$

finden lässt.

Die Energie W der Electricität, welche auf S und auf der Projection S von S auf die Ebene B enthalten ist (die Projectionslinien sind hier Kraftlinien), wird nach Art. 84

$$\begin{aligned} W &= \tfrac{1}{2}(e_1 A + e_2 B) \\ &= \frac{S}{8\pi} \frac{(A-B)^2}{c} \\ &= \frac{R^2}{8\pi} Sc \\ &= \frac{2\pi}{S} e_1^2 c \\ &= Fc. \end{aligned}$$

Im ganzen haben wir also fünf Ausdrücke für diese Energie.

Der erste derselben giebt sie in ihrer allgemeinen Form, wie wir sie in Art. 84 kennen gelernt haben.

Der zweite bestimmt die Energie durch die Grösse der Fläche, für welche sie gelten soll, den Abstand und die Potentialdifferenz der Conductoren.

Der Dritte macht sie von der resultirenden Kraft R und dem Volumen Sc zwischen den Flächen S, S und den durch ihre Begrenzungen gehenden Kraftlinien abhängig. Aus dieser letzteren Darstellung folgt, dass die Energie p für die Volumeinheit gleich $R^2/8\pi$ ist. Die Grösse p hat auch noch eine andere Bedeutung. Da nämlich $p.S$ die Attraction zwischen den Flächen angiebt, so ist p auch gleich der gegen die Flächeneinheit wirkenden electrischen Spannung.

Digitized by Google

Der vierte Ausdruck für die Energie stellt diese durch die Ladung, den Inhalt der Flächen S, S und durch den Abstand derselben dar.

Der fünfte endlich lehrt, dass die Energie gleich der Arbeit ist, welche die electrische Kraft leistet, indem sie die Flächen S, S mit ihren fixirt und unveränderlich gedachten Ladungen parallel mit sich selbst bis zu ihrem Zusammenfallen verschiebt.

Weiter haben wir

$$e_1 = \frac{1}{4\pi}\frac{S}{c}(A - B) = q(A - B),$$

daher ist die Capacität der Fläche S in Gegenwart der ihr entsprechenden Fläche S des andern Conductors gleich $q = S/4\pi c$.

Wenn die specifische inductive Capacität des Mediums zwischen den Conductoren nicht, wie wir bisher angenommen haben, gleich 1, sondern gleich K ist, so wird die Ladung Kmal so gross als im erstern Fall, also

$$e_1 = \frac{KS}{4\pi c}(A - B),$$

ferner die Energie

$$W = \frac{KS}{8\pi c}(A - B)^2$$

$$= \frac{2\pi}{KS} e_1^2 c$$

und die Kraftwirkung zwischen S und S

$$F = pS = \frac{KS}{8\pi}\left(\frac{A-B}{c}\right)^2$$

$$= \frac{2\pi}{KS} e_1^2.$$

Bringt man also zwischen zwei stets zu derselben Potentialdifferenz $A - B$ geladene Platten verschiedene Zwischenmedien, so ändert sich die Kraftwirkung zwischen den Platten direct wie die specifische inductive Capacität, ladet man dagegen, während verschiedene Medien zwischen den Platten sich befinden, dieselben mit stets derselben Electricitätsmenge e_1, so variirt die betreffende Wirkung umgekehrt wie die specifische inductive Capacität. (Vergl. Art. 94.)

Zwei concentrische Kugelflächen.

125. Als zweiten Fall betrachten wir zwei sich gegenüberstehende concentrische Kugelflächen mit den Radien a und b (wo $b > a$ ist) und den Potentialen A, B.

Digitized by Google

Die äquipotentiellen Flächen können offenbar nur von r, dem Abstande ihrer Punkte von dem Mittelpunkt der Kugelflächen abhängen. Die Laplacesche Gleichung wird also

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

woraus zunächst

$$V = C_1 + C_2 r^{-1}$$

folgt. Für $r = a$ ist aber $V = A$ und für $r = b$ ist $V = B$, somit ist zwischen beiden Flächen

$$V = \frac{Aa - Bb}{a - b} + \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} r^{-1},$$

$$R = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} r^{-2}.$$

Bezeichnen σ_1, σ_2 die Flächendichten der auf den einander zugewandten Seiten der Kugelflächen befindlichen Electricität, so ist

$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi a^2}\frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}}, \quad \sigma_2 = \frac{1}{4\pi b^2}\frac{B - A}{a^{-1} - b^{-1}},$$

also haben wir für die Ladungen e_1, e_2 der einander gegenüberstehenden Kugelflächen

$$e_1 = 4\pi a^2 \sigma_1, \quad e_2 = 4\pi b^2 \sigma_2 \text{ oder}$$

$$e_1 = -e_2 = \frac{A - B}{a^{-1} - b^{-1}} = \frac{ab}{b - a}(A - B).$$

Die Capacität der innern Kugelfläche in der Gegenwart der äussern ist demnach

$$q = \frac{ab}{b - a}.$$

Diese Resultate gelten unabhängig von der Gestalt der äussern Oberfläche der äussern Kugelfläche. Wenn diese äussere Oberfläche auch eine Kugelfläche vom Radius c $(c > b > a)$ ist, so wird das Potential ausserhalb derselben Bc/r, und ihre Ladung

$$e_3 = Bc.$$

Die ganze der äussern Kugelfläche angehörige Electricitätsmenge ist demnach

$$e_2 + e_3 = -\frac{ab}{b - a}(A - B) + Bc,$$

Digitized by Google

während die der innern gleich

$$e_1 = \frac{ab}{b-a}(A-B)$$

bleibt.

Die an der Flächeneinheit der innern Kugelfläche wirkende electrische Spannung ist

$$p = \frac{1}{8\pi}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{A-B}{b-a}\right)^2.$$

Die Resultante dieser Spannung bezogen auf eine Hälfte der innern Kugel ist numerisch gleich $\pi a^2 p = F$. Sie wirkt senkrecht zur Basis der Halbkugel und wird neutralisirt, wenn man an der Längeneinheit der Begrenzung der Basis der Halbkugel eine Spannung

$$T = \frac{1}{2\pi a}F$$

wirken lässt, wir haben also

$$F = \frac{b^2}{8}\left(\frac{A-B}{b-a}\right)^2 = \frac{e_1^2}{8a^2},$$

$$T = \frac{b^2}{16\pi a}\left(\frac{A-B}{b-a}\right)^2 = \frac{e_1^2}{16\pi a^3}.$$

Wird $b = \infty$ genommen, so bleibt die Kugel mit dem Radius a allein im unendlichen Raume übrig. Ihre Capacität ist dann gleich a, also gleich ihrem Radius.

Für eine zum Potential A electrisirte Seifenblase haben wir

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{A}{a}.$$

Die resultirende Kraftintensität ist in der äussern Fläche $4\pi\sigma$ und an der innern gleich Null. Nach Art. 79 wirkt also an der Flächeneinheit der Seifenblase eine mechanische Kraft $2\pi\sigma^2$ von innen nach aussen.

Die Electrisirung der Seifenblase vermindert demnach den in ihrem Innern herrschenden Luftdruck um $2\pi\sigma^2$, d. h. um $A^2/8\pi a^2$. Wenn aber T_0 die Spannung längs der Längeneinheit eines Flüssigkeitsfadens angiebt, so muss, wie man leicht einsieht, im Innern der Seifenblase, damit sie nicht zusammenfällt, ein Ueberdruck $2T_0/a$ gegen den äussern Luftdruck herrschen. Soll also die Seifenblase durch die Electrisirung allein gerade noch erhalten werden, während der Druck in ihrem Innern gleich dem äussern Luftdruck ist, so muss sie bis zum Potential

$$A = \sqrt{16\pi a T_0}$$

geladen werden.

Digitized by Google

Zwei unendlich lange coaxiale Cylinderflächen.

126. Die Radien der beiden sich gegenüberstehenden coaxialen Cylinderflächen seien a bezüglich b $(b>a)$, die Potentiale A und B.

Da die äquipotentiellen Flächen zwischen den beiden Cylinderflächen mit ihnen coaxiale Cylinderflächen sein werden, so geht die Laplacesche Gleichung über in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial r}=0,$$

wenn r den Abstand eines zwischen den Cylinderflächen gelegenen Punktes von ihrer gemeinschaftlichen Axe bezeichnet. Daraus folgt

$$V=C_1+C_2\log r,$$

und weil $V=A$ für $r=a$ und $V=B$ für $r=b$ ist,

$$V=\frac{A\log\frac{b}{r}+B\log\frac{r}{a}}{\log\frac{b}{a}},$$

$$R=-\frac{\partial V}{\partial r}=\frac{A-B}{r\log\frac{b}{a}}.$$

Sind weiter σ_1, σ_2 die Flächendichten an den einander zugewandten Seiten der Cylinderflächen, so haben wir

$$\sigma_1=\frac{1}{4\pi}\frac{A-B}{a\log\frac{b}{a}},\quad \sigma_2=\frac{1}{4\pi}\frac{B-A}{b\log\frac{b}{a}}.$$

Für die auf Cylinderstücken von der Länge l vorhandenen Electricitätsmengen e_1, e_2 erhalten wir

$$e_1=2\pi a l\sigma_1,\quad e_2=2\pi b l\sigma_2$$

oder

$$e_1=-e_2=\tfrac{1}{2}\frac{A-B}{\log\frac{b}{a}}l.$$

Die Capacität eines Stückes von der Länge l des innern Cylinders ist also bei Gegenwart des äussern Cylinders

$$q=\tfrac{1}{2}\frac{l}{\log\frac{b}{a}}.$$

Befindet sich zwischen den Cylinderflächen ein Dielectricum von der specifischen inductiven Capacität K, so geht die Capacität des betrachteten Teiles des innern Cylinders über in

$$\tfrac{1}{2}\frac{Kl}{\log\frac{b}{a}},$$

Digitized by Google

und die Energie der auf entsprechenden Stücken der beiden Cylinder befindlichen Electricität wird

$$W = \tfrac{1}{4} \frac{lK(A-B)^2}{\log \frac{b}{a}}.$$

Drei coaxiale Cylinder.

127. In der nachstehenden Figur bezeichnen A und B zwei einseitig sich in die Unendlichkeit erstreckende, durch einen kurzen Zwischenraum δ getrennte Hohlcylinder mit gemeinschaftlicher zur x Axe gewählter Axe und mit innern Radien a, b. Wir zählen die x von einem Punkte in der Nähe der Mitte der Trennungsstelle zwischen A und B von links nach rechts, so dass A als positiver, B als negativer Cylinder bezeichnet werden kann.

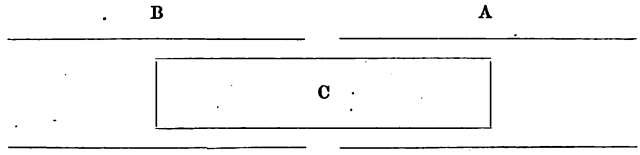


Fig. 5.

Coaxial mit ihnen und in beide Hohlcylinder gleich weit hineinreichend befindet sich ein dritter Cylinder C von der Länge $2l$ und der Dicke $2c$, dessen Mitte von dem Ursprung der x Coordinaten um x nach der positiven Seite absteht.

Die Potentiale der Cylinder setzen wir entsprechend ihrer Bezeichnung gleich A, B, C, und verstehen unter α die Capacität einer Längeneinheit des Cylinders C in Gegenwart von A und unter β dieselbe Grösse in Gegenwart von B.

Wir sind noch nicht im Stande die wahre Verteilung der Electricität auf den drei Cylindern in der Nähe ihrer bezüglichen Enden zu berechnen. Wenn aber l genügend gross gegen δ und gegen x ist, also ein beträchtliches Stück des innern Cylinders C in jeden der Hohlcylinder hineinragt, so wird die Flächendichte auf Teilen der Hohlcylinder A, B weder in der Nähe des Coordinatenursprungs noch in der Nähe der Enden des Cylinders C durch den Betrag des Abstandes x der Mitte des Cylinders C von dem Coordinatenursprung merklich beeinflusst werden. Bewegt man also den innern Cylinder in seiner Axenrichtung, so ändert sich dadurch weder die electrische Verteilung an den Enden der Hohlcylinder noch auch die auf dem Mantel des innern Cylinders, vorausgesetzt, dass dabei immer noch gegen x und δ genügend lange Stücke von C in die Hohlcylinder hineinragen. Der einzige Effect einer solchen Verschiebung von C besteht also darin, dass lediglich die Länge des Stückes desselben, auf welchem die Verteilung der

Digitized by Google

Electricität der auf einem unendlich langen Cylinder entspricht, vergrössert bezüglich verkleinert wird.

Die gesammte Energie des Systems in ihrer Abhängigkeit von x ist demnach nach Art. 126

$$W = \tfrac{1}{2}\alpha(l+x)(C-A)^2 + \tfrac{1}{2}\beta(l-x)(C-B)^2 + \Theta,$$

wo $\alpha = 1/(2\log a/c)$, $\beta = 1/(2\log b/c)$ ist und Θ Glieder in sich fasst, die von x unabhängig sind. Man erhält daraus für die parallel der Axe der Cylinder bei einer solchen Verschiebung wirkende resültirende Kraft

$$X = \frac{\partial W}{\partial x} = \tfrac{1}{2}\alpha(C-A)^2 - \tfrac{1}{2}\beta(C-B)^2.$$

Für den Fall, dass die Hohlcylinder A und B gleiche Querschnitte besitzen, wird $\alpha = \beta$ und

$$X = \frac{\partial W}{\partial x} = \alpha(B-A)[C - \tfrac{1}{2}(A+B)].$$

Die physikalische Bedeutung dieser Gleichung für X geht dahin, dass der innere Cylinder durch eine constante Kraft in den Hohlcylinder hineingezogen wird, von dessen Potential das seinige am meisten abweicht.

Wenn C gegen $A + B$ numerisch gross ist, so wird näherungsweise

$$X = \alpha\,(B-A)\,C.$$

Diese Gleichung kann zur Berechnung der Potentialdifferenz der äussern Cylinder dienen, wenn ausser α das Potential C des innern Cylinders und die Kraft X gemessen werden können. Die Berechnung schliesst sich um so genauer den Tatsachen an, je grösser C im Verhältnis zu $A + B$ genommen wird.

In etwas modificirter Weise ist diese Methode zur Bestimmung der Potentialdifferenz zweier Leiter von Thomson bei der Construction seines Quadrantenelectrometers, auf das ich in Art. 219 noch zu sprechen kommen werde, zu Grunde gelegt worden.

Dieselbe Anordnung dreier Cylinder kann auch noch, wie seiner Zeit ausgeführt werden soll, benutzt werden, um die Capacität direct zu messen.

Digitized by Google

Cap. IX.

Harmonische Kugelfunctionen.

—×—

128. Die Theorie der harmonischen Kugelfunctionen ist mehrfach Gegenstand eingehender Untersuchungen für Mathematiker und Physiker gewesen. Ich nenne zunächst als das umfassendste Werk das *Handbuch der Kugelfunctionen* von E. Heine, das 1878—81 in zweiter Auflage (bei G. Reimer, Halle) in zwei Bänden erschienen ist. Dann haben wir noch die *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen* (Leipzig, Teubner 1878) von Neumann und die Abhandlung über harmonische Kugelfunctionen in Thomson und Taits *Theoretische Physik*, die in der zweiten englischen Ausgabe (von 1879) eine beträchtliche Erweiterung erfahren hat. Ferner sind noch zu erwähnen Todhunters *Elementary Treatise on Laplace's Functions, Lamé's Functions, and Bessel's Functions* und Ferrers *Elementary Treatise on Spherical Harmonics and subjects connected with them.* Bei der Fülle an Belehrungsmitteln über die Kugelfunctionen wird es also wol nicht nötig sein, sie in einem Buche über Electricität eingehend mathematisch zu untersuchen.

Doch habe ich auch in diese Ausgabe die Darstellung der Kugelfunctionen in ihrer Abhängigkeit von der Lage ihrer Pole mit aufgenommen.

Singuläre Punkte des Potentials.

129a. Befindet sich eine Electricitätsmenge A_0 in gleichförmiger Ausbreitung auf einer Kugel, deren Mittelpunkt die Strecken a, b, c zu Coordinaten hat, so ist nach Art. 125 das Potential derselben auf einen um r von ihrem Mittelpunkt entfernten ausserhalb ihrer Oberfläche liegenden Punkt (x, y, z)

$$V = \frac{A_0}{r},$$

wobei

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2$$

ist. Der Ausdruck für V ist von dem Radius der Kugel unabhängig, er bleibt also auch bestehen, wenn wir die Kugel sich beliebig zusammenziehen lassen. Die Ladung A_0 befindet sich dann zuletzt auf einer Kugel, die so

Digitized by Google

klein ist, dass sie mit einem Punkte confundirt werden kann. In der Natur ist es zwar nicht möglich, eine endliche Electricitätsmenge auf einen Punkt zu bringen, weil dazu nach Art. 55, 81 eine unendlich grosse Kraft gehören würde, und man kann deshalb tatsächlich den Radius der Kugel nicht unter eine gewisse Grenze sinken lassen. Da aber die Gleichung $V = A_0/r$ die physikalisch möglichen Potentialwerte in dem Raume um eine Kugel darstellt, so können wir bei einer rein mathematischen Untersuchung von der Fiction ausgehen, als ob die Ladung A_0 sich auch in einen Punkt (a, b, c) condensiren lasse.

Ich bezeichne den Punkt (a, b, c) als Unendlichkeitspunkt von der Ordnung Null. Ehe ich zur Ableitung der Eigenschaften dieses und noch complicirterer singulärer Punkte übergehe, teile ich eine Reihe von Ausdrücken mit, die sich bei Operationen mit Richtungen im Raume und mit zu jenen Richtungen in Beziehungen stehenden auf Kugelflächen gelegenen Punkten von grossem Nutzen erweisen.

129 b. Eine *Axe* ist eine bestimmte Richtung im Raume.

Zieht man vom Centrum einer Kugel in Richtung der Axe einen Radius, so heisst der Punkt, wo der Radius die Kugel trifft, *Pol* der Axe. Der Pol kann also zur Markirung einer Axe dienen. Es ist aber zu beachten, dass nach der Definition eine Axe nur einen Pol haben kann, nicht zwei. Ist μ der Cosinus des Winkels zwischen einer Axe h und einem Vector r und setzt man

a) $$p = \mu r,$$

so heisst p die *Componente* des Vectors r in Richtung der Axe h.

Verschiedene Axen charakterisiren wir dadurch, dass wir an die Grössen, die zu ihnen in Beziehungen stehen, verschiedene Indices anhängen. Namentlich verstehen wir unter

b) $$\lambda_{mn}$$

den Cosinus des Winkels zwischen zwei Axen m und n.

Unter einer *Differentiation nach einer Axe* h, deren Richtungscosinusse die Grössen L, M, N sind, verstehe ich die Operation

c) $$\frac{d}{dh} = L\frac{\partial}{\partial x} + M\frac{\partial}{\partial y} + N\frac{\partial}{\partial z}.$$

Aus den Festsetzungen unter a), b), c) folgten die Beziehungen

α) $$\frac{\partial r}{\partial h_m} = \frac{p_m}{r} = \mu_m,$$

β) $$\frac{\partial p_n}{\partial h_m} = \lambda_{mn} = \frac{dp_m}{dh_n},$$

γ) $$\frac{\partial \mu_m}{\partial h_n} = \frac{\lambda_{mn} - \mu_m \mu_n}{r}.$$

Digitized by Google

Uebt ein singulärer Punkt beliebiger Ordnung, der sich im Ursprung einer Axe h befindet, auf einen andern Punkt mit den Coordinaten x, y, z ein Potential

$$Af(x, y, z)$$

aus, so ist das Potential desselben Punktes, wenn er in das Ende der Axe h verlegt wird, an derselben Stelle (x, y, z) gleich

$$Af[x - Lh,\ y - Mh,\ z - Nh].$$

Bringen wir nunmehr in den Ursprung der Axe einen andern geladenen Punkt hin, der sich vom vorigen nur dadurch unterscheidet, dass seine Electricität A das entgegengesetzte Zeichen wie die des ersten Punktes hat, so ist das Potential des Punktpaares im Punkte (x, y, z)

$$V = Af[x - Lh,\ y - Mh,\ z - Nh] - Af(x\,y\,z)$$

oder nach dem Taylorschen Satz

$$V = -Ah\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial h} + \text{Gliedern von höherer Potenz als } h.$$

Indem man h continuirlich abnehmen und A continuirlich so stark wachsen lässt, dass das Product $Ah = A'$ einen endlichen Wert behält, wird schliesslich

$$V' = -A'\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial h}.$$

Genügt $f(x, y, z)$ der Laplaceschen Gleichung, so muss dasselbe auch bei V' der Fall sein, weil dieses nichts weiter als die Differenz zweier Functionen ist, deren jede die Laplacesche Gleichung identisch erfüllt.

129c. Das Potential eines Unendlichkeitspunktes von der Ordnung Null, also

1) $$V_0 = \frac{A_0}{r}$$

ist nun in der Tat eine Lösung der Laplaceschen Gleichung, daher muss jede andere Function, die aus diesem Potential durch successive Differentiation nach irgend einer Anzahl von Axen entstanden ist, ebenfalls die Laplacesche Gleichung erfüllen.

Ich kann jetzt auseinandersetzen, was ich unter einem singulären Punkt von anderer Ordnung als Null verstehe.

Bringt man einen Punkt von der Ordnung Null mit einer Ladung $-A_0$ in den Anfang und einen andern von derselben Ordnung Null mit der Ladung $+A_0$ in das Ende einer Axe h_1, lässt h_1 continuirlich abnehmen und A_0 continuirlich wachsen, so dass A_0h_1, das *Moment*, endlich bleibt, so fallen schliesslich beide Punkte zusammen und bilden einen Doppelpunkt, den ich als singulären Punkt erster Ordnung bezeichne.

Digitized by Google

Das Potential V_1 eines solchen Punktes von der ersten Ordnung ist also

2) $$V_1 = -h_1 \frac{\partial V_0}{\partial h_1}$$

$$= A_1 \frac{\mu_1}{r^2}.$$

Bringt man weiter einen Punkt von der ersten Ordnung mit dem Moment $-A_1$ an den Anfang und einen andern von derselben Ordnung mit dem Moment $+A_1$ an das Ende einer zweiten Axe h_2, lässt wieder h_2 ohne Ende abnehmen und A_1 wachsen, so dass

$$A_1 h_2 = \tfrac{1}{2} A_2$$

endlich bleibt, so erhält man einen singulären Punkt von der zweiten Ordnung.

Das Potential eines solchen Punktes ist nach Art. 129b, α), γ)

3) $$V_2 = -h_2 \frac{\partial V_1}{\partial h_2}$$

$$= \tfrac{1}{2} A_2 \frac{3\mu_1\mu_2 - \lambda_{12}}{r^3}.$$

Ein singulärer Punkt von der zweiten Ordnung besteht aus vier Punkten der nullten Ordnung, hat zwei Axen h_1, h_2 und ein Moment A_2. Er ist vollständig definirt, wenn die Richtungen dieser Axen und die Grösse des Moments gegeben sind.

Harmonische Raum- und Flächenfunctionen.

Aus den bisherigen Ableitungen sieht man schon, dass man durch Differentiation des Potentials eines Punktes der nullten Ordnung nach n Axen zu dem Potential eines *Singulären Punktes* $n$ter *Ordnung* gelangt.

Dieses Potential ist dann das Product dreier Factoren, nämlich einer Constante, einer gewissen Combination von Cosinussen und endlich der Potenz $r^{-(n+1)}$. Es empfiehlt sich dabei aus Gründen, die erst später klar werden können, den numerischen Betrag der Constante so zu wählen, dass, wenn die Richtungen aller Axen mit der Richtung des Vectors r zusammenfallen, der Coefficient des Moments $r^{-(n+1)}$ wird. Dazu hat man nach einer Differentiation nach h_n durch n zu dividiren.

So resultirt ein bestimmter numerischer Betrag für die besondere Potentialfunction

1a) $$V_n = (-1)^n \frac{1}{1.2.3 \ldots n} \frac{\partial}{\partial h_1} \frac{\partial}{\partial h_2} \frac{\partial}{\partial h_3} \cdots \frac{\partial}{\partial h_n} \left(\frac{1}{r}\right),$$

die wir als *Harmonische Raumfunction* des $-(n+1)$ten Grades bezeichnen.

Digitized by Google

Diese Function hört auch nicht auf das Potential eines Punktes von der $n$ten Ordnung zu sein, wenn wir sie noch mit einer Constante multipliciren.

129d. Das Resultat der durch die Gleichung 1a) des vorigen Artikels angedeuteten Operation ist von der Form

1b) $$V_n = Y_n r^{-(n+1)}.$$

Y_n ist eine Function der n Cosinusse $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ der Winkel zwischen den n Axen und dem Vector r und der $\frac{1}{2} n (n-1)$ Cosinusse $\lambda_{12}, \lambda_{13} \ldots$. der Winkel zwischen je zwei Axen. Ziehen wir von dem Mittelpunkt einer Kugel Radien in Richtung der Axen $h_1, h_2 \ldots h_n$ und des Vectors r, so erhalten wir auf der Kugelfläche n Punkte zur Markirung der n Axen und einen Punkt zur Markirung von r. Y_n ist dann durch die relative Lage dieser $n+1$ Punkte gegeneinander bestimmt und gilt für den Punkt, der den Vector r markirt. Aendert sich die Richtung von r, so wandert sein Pol auf der Kugelfläche und Y_n nimmt andere Werte an. Y_n ist demnach eine Function der $\frac{1}{2} n (n+1)$ Abstände der n Pole der Axen und des Pols des Vectors r von einander.

Wir bezeichnen Y_n als *Harmonische Kugelflächenfunction* oder *Flächenfunction* von der Ordnung n.

130a. Ich beweise, dass zu jeder harmonischen Flächenfunction der $n$ten Ordnung ausser der harmonischen Raumfunction vom $-(n+1)$ten Grade noch eine andere vom $n$ten Grade gehört, das heisst, dass nicht bloss $V_n = Y_n r^{-(n+1)}$, sondern auch $H_n = Y_n r^n$ der Laplaceschen Gleichung genügt.

Zunächst ist

2) $$H_n = Y_n r^n = V_n r^{2n+1},$$

also

$$\frac{\partial H_n}{\partial x} = (2n+1) r^{2n-1} x V_n + r^{2n+1} \frac{\partial V_n}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} = (2n+1)\left\{(2n-1)x^2 + r^2\right\} r^{2n-3} V_n + 2(2n+1) r^{2n-1} x \frac{\partial V_n}{\partial x} + r^{2n+1} \frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2}.$$

Entsprechende Ausdrücke gelten für die Derivirten nach y und z. Es wird also

$$\frac{\partial^2 H_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_n}{\partial z^2} = (2n+1)(2n+2) r^{2n-1} V_n + 2(2n+1) r^{2n-1}\left(x \frac{\partial V_n}{\partial x} + y \frac{\partial V_n}{\partial y} + z \frac{\partial V_n}{\partial z}\right) + r^{2n+1}\left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2}\right).$$

Digitized by Google

Da aber V_n eine homogene Function des $-(n+1)$ten Grades der Coordinaten ist, so ergiebt der Eulersche Satz die Beziehung

$$x\frac{\partial V_n}{\partial x} + y\frac{\partial V_n}{\partial y} + z\frac{\partial V_n}{\partial z} = -(n+1)V_n.$$

Damit heben sich dann die beiden ersten auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Glieder auf, und weil ausserdem $\nabla^2 V_n = 0$ sein sollte, bleibt

3) $$\nabla^2 H_n = 0.$$

H_n genügt also in der Tat der Laplaceschen Gleichung und ist eine harmonische Raumfunction vom $n$ten Grade.

Das eben bewiesene Theorem bildet nur einen speciellen Fall eines allgemeinen Satzes über reciproke Verhältnisse in der Electricitätstheorie, demzufolge die Existenz einer Function $F(x, y, z)$, die der Laplaceschen Gleichung genügt, sofort die einer andern Function

$$\frac{a}{r}F\left(\frac{a^2x}{r^2}, \frac{a^2y}{r^2}, \frac{a^2z}{r^2}\right),$$

welche ebenfalls die Laplacesche Gleichung erfüllt, mitbedingt. (Art. 162.)

130b. Die n Axen der harmonischen Flächenfunction Y_n sind durch ihre auf der Kugel gelegenen n Pole bestimmt, jeder der Pole erfordert aber zu seiner Fixirung die Angabe zweier sphärischer Coordinaten, wie Länge und Breite. Daher enthält eine harmonische Flächenfunction der $n$ten Ordnung $2n$ Constanten.

Ihrer Definition zufolge müssen auch die harmonischen Raumfunctionen V_n und H_n je $2n$ willkürliche Constanten besitzen. Sie hören aber nicht auf der Laplaceschen Gleichung zu genügen, wenn man sie mit Constanten multiplicirt, somit enthalten sie in ihrer allgemeinsten Form $2n+1$ willkürliche Constanten.

Nun hat zwar eine homogene ganze Function K dreier Variabeln vom $n$ten Grade im allgemeinsten Fall $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ Constanten. Es ist aber leicht zu zeigen, dass trotzdem AH_n, wo A eine Constante ist, die allgemeinste ganze homogene Function vom n Grade ist, welche der Laplaceschen Gleichung genügt. Denn wenn wir die allgemeinste Form K der Operation ∇^2 unterwerfen, so wird $\nabla^2 K$ eine homogene ganze Function vom $n-2$ten Grade und besitzt als solche nur noch $\frac{1}{2}n(n-1)$ Constanten, die einzeln verschwinden müssen, sobald $\nabla^2 K = 0$ sein soll, die allgemeinste Function K behält also nur noch $\frac{1}{2}(n+2)(n+1) - \frac{1}{2}n(n-1)$ oder $2n+1$ willkürliche Constanten, also genau soviele wie AH_n schon besitzt.

Potential einer Kugelschale.

131. Die Raumfunction $V_n = Y_n r^{-(n+1)}$ vom $-(n+1)$ten Grade genügt der Laplaceschen Gleichung, verschwindet in der Unendlichkeit,

Digitized by Google

wird aber unendlich im Ursprung des Vectors r. Andererseits genügt $H_n = Y_n r^n$ der Laplaceschen Gleichung, verschwindet in dem Ursprung des Vectors r, wird aber unbestimmt in der Unendlichkeit.

Setzen wir also fest, dass in allen Punkten ausserhalb einer um den Ursprung des Vectors r mit dem Radius a gelegten Kugelschale das Potential $V_n = a^n Y_n r^{-(n+1)}$ und in allen Punkten innerhalb dieser Kugel gleich $V'_n = a^{-(n+1)} Y_n r^n$ sein soll, und bestimmen ferner, dass in allen Punkten auf der Kugel die Flächendichte σ durch

$$\sigma = \frac{1}{4\pi a^2}(2n+1)\, Y_n,$$

gegeben sein soll, dann erfüllt das Potential alle Bedingungen, die an dasselbe gestellt werden, denn erstens ist es überall endlich und stetig, ferner verschwindet es in der Unendlichkeit, dann sind seine ersten Derivirten überall endlich, abgesehen von der Kugelfläche selbst, und dort genügen sie der Grenzbedingung

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} + \frac{\partial V'}{\partial \nu'} = -4\pi\sigma.$$

Aus Art. 100a folgt dann weiter, dass die Lösung

1) $$V = a^n Y_n r^{-(n+1)}$$

für Punkte ausserhalb der Kugel, und

2) $$V' = a^{-(n+1)} Y_n r^n$$

für Punkte innerhalb der Kugel die einzig mögliche ist, wenn die Verteilung der Electricität auf der Kugelfläche durch die Bedingung

3) $$\sigma = \frac{1}{4\pi a^2}(2n+1)\, Y_n$$

gegeben ist.

Lässt man die Kugel vom Radius a sich unendlich zusammenziehen; so giebt $V = a^n Y_n r^{-(n+1)}$ das Potential eines singulären Punktes von der $n$ten Ordnung.

Darstellung der harmonischen Kugelfunctionen.

132. Ich leite jetzt die allgemeine Form einer harmonischen Flächenfunction Y_n der $n$ten Ordnung in Termen der Cosinusse der Winkel der Axen gegeneinander und gegen den Vector, oder kürzer, in Termen der Winkel zwischen den $n+1$ auf der Kugelfläche gelegenen Polen ab.

Für $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ sind die Flächenfunctionen leicht hinzuschreiben, wenn man ihre Definition beachtet. Es ist nämlich

$$Y_0 = 1,\ Y_1 = \mu_1,\ Y_2 = \tfrac{3}{2}\mu_1\mu_2 - \tfrac{1}{2}\lambda_{12},$$
$$Y_3 = \tfrac{5}{2}\mu_1\mu_2\mu_3 - \tfrac{1}{2}(\mu_1\lambda_{23} + \mu_2\lambda_{31} + \mu_3\lambda_{12}), \quad \text{u. s. f.}$$

Digitized by Google

Jedes Glied von Y_n besteht aus Producten von Cosinussen, von denen die mit einem Index markirten μ für die Winkel, welche die Axen gegen den Radiusvector bilden, die mit zwei Indices ausgezeichneten λ für die Winkel der Axen untereinander gelten.

Da jede Differentiation eine neue Axe einführt, so kann das Symbol einer jeden Axe in jedem Gliede einmal und nur einmal unter den Indices der Cosinusse vertreten sein.

Enthält also ein Glied von Y_n s Cosinusse mit doppeltem Index, so müssen sich $n - 2s$ Cosinusse mit einfachem Index in ihm vorfinden.

Ich bezeichne durch

$$\Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)}$$

die Summe aller Glieder, in denen s Cosinusse doppelte, also $n - 2s$ Cosinusse einfache Indices haben.

Um ferner auszudrücken, dass ein besonderer Index m nur bei den μ bezüglich nur bei den λ vertreten ist, hänge ich diesen Index dem μ bezüglich dem λ an. Die Gleichung

$$\Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)} = \Sigma \mu_m^{(n-2s)} \lambda^{(s)} + \Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda_m^{(s)}$$

drückt also aus, dass die ganze Summe der einzelnen Glieder in zwei Partialsummen zerlegt werden kann, in deren einer der Index m sich in den Richtungscosinussen μ der Axen gegen den Radiusvector r vorfindet, während in der zweiten Partialsumme derselbe Index in den Richtungscosinussen der Axen gegen einander vertreten ist.

Es sei nun für ein bestimmtes n

$$Y_n = A_{n,0} \Sigma \mu^{(n)} + A_{n,1} \Sigma \mu^{(n-2)} \lambda^{(1)} + A_{n,2} \Sigma \mu^{(n-4)} \lambda^{(2)} + \ldots.$$
$$+ A_{n,s} \Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)} + \ldots\ldots.$$

Verstehen wir unter S eine Summation, die nach s ausgeführt werden soll, während s alle ganzzahligen zwischen 0 und $n/2$, die 0 mit eingeschlossen, gelegenen Werte umfasst, so lässt sich obiger Ausdruck auch schreiben

1′) $$Y_n = S[A_{n,s} \Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)}],$$

und man erhält für die harmonische Raumfunction des $-(n+1)$ten Grades

2′a) $$V_n = r^{-(n+1)} S[A_{n,s} \Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)}],$$

oder

2′b) $$V_n = S[A_{n,s} r^{2s-2n-1} \Sigma p^{(n-2s)} \lambda^{(s)}],$$

wo wie früher $p = r\mu$ gesetzt ist.

Die Grössen A sind Constanten, deren Werte wir leicht bestimmen können, wenn wir von der Function V_n zu der V_{n+1} übergehen.

Digitized by Google

Es ist aber nach der Definition der harmonischen Function durch eine $n$fache Differentiation

$$\frac{\partial V_n}{\partial h_m} = -(n+1)\, V_{n+1},$$

also unter Beachtung der in Art. 129b, α) bis γ) gegebenen Beziehungen

$$(n+1)\, V_{n-1} = S\,[A_{n,s}\,(2n+1-2s)\, r^{2s-2n-3}\, \Sigma p_m^{(n-2s+1)}\, \lambda^{(s)} - A_{n,s}\, r^{2s-2n-1}\, \Sigma p^{(n-2s-1)} \lambda_m^{(s+1)}],$$

oder, wenn man die Glieder unter dem Zeichen S so ordnet, dass sie immer s Cosinusse mit zwei Indices enthalten,

$$(n+1)\, V_{n+1} = S\,[r^{2s-2n-3}\,\{A_{n,s}\,(2n+1-2s)\,\Sigma p_m^{(n-2s+1)}\,\lambda^{(s)} - A_{n,s-1}\,\Sigma p^{(n-2s+1)}\,\lambda_m^{(s)}\}].$$

Die Summen $\Sigma p_m^{(n-2s+1)}\lambda^{(s)}$ und $\Sigma p^{(n-2s+1)}\lambda_m^{(s)}$ unterscheiden sich aber nur dadurch von einander, dass der Index m einmal unter den p, das andere mal unter den λ vertreten ist, und da die Function Y_n nur Glieder enthält, in denen alle Indices zu finden sind, so muss zunächst

a) $$(2n-2s+1)\, A_{n,s} = -A_{n,s-1}$$

sein. Weiter entsteht V_{n+1} aus V_n auch dadurch, dass man in dem Ausdrucke für V_n an Stelle des n die Zahl $n+1$ setzt, demnach haben wir

b) $$(n+1)\, A_{n+1,s} = (2n-2s+1)\, A_{n,s}.$$

Für $s=0$ wird

b_1) $$(n+1)\, A_{n+1,0} = (2n+1)\, A_{n,0},$$

und weil wegen $Y_1 = \mu_1$ die Constante $A_{1,0} = 1$ ist,

c_1) $$A_{n,0} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}.$$

Allgemein ist dann nach a)

c) $$A_{n,s} = (-1)^s\, \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\, (n-s)!},$$

und damit wird der Ausdruck für die harmonische Flächenfunction

1) $$Y_n = S\left[(-1)^s\, \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\, (n-s)!}\, \Sigma\, \mu^{(n-2s)}\, \lambda^{(s)}\right],$$

und der für die harmonischen Raumfunctionen

Digitized by Google

$$2) \qquad V_n = r^{-(n+1)} S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\,(n-s!)} \Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)}\right]$$

$$= S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\,(n-s)!} \Sigma r^{2s-2n-1} p^{(n-2s)} \lambda^{(s)}\right],$$

$$3) \qquad H_n = r^n S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\,(n-s)!} \Sigma \mu^{(n-2s)} \lambda^{(s)}\right]$$

$$= S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\, n!\,(n-s)!} \Sigma r^{2s} p^{(n-2s)} \lambda^{(s)}\right].$$

Die Summe S bezieht sich auf alle Werte des s zwischen 0 und $\frac{1}{2}n$, die 0 mitgenommen, die Summe Σ dagegen auf die Indices der Cosinusse μ und λ der Winkel der Axen gegen den Vector und gegen einander. Die Indices laufen von 1 bis n und müssen alle in jedem Gliede vertreten sein, so aber dass kein Index in demselben Gliede zweimal vorkommen kann. Dadurch ist die Operation Σ vollständig bestimmt, wenn man noch beachtet, dass die Exponenten $(n-2s)$ und (s) keine Potenzirungen anzeigen, sondern festsetzen, dass $n-2s$ Cosinusse der Klasse μ und s Cosinusse der Klasse λ vertreten sein sollen. Da die Existenz jedes Poles in jedem Gliede von Y_n einmal und nur einmal ihren Ausdruck findet und λ und μ Cosinusse sind, so muss Y_n sein Zeichen ändern, wenn man einen Pol durch das Centrum der Kugel nach der entgegengesetzten Seite sich hinbegeben lässt, also wenn man die entsprechende Axe in die der ersten Richtung entgegengesetzte verlegt.

Verwandelt man also die Richtungen einer geraden Anzahl von Axen ins Entgegengesetzte, so bleibt die harmonische Flächenfunction ungeändert, tut man dasselbe mit einer ungeraden Anzahl, so wechselt sie ihr Zeichen.

Indessen hat Sylvester nachgewiesen*), dass wenn die harmonische Function Y_n gegeben ist, die Aufgabe, ihre Axen zu finden, nur eine Lösung zulässt, trotzdem, wie wir eben gesehen haben, die Function Y_n keine Aenderung erleidet, wenn man die Richtungen einer geraden Anzahl ihrer Axen um 180° dreht.

Sätze über harmonische Kugelfunctionen.

133a. Bei der Ableitung der fundamentalen Sätze aus der Theorie der Kugelfunctionen gehe ich von dem rein physikalischen Problem der Bestimmung der Energie eines electrischen Systems E auf einen singulären Punkt der $n$ten Ordnung aus. Die ganze Deduction wird aber rein mathematisch verlaufen, so dass alle Endresultate unabhängig von der speciellen physikalischen Bedeutung der einzelnen benutzten Grössen bestehen bleiben.

*) Phil. Mag. 1876 Oct.

Digitized by Google

Nichtsdestoweniger habe ich so und nicht anders verfahren zu müssen geglaubt, weil einerseits auch dem Mathematiker die physikalischen Grössen immer noch geläufiger sein dürften, als andere, die er etwa einführen könnte, und andererseits der Physiker einem rein mathematischen Calcül besser zu folgen im Stande ist, wenn er jeder Einzelgleichung eine physikalische Deutung beizulegen vermag.

Ist zunächst A_0 die Ladung eines singulären Punktes der nullten Ordnung und Ψ das Potential des electrischen Systems E in ihm, so wird die potentielle Energie des Systems auf den singulären Punkt

$$W_0 = A_0 \Psi.$$

Haben wir nun zwei Punkte der nullten Ordnung mit den Ladungen $-A_0$ und $+A_0$, deren erster sich im Anfang der Axe h_1 befindet, während der zweite im Ende derselben liegt, so ist

$$W_1 = -A_0 \Psi + A_0 \left(\Psi + h_1 \frac{d\Psi}{dh_1} + \tfrac{1}{2} h_1^2 \frac{d^2\Psi}{dh_1^2} + \ldots \right),$$

und wenn wir wieder wie früher h_1 unendlich abnehmen und A_0 unendlich wachsen lassen, so dass $A_0 h_1 = A_1$ endlich bleibt, so wird die Energie des Systems E auf einen Punkt der ersten Ordnung

$$W_1 = A_1 \frac{d\Psi}{dh_1}.$$

Allgemein ist die potentielle Energie eines electrischen Systems E auf einen singulären Punkt der $n$ten Ordnung, dessen Moment $A_n/n!$ ist,

a) $$W_n = \frac{A_n}{n!} \frac{\partial^n \Psi}{\partial h_1 \partial h_2 .. \partial h_n}.$$

133 b. Nun bestehe das electrische System E aus mit den einzelnen bezüglichen Electricitätsmengen dE geladenen Teilen, so dass

$$\Psi = \Sigma \frac{dE}{r}$$

wird.. Ebenso seien die Ladungen der einzelnen den singulären Punkt zusammensetzenden Punkte nullter Ordnung dargestellt durch de, das Potential des singulären Punktes wird also

$$V_n = \Sigma \frac{de}{r}.$$

Die Energie der Wirkung des Systems E auf den singulären Punkt ist dann

b) $$W_n = \Sigma \Psi \, de = \Sigma\Sigma \frac{1}{r} dE \, de$$
$$= \Sigma V_n \, dE.$$

Digitized by Google

Der letzte Ausdruck also $\Sigma V_n \, dE$ giebt auch umgekehrt die Energie der Wirkung des singulären Punktes auf das System E.

Ersetzen wir ferner den singulären Punkt durch eine ihm entsprechende, das System E ausschliessende geladene Kugelfläche vom Radius a (Art. 131), deren Potential auf ausserhalb ihrer Oberfläche gelegene Punkte gleich V_n ist, und deren Flächendichte σ durch

$$\sigma = \frac{1}{4\pi a^2}(2n+1)\, Y_n$$

bestimmt ist, so haben wir

c') $$W_n = \Sigma V_n \, dE = \Sigma\Sigma \frac{1}{r} dE \sigma \, ds$$
$$= \Sigma \Psi \sigma \, ds,$$

wo ds ein Flächenelement der Kugel bezeichnet. Die Summation in dem dritten Ausdruck erstreckt sich über alle Elemente der Kugel, ersetzen wir sie also durch eine Integration, so wird

c) $$W_n = \int\int \Psi \sigma \, ds = \frac{2n+1}{4\pi a^2} \int\int \Psi \, Y_n \, ds.$$

134 a. Beachtet man, dass die bisher für die Energie abgeleiteten Ausdrücke alle eine und dieselbe Grösse darstellen, so erhält man aus a) und c) unter Berücksichtigung, dass in unserm Falle $A_n = a^n$ zu setzen ist, die Beziehung

1) $$\int\int \Psi \, Y_n \, ds = \frac{4\pi}{n!\,(2n+1)} \, a^{n+2} \frac{\partial^n \Psi}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_n}.$$

Das Glied auf der linken Seite dieser Gleichung bezieht sich auf eine Operation über eine Kugelfläche, das auf der rechten Seite auf eine Operation im Centrum dieser Kugelfläche, und die Gleichung spricht den Satz aus, dass man die Integration der Grösse ΨY_n über eine Kugelfläche vom Radius a durch eine $n$fache Differentiation von Ψ nach den n Axen der harmonischen Flächenfunction Y_n ersetzen kann, wenn man das Resultat auf den Mittelpunkt der Kugel reducirt.

Die Grösse Ψ ist ein Potential, nehmen wir also an, dass Ψ eine harmonische Raumfunction vom $m$ten Grade, also

$$\Psi = a^{-m} Y_m \, r^m$$

ist, so wird auf der Kugeloberfläche, weil dort $r = a$ ist, $\Psi = Y_m$. Demnach

2) $$\int\int Y_m \, Y_n \, ds = \frac{4\pi}{n!\,(2n+1)} \, a^{n-m+2} \frac{\partial^n (Y_m \, r^m)}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_n}.$$

Ist zunächst $n < m$, so ist das Resultat der $n$fachen Differentiation eine homogene Function von x, y, z vom $m-n$ten Grad, und da die Differen-

Digitized by Google

tiation auf das Centrum der Kugel bezogen werden soll, so wird die rechte Seite der obigen Gleichung gleich Null. Wenn ferner $n > m$ ist, so ergiebt die Differentiation an sich schon Null. Demnach wird

3) $$\iint Y_m Y_n \, ds = 0, \; m \gtrless n.$$

Für $m = n$ ist das Endresultat der $n$fachen Differentiation eine Constante, deren Wert wir aus der in Art. 132 gegebenen Darstellung der harmonischen Kugelfunctionen zu eruiren vermögen.

Zunächst ist nach der Gleichung unter 3) des angeführten Art.

$$Y_m r^m = S\left[(-1)^s \frac{(2m-2s)!}{2^{m-s} m! (m-s)!} \Sigma r^{2s} p_m^{(m-2s)} \lambda_{mm}^{(s)}\right].$$

Differenzirt man ein Glied von $Y_m r^m$ etwa $r^{2s} p_m^{(m-2s)} \lambda_{mm}^{(s)}$ nach den n Axen $h_1, h_2, \ldots h_n$, so ist in Bezug auf die s ersten Axen $p_m^{(m-2s)} \lambda_{mm}^{(s)}$ als Constante zu betrachten. Führt man also die s ersten Differentiationen, die sich nur auf r^{2s} erstrecken, aus, so wird nach Art. 129 b Gleichung α) bei jeder Differentiation ein neues μ_n oder p_μ / r eingeführt. Nach einer $s$maligen Differentiation sind also s der p_n neu eingetreten und zugleich hat sich der Factor

$$2s(2s-2)\ldots 2 = 2^s s!$$

abgeschieden. Setzt man die Operation fort, indem man nach den $s$nächsten Axen differenzirt, so gehen die neueingetretenen p_n in λ_{nn} über, ein Zahlenfactor kommt aber nicht zum Vorschein. Endlich werden durch die $n-2s$ letzten Differentiationen nach den $n-2s$ letzten Axen die p_m in λ_{mn} verwandelt, so dass das Glied $r^{2s} p_m^{m-2s} \lambda_m^s$ nach der $n$fachen Differentiation übergeht in $2^s s! \lambda_{nn}^{(s)} \lambda_{mm}^{(s)} \lambda_{mn}^{(m-2s)}$.

Unterwirft man alle Glieder von $Y_m r^m$ derselben Operation, so wird schliesslich, weil $m = n$ sein sollte.

4) $$\iint Y_m Y_n \, ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1)(n!)^2} S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)! s!}{2^{n-2s}(n-s)!} \Sigma (\lambda_{mm}^{(s)} \lambda_{nn}^{(s)} \lambda_{mn}^{(n-2s)})\right].$$

Dieser Ausdruck gilt ganz allgemein, wie auch die Axenrichtungen in Y_m sich zu denen in Y_n verhalten, wenn nur beide Flächenfunctionen eine gleiche Anzahl von Axen haben. Deshalb sind auch die beiden Flächenfunctionen und alle auf sie Bezug habenden Grössen noch durch die Indices m, n von einander unterschieden, obgleich die Zahlenwerte m und n einander gleich sein sollten.

134 b. Ich setze speciell voraus, dass die Axen von Y_m alle zu einer Axe zusammenfallen. Y_m geht dann in eine *Zonale* harmonische Function P_m von der $m$ten Ordnung über. Alle Cosinusse der Form λ_{nm} werden dann zu Cosinussen μ_n, indem wir unter μ_n den Cosinus des Winkels

Digitized by Google

zwischen der $m$fachen Axe von $Y_m = P_m$ und einer der n Axen von Y_n verstehen. Die Cosinusse von der Form λ_{mmm} werden gleich 1, so dass $\Sigma\lambda^{(s)}_{mmm}$ gleich ist der Zahl aller Combinationen von s Symbolen, deren jedes zwei verschiedene aus der Zahlenreihe 1, 2, 3, .. n entnommene Indices hat.

Demnach wird

$$\Sigma\lambda^{(s)}_{mm} = \frac{n!}{2^s s!\,(n-2s)!}.$$

Ferner ist die Anzahl aller Permutationen von $n-2s$ Indices der Axen von P_m gleich $(n-2s)!$, somit

$$\Sigma\lambda^{(n-2s)}_{mn} = (n-2s)!\,\mu^{(n-2s)}.$$

Dadurch geht aber die Gleichung 3) des vorigen Artikels über in

$$5a)\quad \iint Y_n P_m\,ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1)\,n!}\,S\left[(-1)^s \frac{(2n-2s)!}{2^{n-s}\,(n-s)!}\,\Sigma\mu^{(n-2s)}\lambda^{(s)}\right],$$

oder nach Gleichung 1) in Art. 132

$$5b)\quad \iint Y_n P_m = \frac{4\pi a^2}{(2n+1)}\,Y_{n(m)},$$

wenn $Y_{n(m)}$ den Wert der harmonischen Flächenfunction Y_n im Pole der zonalen harmonischen Function P_m, also im Pole der zusammenfallenden Axen von P_m angiebt.

Weniger umständlich können wir zu demselben Resultat auf dem folgenden Wege gelangen.

Aus der Gleichung 1) in Art. 134 folgt, dass für $m = n$ und $Y_m = P_m$ auch

$$\iint Y_n P_m\,ds = \frac{4\pi a^2}{(2n+1)\,n!}\,\frac{\partial^n (Y_n r^n)}{\partial z^n}$$

ist. Wählen wir das Coordinatensystem so, dass die zAxe mit der Axe der zonalen harmonischen Function P_m zusammenfällt und denken uns $Y_n r_n$ als homogene Function des $n$ten Grades nach x, y, z entwickelt, so ist der Wert von $Y_n r^n$ im Pol von P_m wo $x = y = 0$ ist gleich Cz^n. Dort ist aber $z = r$, also bezeichnet C den Wert von Y_n im Pol der Function P_m.

Andererseits ist $d^n(Cz^n)/dz^n = n!\,C$, somit

$$\iint Y_n P_m\,ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1}\,C = \frac{4\pi a^2}{2n+1}\,Y_{n(m)}.$$

Entwickelung nach zonalen harmonischen Functionen.

135. Das durch die vorstehende Gleichung ausgedrückte Resultat ist eines der wichtigsten, zu der die Theorie der Kugelfunctionen geführt hat, weil es lehrt, wie man eine Reihe von harmonischen Kugelfunctionen zu

Digitized by Google

bilden hat, welche den Wert einer Grösse wiedergiebt, die in den Punkten einer Kugelfläche endliche und sich stetig aneinanderschliessende, sonst aber beliebig vorgeschriebene Werte besitzt.

Ist nämlich F der Wert dieser Grösse in einem Punkt Q der Kugeloberfläche, ds ein Element um Q und P_n der Wert, den eine zonale harmonische Function, deren Pol in P liegt, in Q besitzt, so kann das Flächenintegral $\iint F P_n \, ds$, weil der Wert des P_n von der Lage des Punktes P abhängt, zunächst als Function der Lage dieses Punktes betrachtet werden.

Hier ist also der Pol P fixirt, und die ihm entsprechende zonale harmonische Kugelfunction für jeden Punkt der Kugel genommen. Da aber der Wert einer harmonischen zonalen Function in einem Punkte Q, wenn ihr Pol in P liegt, ebenso gross ist als der einer andern zonalen harmonischen Function derselben Ordnung im Punkte P, wenn ihr Pol sich in Q befindet, so kann man auch umgekehrt die Werte der zonalen harmonischen Function auf einen festen Punkt P beziehen und ihren Pol auf der Kugel wandern lassen, also für jedes Element ds der Kugelfläche eine zonale harmonische Function construiren, deren Pol in Q liegt und die Fds zum Coefficienten hat.

In dieser Weise erhält man ein System übereinander gelagerter Functionen, deren Werte alle auf einen und denselben Punkt der Kugelfläche bezogen sind, und deren Pole sich in allen den Punkten der Kugel befinden, wo F einen von Null verschiedenen Wert hat. Jede dieser Functionen besteht aus einem Factor Fds und einer harmonischen zonalen Flächenfunction von der Ordnung n, ist also ein Vielfaches der letztern, und daraus folgt, dass auch die Summe dieser übereinander gelagerten Functionen ein Vielfaches einer harmonischen Flächenfunction (nicht notwendig einer zonalen) sein muss.

Das Flächenintegral $\iint F P_n \, ds$ als Function der Lage des Punkts P betrachtet, ist also ein Vielfaches einer harmonischen Flächenfunction Y_n.

Wenn demnach F überhaupt nach Kugelfunctionen entwickelbar ist, so muss $\iint F P_n ds$ der in dieser Entwickelung auftretenden harmonischen Flächenfunction der $n$ten Ordnung proportional sein, so dass sie statt dieser substituirt werden kann. Der Proportionalitätsfactor lässt sich leicht mit Hilfe der Sätze unter 3) und 5b) bestimmen.

Es sei die gegebene Entwickelung

$$1) \qquad F = A_0 Y_0 + A_1 Y_1 + A_2 Y_2 + \ldots + A_n Y_n + \ldots,$$

wo F für jeden Punkt der Kugel einen bestimmten Wert hat. Multiplicirt man mit $P_n ds$ und integrirt über die Kugelfläche, so ist nach 3) und 5b)

$$\iint Y_k P_n \, ds = 0 \quad k \gtrless n,$$

$$\iint Y_n P_n \, ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} Y_n,$$

Digitized by Google

also

$$\iint FP_n\,ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} A_n Y_n,$$

und damit wird

$$2)\quad F = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{\iint FP_0\,ds + 3\iint FP_1\,ds + \ldots (2n+1)\iint FP_n\,ds + \ldots\right\}.$$

Lässt sich also eine Function F überhaupt nach Kugelfunctionen entwickeln, so ist die unter 2) gegebene Entwickelung die einzig mögliche.

Conjugirte harmonische Functionen.

136. Wenn zwei harmonische Functionen verschiedenen Ordnungen angehören, so ist, wie wir gesehen haben, das Flächenintegral ihres Products über eine Kugelfläche gleich Null. Haben die beiden Functionen dieselbe Ordnungszahl, so ist jenes Integral im allgemeinen von Null verschieden, und es hat den auf der rechten Seite der Gleichung 4) in Art. 134a angegebenen Wert.

Die beiden Functionen können aber in einem derartigen Verhältnis zu einander stehen, dass jedes Glied des Ausdrucks auf der rechten Seite der citirten Gleichung für sich verschwindet, dann hat das Flächenintegral den Wert Null auch für gleiche Ordnungszahlen. Die beiden harmonischen Functionen sind in diesem Falle einander *Conjugirt*.

Aus der Gleichung 5b) in Art. 134b folgt, dass eine harmonische Flächenfunction zu einer zonalen harmonischen Function nur dann conjugirt sein kann, wenn ihr Wert im Pole der zonalen Function gleich Null ist.

Im allgemeinen hat eine harmonische Function der $n$ten Ordnung abgesehen von einen constanten Factor $2n$ willkürliche Constanten, durch deren geeignete Bestimmung man sie anderen harmonischen Functionen derselben Ordnung conjugirt machen kann. Lassen wir sie nur einer Function conjugirt sein, so haben ihre $2n$ Constanten auch nur einer Bedingung zu genügen.

Soll weiter eine dritte harmonische Function zweien andern Functionen derselben Ordnung conjugirt werden, so haben ihre $2n$ Constanten zwei Bedingungen zu befriedigen.

Fahren wir so fort immer neue Kugelfunctionen einer gegebenen conjugirt zu machen, so werden die $2n$ Constanten der $(2n+1)$ten harmonischen Function $2n$ Bedingungen zu erfüllen haben. Die Function wird demgemäss gar keine willkürlichen Constanten mehr enthalten, sondern vollständig bestimmt sein.

Nehmen wir nun an, dass in einem gegebenen System von $2n+1$ harmonischen Functionen $Y_n^0, Y_n^1 \ldots, Y_n^s, \ldots$ jede allen andern conjugirt sein soll, so enthält die Reihe

$$A_0 Y_n^0 + A_1 Y_n^1 + \ldots + A_s Y_n^s + \ldots + A_{2n} Y_n^{2n}$$

Digitized by Google

$2n+1$ Constanten, und da jede harmonische Function AY_n ebenfalls $2n+1$ Constanten hat, so können wir

$$1) \qquad AY_n = A_0 Y_n^0 + A_1 Y_n^1 + \ldots + A_\sigma Y_n^\sigma + \ldots + A_{2n} Y_n^{2n}$$

setzen. Die Constanten $A_0, A_1, \ldots A_\sigma, \ldots A_{2n}$ lassen sich stets eindeutig so bestimmen, dass die Gleichung identisch befriedigt wird. Multipliciren wir nämlich mit $Y_n^\sigma ds$ und integriren über die ganze Kugel, so fallen alle Glieder $A_\tau \iint Y_n^\tau Y_n^\sigma ds$, wo $\sigma \gtrless \tau$ ist, fort, und es bleibt

$$2) \qquad A\iint Y_n Y_n^\sigma ds = A_\sigma \iint (Y_n^\sigma)^2 ds,$$

woraus sich der Wert des A_σ bestimmt.

Ist also ein System von $2n+1$ conjugirten harmonischen Functionen gegeben, so lässt sich jede andere harmonische Function derselben Ordnung durch dieses eindeutig ausdrücken. Gleichzeitig ersieht man, dass keine andere Function mehr den Functionen des gegebenen Systems conjugirt sein kann, denn da jede andere Function AY_n derselben Ordnung sich durch

$$AY_n = A_0 Y_n^0 + \ldots + A_\sigma Y_n^\sigma + \ldots.$$

ausdrücken lassen muss, und

$$A_\sigma \iint (Y^\sigma)^2 ds = A \iint Y_n Y_n^\sigma ds$$

ist, so kann $\iint Y_n Y_n^\sigma ds$ nicht, wie es nötig wäre, verschwinden, wenn nicht A_σ verschwindet, das heisst, wenn nicht Y_n schon unter den $2n+1$ conjugirten Functionen sich befindet.

Symmetrisches System harmonischer Functionen.

137. Ein System von $2n+1$ harmonischen zu einander conjugirten Functionen der $n$ten Ordnung enthält $2n(2n+1)$ Constanten, die mit einander durch $n(2n+1)$ Bedingungen verbunden sind. Ein solches System hat also noch $n(2n+1)$ willkürliche Constanten und kann deshalb noch mannigfachen Bedingungen unterworfen werden, wenn man es zur Darstellung anderer harmonischer Functionen derselben Ordnung verwenden will.

Wählt man, wie es Thomson und Tait tun, Systeme harmonischer Functionen so, dass von den n Polen jeder Function j in dem Pole der xAxe, k in dem der yAxe und $l = n - j - k$ in dem Pol der zAxe zusammen fallen, so kann man durch die $n+1$ Verteilungen der Pole, für welche $l = 0$, und durch die n Verteilungen, für welche $l = 1$ gegeben ist, alle andern ausdrücken. Dieses System ist aber nicht das allgemein acceptirte, viel-

Digitized by Google

mehr haben alle Mathematiker (auch Thomson und Tait) ein System harmonischer Functionen gewählt, wo in jeder $n-\sigma$ Pole in einem Punkt zusammenfallen, den wir als *Positiven Pol* der Kugel bezeichnen, und die übrigen σ Pole in gleichen Abständen auf dem zum positiven Pol der Kugel gehörigen Aequator verteilt sind, und zwar auf dem ganzen Aequator, wenn σ eine ungerade, auf einer Hälfte des Aequators, wenn σ eine gerade Zahl angiebt. Das ist das *Symmetrische System* harmonischer Functionen.

Wir haben für diesen Fall $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n-\sigma} = \cos\vartheta$, und $\mu_{n-\sigma+1}, \mu_{n-\sigma+2} \ldots \mu_n$ von der Form $\sin\vartheta \cos(\varphi - \beta)$, wenn wir unter β das Azimut eines der auf dem Aequator verteilten Pole verstehen.

Ferner ist in diesem Falle λ_{pq} gleich 1, wenn p, q beide kleiner als $n-\sigma$ sind, gleich 0, wenn einer dieser Indices kleiner, der andere grösser als $n-\sigma$ ist, und gleich $\cos(\pi r/\sigma)$ wo r eine ganze unterhalb σ liegende Zahl angiebt, wenn p, q beide grösser als $n-\sigma$ sind.

Zonale Functionen.

138. Fallen alle Pole in den positiven Pol der Kugel, so wird $\sigma = 0$ und die harmonische Function geht in eine zonale Function P_n über.

Die zonalen harmonischen Functionen sind von ganz besonderer Bedeutung, und ich werde sie in der Folge unter den andern harmonischen Functionen durch die Bezeichnung P_n *) charakterisiren.

Die Entwickelung für P_n können wir entweder der in Art. 132 gegebenen allgemeinen Entwickelung für harmonische Functionen entnehmen oder aus der Beziehung

$$1a) \qquad P_n = (-1)^n \frac{r^{n+1}}{n!} \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{1}{r}\right)$$

ableiten, wo die z Axe in die n fache Axe der zonalen Function verlegt ist. Führt man die Differentiation aus, so ergiebt sich**)

$$P_n = \frac{1.3.5.7 \ldots (2n-1)}{1.2.3 \ldots n}\left[\mu^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-4} - \ldots\right]$$

$$1b) \qquad = \sum_p \left[(-1)^p \frac{(2n-2p)!}{2^n p!\,(n-p)!\,(n-2p)!}\mu^{n-2p}\right].$$

p durchläuft alle ganzen Zahlen, die zwischen 0 und $\frac{1}{2}n$ liegen, die 0 mit einbegriffen.

*) Heine hat die Bezeichnung $P^{(n)}$ gewählt.

**) Vergl. Thomson und Tait, *Theoretische Physik* Teil II. Seite 330 der ersten Ausgabe.

Digitized by Google

Für einige Untersuchungen ist es von Vorteil, P_n nicht blos durch $\mu = \cos\vartheta$, sondern auch durch $\nu = \sin\vartheta$ auszudrücken. Man erhält so

$$P_n = \mu^n - \frac{n(n-1)}{2.2}\mu^{n-2}\nu^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.2.4.4}\mu^{n-4}\nu^4 - \ldots.$$

1c)
$$= \sum_p \left[(-1)^p \frac{n!}{2^{2p}(p!)^2(n-2p)!} \mu^{n-2p}\nu^{2p} \right].$$

Die Grösse P_n ist, wie in mathematischen Werken über Kugelfunctionen nachgewiesen wird, der Coefficient von h^n in der Entwickelung von $(1 - 2\mu h + h^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach Potenzen von h.

Nach früheren Sätzen ist

2)
$$\iint P_m P_n \, ds = 0, \quad m \gtrless n$$

und

$$\iint P_n^2 \, ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1} P_{n(n)}.$$

Im Pol von P_n ist aber $\mu = 1$, $\nu = 0$, also nach 1c) $P_{n(n)} = 1$ und

3)
$$\iint P_n^2 \, ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1}.$$

Andererseits ist $ds = a^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi = -a^2 \, d\mu \, d\varphi$, somit

$$\iint P_n^2 \, ds = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} a^2 P_n^2 \, d\mu \, d\varphi = 2\pi a^2 \int_{-1}^{+1} P_n^2 \, d\mu.$$

Aus der Gleichung 3) folgt dann

4)
$$\int_{-1}^{+1} P_n^2 \, d\mu = \frac{2}{2n+1}.$$

139. Die zonale harmonische Function P_n lediglich als Function des μ ohne Rücksicht auf ihre Beziehung zur Kugelfläche betrachtet, kann auch als *Legendrescher Coefficient* bezeichnet werden.

Fasst man aber die Function gerade in ihrer Beziehung zur Kugelfläche auf, sieht sie also als Function der sphärischen Coordinaten ihres Pols und des Punktes, für welchen sie gelten soll, an, so nennt man P_n den *Laplaceschen Coefficienten*, oder mit Thomson und Tait die *Zweiaxige harmonische Function*.

Fixirt man die Punkte der Kugelfläche durch die Winkel ϑ und φ, und bezeichnet die Coordinaten des Poles der zonalen harmonischen Function

Digitized by Google

durch ϑ' und φ', so ist der Wert von P_n in einem Punkte der Kugel, welcher die Coordinaten ϑ, φ hat, eine Function der vier Winkel $\vartheta, \varphi, \vartheta', \varphi'$. Da aber P_n eine Function von μ, dem Cosinus des Bogens zwischen (ϑ, φ) und (ϑ', φ') ist, so ändert es seinen Wert nicht, wenn man ϑ mit ϑ', φ mit φ' vertauscht, ein Satz, von dem ich schon Art. 135 Gebrauch gemacht habe.

Tesserale und Sectorielle Functionen.

140a. Die zonale harmonische Function gehört zu dem System harmonischer Functionen, das ich am Ende des Art. 137 charakterisirt habe, wo also $n - \sigma$ Pole zum positiven Pol der Kugel zusammenfallen, und σ Pole gleichmässig auf dem ganzen Aequator oder auf seiner Hälfte, je nachdem σ ungerade oder gerade ist, verteilt sind.

Um noch die andern harmonischen Functionen dieses Systems zu eruiren, haben wir Differentiationen nach σ Axen auszuführen, die alle in der Ebene des Aequators liegen und miteinander Winkel von der Grösse π/σ bilden.

Ich verlege die Ebene der Coordinaten x, y in den Aequator der Kugel, richte die z Axe so, dass ihr Pol in den positiven Pol der Kugel fällt und führe mit Thomson und Tait*) imaginäre Coordinaten ein, indem ich setze

a) $$\xi = x + iy, \quad \eta = x - iy.$$

Richten wir die yAxe nach einer der Functionsaxen, so wird zufolge der in Art. 129b für die Differentiation nach Axen gegebenen Definition

b'$_1$) $$\frac{\partial^\sigma}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_\sigma} = i\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial \xi^\sigma} - \frac{\partial^\sigma}{\partial \eta^\sigma}\right) = D^{(\sigma)}s.$$

Lassen wir aber die y Axe in die Mitte zwischen zwei Axen fallen, so erhalten wir

c'$_1$) $$\frac{\partial^\sigma}{\partial h_1 \partial h_2 \dots \partial h_\sigma} = \left(\frac{\partial^\sigma}{\partial \xi^\sigma} + \frac{\partial^\sigma}{\partial \eta^\sigma}\right) = D^{(\sigma)}c.$$

Beide Operationen, sowohl $D^{(\sigma)}s$ als $D^{(\sigma)}c$, führen zu reellen Resultaten und sind nur Abkürzungen für die Operationen

b'$_2$) $$2^{\sigma-1} D^{(\sigma)}s = \sigma \frac{\partial^{\sigma-1}}{\partial x^{\sigma-1}} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)}{1.2.3} \frac{\partial^{\sigma-3}}{\partial x^{\sigma-3}} \frac{\partial^3}{\partial y^3} + \dots$$

c'$_2$) $$2^{\sigma-1} D^{(\sigma)}c = \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} - \frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2} \frac{\partial^{\sigma-2}}{\partial x^{\sigma-2}} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \dots\dots$$

*) *Theoretische Physik*, Teil I. S. 163.

Digitized by Google

Entsprechend setze ich noch

d') $$\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(D^{(\sigma)}s\right) = D^{(\sigma)}_n s,$$

e') $$\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(D^{(\sigma)}c\right) = D^{(\sigma)}_n c.$$

$D^{(\sigma)}_n s$ und $D^{(\sigma)}_n c$ bezeichnen Operationen, bei denen Differentiationen nach n Axen auszuführen sind, von denen $n-\sigma$ mit der z Axe zusammenfallen und σ in der Ebene der xy sich befinden und miteinander Winkel gleich π/σ bilden. Die genannten Symbole stellen also die ganze Operation, die wir vorzunehmen haben, dar, und zwar $D^{(\sigma)}_n s$, wenn die y Axe mit einer der σ Axen der Function zusammenfällt, $D^{(\sigma)}_n c$, wenn die y Axe mitten zwischen zwei der σ Axen zu liegen kommt.

Ich definire jetzt *Tesserale harmonische Functionen* von der Ordnung n und dem Typus σ durch die Gleichungen

1') $$Y^{(\sigma)}_n s = (-1)^n \frac{1}{n!} r^{n+1} D^{(\sigma)}_n s\left(\frac{1}{r}\right),$$

2') $$Y^{(\sigma)}_n c = (-1)^n \frac{1}{n!} r^{n+1} D^{(\sigma)}_n c\left(\frac{1}{r}\right).$$

Wir haben darnach zwei Arten solcher Functionen. Setzen wir aber

f) $$\mu = \cos\vartheta,\ \nu = \sin\vartheta,\ \rho^2 = x^2 + y^2,$$

g) $$z = \mu r,\ \rho = \nu r,\ x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,$$

so wird

b_1) $$D^{(\sigma)}s\left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^\sigma \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\sigma!}\, i\,(\eta^\sigma - \xi^\sigma)\,\frac{1}{r^{2\sigma+1}},$$

c_1) $$D^{(\sigma)}c\left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^\sigma \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\sigma!}\quad (\xi^\sigma + \eta^\sigma)\,\frac{1}{r^{2\sigma+1}},$$

also weil

$$\frac{i}{2}(\eta^\sigma - \xi^\sigma) = \rho^\sigma \sin\sigma\varphi,\quad \frac{1}{2}(\xi^\sigma + \eta^\sigma) = \rho^\sigma\cos\sigma\varphi \text{ ist},$$

b_2) $$D^{(\sigma)}s\left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^\sigma \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\sigma!}\, 2\sin\sigma\varphi\,\frac{\rho^\sigma}{r^{2\sigma+1}},$$

c_2) $$D^{(\sigma)}c\left(\frac{1}{r}\right) = (-1)^\sigma \frac{(2\sigma)!}{2^{2\sigma}\sigma!}\, 2\cos\sigma\varphi\,\frac{\rho^\sigma}{r^{2\sigma+1}}.$$

Digitized by Google

Wir haben diese Ausdrücke noch nach z zu differenziren. Dabei ist die einzige Variabele $1/r^{2\sigma+1}$, und man erhält nach bekannten Regeln

$$h_1) \quad \frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(\frac{1}{r^{2\sigma+1}}\right) = (-1)^{n-\sigma}\frac{(2n)!\,2^\sigma\sigma!}{2^n n!\,(2\sigma)!}\frac{1}{r^{2n+1}}\left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)}z^{n-\sigma-2}r^2 + \ldots\right],$$

oder auch, weil nach den Gleichungen unter g) $r^2 = z^2 + \rho^2$ ist

$$h_2) \quad \frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(\frac{1}{r^{2\sigma+1}}\right) = (-1)^{n-\sigma}\frac{(n+\sigma)!}{(2\sigma)!}\frac{1}{r^{2n+1}}\left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)}z^{n-\sigma-2}\rho^2 + \ldots\right].$$

Beachtet man die Beziehungen $z = \mu r$, $\rho = \nu r$ und setzt

$$3) \quad \Theta_n^{(\sigma)} = \nu^\sigma\left[\mu^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{2(2n-1)}\mu^{n-\sigma-2} + \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\mu^{n-\sigma-4} - \ldots\right],$$

$$4) \quad \vartheta_n^{(\sigma)} = \nu^\sigma\left[\mu^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)}\mu^{n-\sigma-2}\nu^2 + \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)(n-\sigma-2)(n-\sigma-3)}{4.8(\sigma+1)(\sigma+2)}\mu^{n-\sigma-4}\nu^4 - \ldots\right],$$

so wird also

$$h_3) \quad \frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(\frac{1}{r^{2\sigma+1}}\right) = (-1)^{n-\sigma}\frac{(2n)!\,2^\sigma\sigma!\,\rho^{-\sigma}}{2^n n!\,(2\sigma)!\,r^{n+1}}\Theta_n^{(\sigma)}$$

$$h_4) \quad = (-1)^{n-\sigma}\frac{(n+\sigma)!\,\rho^{-\sigma}}{(2\sigma)!\,r^{n+1}}\vartheta_n^{(\sigma)}$$

und

$$5) \quad \Theta_n^{(\sigma)} = \frac{2^{n-\sigma}n!\,(n+\sigma)!}{(2n)!\,\sigma!}\vartheta_n^{(\sigma)},$$

so dass sich die Functionen Θ und ϑ nur durch eine multiplicirende Constante von einander unterscheiden.

Nach den unter 1') und 2') gegebenen Definitionen haben wir also für die beiden tesseralen harmonischen Functionen von der Ordnung n und dem Typus σ

$$1a) \quad Y_{n\,s}^{(\sigma)} = \frac{(2n)!}{2^{n+\sigma}n!\,n!}\Theta_n^{(\sigma)}2\sin\sigma\varphi$$

$$1b) \quad = \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma}n!\,\sigma!}\vartheta_n^{(\sigma)}2\sin\sigma\varphi$$

Digitized by Google

2a) $$Y_{n}^{(\sigma)}c = \frac{(2n)!}{2^{n+\sigma}\,n!\,n!}\,\theta_{n}^{(\sigma)}\,2\cos\sigma\varphi$$

2b) $$= \frac{(n+\sigma)!}{2^{2\sigma}\,n!\,\sigma!}\,\vartheta_{n}^{(\sigma)}\,2\cos\sigma\varphi.$$

Für $\sigma = 0$ ist $\sin\sigma\varphi = 0$, $\cos\sigma\varphi = 1$, somit

$$Y_{n}^{(0)}c = \frac{(2n)!}{2^{n}n!\,n!}\,2\theta_{n}^{(0)}.$$

Es ist aber

$$\theta_{n}^{(0)} = \mu^{n} - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\,\mu^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\,.\,4\,.\,(2n-1)(2n-3)}\,\mu^{n-4} - \ldots.$$

$$= \frac{2^{n}n!\,n!}{(2n)!}\,P_{n},$$

somit

1_1) $$Y_{n}^{(0)}s = 0,$$

2_1) $$Y_{n}^{(0)}c = 2P_{n}.$$

Für jeden andern Wert der σ von 1 bis n, die Grenzen mit einbegriffen, existiren zwei tesserale harmonische Functionen. Rechnet man also die zonale Function P_n als speciellen Fall einer tesseralen hinzu, so giebt es, wie es sein muss, $2n+1$ tesserale harmonische Functionen von der Ordnung n, die sich von einander durch ihre typische Zahl σ unterscheiden, welche festsetzt, wie viele Pole auf dem ganzen oder auf dem halben Aequator gleichmässig verteilt sein sollen.

140 b. Die Entwickelungen für die tesseralen harmonischen Functionen sind aus der allgemeinen Definition der harmonischen Functionen als Differentialquotienten des reciproken Radiusvector nach einer gewissen Anzahl von Axen dividirt durch $n!$ geflossen. Sie bestehen aus vier Componenten, einem Sinus oder Cosinus von $\sigma\varphi$, einer Potenz σ von ν, einer Function von μ oder von μ und ν und endlich einem numerischen Factor.

Für das Product der zweiten und dritten Componente hat man drei verschiedene Symbole eingeführt, die sich von einander nur durch Zahlen-Factoren unterscheiden.

Ich habe in diesem Buche für jenes Product von ν^{σ} in die nach absteigenden Potenzen von μ (beginnend mit $\mu^{n-\sigma}$) verlaufende Reihe dasselbe Zeichen $\theta_{n}^{(\sigma)}$ verwendet, welches Thomson und Tait in ihrem oft citirten Werke benutzt haben.

Heine hat in seinem Handbuch der Kugelfunctionen (§ 47) eine Function $P_{\sigma}^{(n)}$ eingeführt, die er „eine zugeordnete Function der ersten Art“ nennt (von Todhunter in seinem am Eingang dieses Capitels angeführten

Digitized by Google

Buche mit *Associated Function of the First Kind* übersetzt), und die zu unserm $\Theta_n^{(\sigma)}$ in der Beziehung

α) $$\Theta_n^{(\sigma)} = (-1)^{\frac{\sigma}{2}} P_\sigma^{(n)}$$

steht.

Die Reihe der absteigenden Potenzen von μ selbst bezeichnet Heine durch $\mathfrak{P}_\sigma^{(n)}$ und Todhunter durch $\omega(\sigma, n)$.

Man kann übrigens diese Reihe auch durch die folgenden Formeln ausdrücken.*)

β) $$\mathfrak{P}_\sigma^{(n)} = \omega(\sigma, n) = \frac{(n-\sigma)!}{(2n)!} \frac{\partial^{n+\sigma}}{\partial \mu^{n+\sigma}} (\mu^2 - 1)^n$$

oder da

$$\frac{1}{2^n n!} \frac{\partial^n}{\partial \mu^n} (\mu^2 - 1)^n = P_n$$

ist, auch durch

γ) $$\mathfrak{P}_\sigma^{(n)} = \omega(\sigma, n) = \frac{2^n (n-\sigma)!\, n!}{(2n)!} \frac{\partial^\sigma}{\partial \mu^\sigma} P_n.$$

Der letztere Ausdruck, in welchem $\mathfrak{P}_\sigma^{(n)}$ durch Differentiation der zonalen harmonischen Function P_n erhalten wird, scheint Ferrers zur Einführung seines Zeichens $T_n^{(\sigma)}$ bewogen zu haben, welches durch

δ) $$T_n^{(\sigma)} = \nu^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial \mu^\sigma} P_n = \frac{(2n)!}{2^n (n-\sigma)!\, n!} \Theta_n^{(\sigma)}$$

definirt ist.

Endlich habe ich noch das Symbol $\mathfrak{P}_n^{(\sigma)}$ benutzt, um dasselbe Product durch eine nach absteigenden Potenzen von μ und aufsteigenden Potenzen von ν verlaufende Reihe auszudrücken.

140 c. Die Namen „zonal“ und „tesseral“, die wir den Kugelfunctionen des eben behandelten Systems beigelegt haben, gewinnen eine geometrische Bedeutung, wenn wir mit Thomson und Tait die harmonischen Functionen nach den sphärischen Curven klassificiren, auf denen sie Null werden.

Die zonale harmonische Function ist, wie wir gesehen haben, eine Function des n Grades des Cosinus der Poldistanz des Punktes, für den sie gelten soll, als solche muss sie also für n Werte dieses Cosinus, die alle zwischen $+1$ und -1 liegen,**) verschwinden. Die Curven, in deren Punkten die zonale Function auf der Kugel gleich Null ist, sind also Breitenkreise, deren Pol mit dem Pol der Function zusammenfällt. Zwei benachbarte

*) Heine, *Kugelfunctionen*, erste Ausg. 1861 pag. 117, zweite Ausg. 1878 pag. 152 ff.

**) Heine l. c. § 7.

Digitized by Google

Breitenkreise schliessen eine Zone ein, in der die Function nur positive oder nur negative von Null verschiedene Werte hat; innerhalb des dem Pol nächsten Breitenkreises sind nur positive Werte vertreten. Die Werte der Function sind also auf Zonen verteilt, in denen sie abwechselnd positive und negative Beträge besitzen.

Die zonale Function eignet sich deshalb zur Darstellung von Functionen, die in gewissen Breitenkreisen einer Kugel oder auf gewissen konischen Flächen im Raume verschwinden.

Die andern harmonischen Functionen des behandelten Systems treten zu Paaren auf, in denen die eine Function den $\cos\sigma\varphi$ die andere den $\sin\sigma\varphi$ zum Factor hat. Diese Functionen verschwinden also auf σ Meridianen, und, da sie nach μ vom Grade $n-\sigma$ sind, auch auf $n-\sigma$ Breitenkreisen. Die ganze Kugelfläche zerfällt für sie demgemäss in $2\sigma(n-\sigma-1)$ sphärische Vierseite und 4σ an den Polen gelegene sphärische Dreiecke. Innerhalb dieser $2\sigma(n-\sigma+1)$ Felder haben sie von Null verschiedene Werte.

Wir haben sie deshalb als tesserale (oder quadrilaterale) Functionen bezeichnet, weil sie namentlich bei Untersuchungen, die sich auf zwischen Parallel- und Meridiankreisen befindliche Vierseite (im Grenzfall Dreiseite) beziehen, ihre Anwendung finden müssen.

Die tesseralen Functionen, für welche $\sigma = n$ ist, im ganzen also zwei zu einem Paare vereinigt, verschwinden auf n Meridianen, also auf gar keinen Breitenkreisen. Wir scheiden deshalb dieses letzte Paar von den andern tesseralen aus, indem wir den in ihm vertretenen Functionen die Bezeichnung *Sectorielle Flächenfunctionen* beilegen, weil die von Null verschiedenen Werte auf Sectoren, welche von Meridianen begrenzt werden, verteilt sind.

141. Wir haben nun noch, ähnlich wie es für zonale harmonische Functionen schon geschehen ist, auch für tesserale Functionen das Flächenintegral ihres Quadrats zu bestimmen.

Dazu verfahren wir nach ganz derselben Methode wie in Art. 134, die ja auch durch den allgemeinen Satz über das Flächenintegral zweier harmonischer Functionen vorgeschrieben ist.

Wir verwandeln also die Flächenfunction $Y_n^{(\sigma)}$ durch Multiplication mit der positiven Potenz r^n in eine harmonische Raumfunction, differenziren sie dann nach ihren n Axen, setzen $x = y = z = 0$ und multipliciren das Schlussresultat mit $4\pi a^2/n!\,(2n+1)$.

Nach der adoptirten Bezeichnungsweise ist also

$$\int\int (Y_n^{(\sigma)})^2\, ds = \frac{4\pi a^2}{n!\,(2n+1)}\, D_n^{(\sigma)}\,(r^n\, Y_n^{(\sigma)}).$$

Es ist aber nach Art. 140a; 1a), 4), a), g) als Function von z, ξ, η

$$r^n Y_n^{(\sigma)} = \frac{(n+\sigma)!}{2^\sigma n!\,\sigma!}\, i\,(\eta^\sigma - \xi^\sigma)\left[z^{n-\sigma} - \frac{(n-\sigma)(n-\sigma-1)}{4(\sigma+1)}\, z^{n-\sigma-2}\,\xi\eta + \ldots\right],$$

Digitized by Google

und deshalb müssen nach der $n-\sigma$ fachen Differentiation nach z alle Glieder bis auf das erste fortfallen. Durch die Differentiation dieses ersten wird dann $(n-\sigma)!$ als Factor eingeführt. Die weitere Differentiation nach ξ und η erstreckt sich auch nur auf das erste Glied und führt den Factor $\sigma!$ ein so dass man schliesslich erhält

$$6) \qquad \iint \left(Y_s^{(\sigma)}_n\right)^2 ds = \frac{8\pi a^2}{(2n+1)} \frac{(n+\sigma)!\,(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n!\, n!}$$
$$= [n, \sigma].$$

Diese Gleichung gilt für $\sigma = 1, 2, \ldots n$, für $\sigma = 0$ aber giebt es keine Function Ys. Ganz dasselbe Resultat erhält man auch für $Y_{n}^{(\sigma)}c$, nämlich

$$7) \qquad \iint \left(Y_n^{(\sigma)}c\right)^2 ds = \frac{8\pi a^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!\,(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n!\, n!}.$$

Diese Gleichung gilt aber auch für $\sigma = 0$ und ergiebt

$$7_1) \qquad \iint \left(Y_n^{(\sigma)}c\right)^2 ds = \iint P_n^2 ds = \frac{4\pi a^2}{2n+1},$$

wie wir schon im Art. 138 gefunden haben.

Entwickelung nach tesseralen harmonischen Functionen.

142a. Die eben gegebenen Entwickelungen gestatten nach der in Art. 136 auseinandergesetzten Methode, die Constanten in der Darstellung einer beliebigen Function der Lage eines Punktes auf einer Kugel vom Radius a durch eine nach tesseralen Functionen fortschreitende Reihe zu bestimmen.

Ist nämlich F diese willkürliche Function und

$$1) \qquad F = A_0 Y_0^{(\sigma)} + A_1 Y_1^{(\sigma)} + \ldots + A_n Y_n^{(\sigma)} + \ldots,$$

so haben wir

$$A_n \iint (Y_n^{(\sigma)})^2 = \iint F Y_n^{(\sigma)} ds,$$

also wegen der Gleichungen unter 6) und 7) des vorigen Artikels

$$2) \qquad A_n = \frac{1}{[n, \sigma]} \iint F Y_n^{(\sigma)} ds,$$

wo

$$3) \qquad [n, \sigma] = \frac{8\pi a^2}{2n+1} \frac{(n+\sigma)!\,(n-\sigma)!}{2^{2\sigma} n!\, n!}$$

ist.

Digitized by Google

142b. Ist Ψ eine Function, welche der Laplaceschen Gleichung genügt und in einem Abstande a von einem Punkt 0, in den wir den Coordinatenursprung verlegen, keine singulären Punkte hat, so kann man Ψ, unter Benutzung der bisherigen Resultate, immer in eine Reihe harmonischer Raumfunctionen positiven Grades, deren Kugelmittelpunkt sich in 0 befindet, entwickeln.

Man gelangt zu einer solchen Entwickelung nach harmonischen Raumfunctionen zunächst in der folgenden Weise.

Man entwickelt das Potential Ψ auf der Fläche einer mit dem Radius r um 0 geschlagenen Kugel nach harmonischen Flächenfunctionen und multiplicirt jede der Flächenfunctionen mit einer Potenz von r/a, welche gleich der Ordnungszahl der betreffenden harmonischen Flächenfunction ist. Dadurch erhält man eine Reihe, die nach harmonischen Raumfunctionen positiven Grades fortschreitet und als Darstellung für das Potential Ψ im ganzen gegebenen Gebiete angesehen werden kann.

Bei der Bestimmung der Constanten dieser Entwickelung hat man, dem obigen zufolge, Integrationen über die Kugelfläche auszuführen. Entwickelt man aber das Potential nach tesseralen Functionen, so kann man die Operation des Integrirens durch die geeignetere des Differenzirens nach den Axen der tesseralen Functionen ersetzen.

Führt man nämlich an der Entwickelung von Ψ nach tesseralen Kugelfunctionen vom Typus $Y_n^{(\sigma)}c$, also in $\Psi = \Sigma A_k^{(\sigma)}c\, Y_k^{(\sigma)}c\, r^k$, die für tesserale Functionen charakteristische Operation

$$\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial \xi^\sigma}+\frac{\partial^\sigma}{\partial \eta^\sigma}\right)$$

aus und setzt nachher $x = y = z = 0$, so fallen alle Glieder fort bis auf das, welches $A_n^{(\sigma)}c$ als Factor enthält, und man bekommt

$$\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial \xi^\sigma}+\frac{\partial^\sigma}{\partial \eta^\sigma}\right)\Psi = A_n^{(\sigma)}c\,\frac{(n+\sigma)!\,(n-\sigma)!}{2^{\sigma+1}\,n!}$$

oder expliciter

$$\frac{\partial^{n-\sigma}}{\partial z^{n-\sigma}}\left(\frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma}-\frac{\sigma(\sigma-1)}{1.2}\frac{\partial^{\sigma-2}}{\partial x^{\sigma-2}}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\ldots\right)\Psi = A_n^{(\sigma)}c\,\frac{(n+\sigma)!\,(n-\sigma)!}{2^{2\sigma}\,n!},$$

woraus dann die Constante $A_n^{(\sigma)}c$ zu berechnen ist, wenn die angedeuteten Differentiationen für Ψ ausgeführt und auf den Mittelpunkt 0 bezogen sind.

Digitized by Google

Graphische Darstellung der Curven gleicher Werte von harmonischen Functionen.

143. Man kann, wie sich aus den Untersuchungen des Art. 135a ergiebt, jede harmonische Function $n$ter Ordnung durch ein System zonaler harmonischer Functionen derselben Ordnung darstellen, deren Pole auf der Kugelfläche verteilt sind. Die Vereinfachung eines solchen Systems scheint aber nicht leicht zu sein. Indessen habe ich, um dem Leser eine geometrische Anschauung von dem Verlauf harmonischer äquipotentieller Flächen zu verschaffen, die zonalen Functionen der dritten und vierten Ordnung berechnet, und dann nach dem in Art. 123 für die graphische Summation auseinandergesetzten Verfahren die auf der Kugelfläche liegenden äquipotentiellen Linien harmonischer Functionen, welche durch algebraische Addition der beiden genannten zonalen Functionen entstehen, in orthogonaler Projection gezeichnet. Die Figuren befinden sich auf den Tafeln VII. bis X. am Ende dieses Bandes.

Die Tafel VII. repräsentirt die Curven gleicher Werte der Differenz zweier zonaler Functionen der dritten Ordnung, deren Axen 120^0 gegen einander in der Ebene der Zeichnung geneigt sind. Diese Differenz ist eine tesserale harmonische Function von der dritten Ordnung und dem ersten Typus ($\sigma = 1$) mit einer zur Ebene der Zeichnung senkrechten Axe.

In der Tafel VIII. sind die Curven gleicher Werte der Summe zweier zonaler Functionen der dritten Ordnung dargestellt, deren Axen gegeneinander um 90^0 geneigt sind. Die resultirende harmonische Function ist von der dritten Ordnung, gehört aber nicht dem symmetrischen System an. Von den Knotenlinien — den sphärischen Curven, in deren Punkten die harmonische Function verschwindet — ist eine ein grösster Kreis, die beiden andern, welche von ihr geschnitten werden, sind keine Kreise.

Tafel IX. enthält die Zeichnung für die Differenz zweier zonaler Functionen der vierten Ordnung, deren Axen senkrecht zu einander sind. Die harmonische Function ist hier eine tesserale von der vierten Ordnung und dem zweiten Typus ($\sigma = 2$).

Endlich repräsentirt die Tafel X. die Curven gleicher Werte der Summe derselben zwei zonalen Functionen. Sie soll dazu dienen, dem Leser vom Verlauf einer etwas allgemeineren Kugelfunction vierter Ordnung eine Vorstellung zu verschaffen. Die Knotenlinie besteht hier aus 6 Ovalen, die sich in der sechsfach zusammenhängenden Fläche nirgend schneiden. Innerhalb dieser Ovale ist die harmonische Function positiv, ausserhalb derselben negativ.

Ausser den eben angeführten Zeichnungen für die harmonischen Flächenfunctionen habe ich noch eine auf Tafel VI. befindliche Zeichnung für eine harmonische Raumfunction angefertigt.

Die Kugel ist so electrisirt, dass das Potential auf ihr wie eine harmonische Flächenfunction der ersten Ordnung variirt, und die Zeichnung stellt einen

Digitized by Google

Schnitt der äquipotentiellen Flächen mit einer Ebene dar, die durch den Mittelpunkt der Kugel geht und die Axe der Kugelfunction enthält.

Man sieht, dass die äquipotentiellen Flächen innerhalb der Kugel durch Ebenen gebildet werden, die senkrecht zur Axe einander in gleichen Abständen folgen. Die Kraftlinien sind also hier gerade parallel der Axe verlaufende Linien. Ihre Abstände von der Axe entsprechen den Quadratwurzeln der natürlichen Zahlenreihe. Ausserhalb der Kugel sind Flächen und Linien gekrümmt. Wäre der Magnetismus der Erde nach der einfachsten harmonischen Function verteilt, so würde diese Zeichnung ihre äquipotentiellen Flächen und ihre Kraftlinien in einem bestimmten grössten Kreise darstellen.

Anwendungen der Kugelfunctionen.

144a. *Eine Kugel unter dem Einfluss eines electrischen Systems.* Wir können nunmehr die Verteilung der Electricität auf einem kugelförmigen Conductor berechnen, wenn er sich unter dem Einfluss electrischer Massen befindet, für die das Potential von vorn herein gegeben ist.

Wir entwickeln zunächst das gegebene Potential Ψ nach harmonischen Raumfunctionen positiven Grades, deren Mittelpunkt sich in dem Mittelpunkt der Kugelfläche befindet, und erhalten so

$$\Psi = B_0 + B_1 Y_1 r + B_2 Y_2 r^2 + \ldots + B_n Y_n r^n$$

für das Potential der electrischen Massen auf einen im Innern der Kugel im Abstande r vom Centrum befindlichen Punkt.

Da nun das gesammte Potential innerhalb der Kugel constant sein muss, so lautet die Entwickelung des Potentials der inducirten Kugeloberfläche

$$V_i = B_0' - B_1 Y_1 r - B_2 Y_2 r^2 - \ldots - B_n Y_n r^n,$$

und demnach ist das Potential ausserhalb der Kugel (s. Art. 131a)

$$V_a = B_0' \frac{a}{r} - B_1 Y_1 \frac{a^3}{r^2} - B_2 Y_2 \frac{a^5}{r^3} - \ldots - B_n Y_n \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}}.$$

Aus der charakteristischen Gleichung erhält man dann

$$4\pi\sigma = B_0' \frac{1}{a} + 3B_1 Y_1 + 5B_2 Y_2 a + \ldots + (2n+1) B_n Y_n a^{n-1}.$$

Darin ist durch die für Ψ gegebene Entwickelung alles bestimmt bis auf den Coefficienten B_0'. Ist aber die Entwickelung von σ nach Kugelfunctionen

$$\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n,$$

Digitized by Google

wo σ_n den Wert $(2n+1)\, B_n\, Y_n a^{n-1}$ hat, so erhält man für die auf der Kugel inducirte Electricitätsmenge

$$e = \int \sigma\, ds = \sum_k \int \sigma_k\, ds.$$

Für $k > 0$ muss aber $\int \sigma_k\, ds$ verschwinden, weil 1 ebenfalls eine harmonische Flächenfunction (nämlich Y_0) ist, es bleibt demnach

$$e = \int \sigma_0\, ds = 4\pi a^2 \sigma_0$$

und da $\sigma_0 = B_0'/4\pi a$ war, so folgt

$$B_0' = \frac{e}{a}.$$

Zur vollständigen Bestimmung der Flächendichte gehört also auch noch die Kenntnis der durch das electrische System in der Kugel inducirten Electricitätsmenge.

Das Potentialniveau der Kugel findet sich zu

$$V = \Psi_0 + \frac{e}{a}.$$

144 b. *Die Greensche Function einer inducirenden Kugel.* Wir nehmen nun an, dass die Kugel sich in der Nähe von Conductoren befindet, die stets in Verbindung mit der Erde stehen, so dass das Potential auf ihnen immer gleich Null ist. Die Kugel inducirt dann in diese Leiter Electricitätsmengen, und es soll unsere Aufgabe sein, das Potential dieser Electricitätsmengen auf einen Punkt zu bestimmen, wenn die Verteilung der Electricität auf der Kugelfläche gegeben ist.

Im Art. 98 haben wir schon einen analogen Fall behandelt, dabei aber die inducirende Electricität uns in einem Punkt concentrirt gedacht. Dort habe ich auch eine Function, die Greensche Function, eingeführt, die ich als das Potential auf einen Punkt $p = (x, y, z)$ der von einer in einem Punkte $p' = (x', y', z')$ befindlichen Electricitätseinheit in andern auf dem Potentialniveau Null befindlichen Körpern inducirten Electricitätsmenge definirt habe.

Ist also diese Function $G_{pp'}$, die in p' concentrirte inducirende Electricitätsmenge gleich A_0 und das Potential der in den andern Körpern inducirten Electricitäten auf einen Punkt $p = (x, y, z)$ gleich Ψ, so haben wir

$$\Psi = A_0\, G_{pp'}.$$

Wir können nun die Bedeutung der Greenschen Function auch auf unsern Fall ausdehnen, wo die Electricitätsmenge A_0 sich nicht in einem Punkt, sondern auf einer Kugel verteilt befindet.

Stellt man nämlich die Flächendichte σ der auf der Kugel befindlichen Electricität durch eine harmonische Reihe dar — eine solche Darstellung ist, wie wir wissen, immer möglich — so kann man die von der Ladung

Digitized by Google

der Kugel ausserhalb derselben hervorgebrachten Wirkungen, durch die Wirkungen singulärer geladener Punkte, die sich sämmtlich im Centrum der Kugel befinden, ersetzt denken.

Jeder in der Entwickelung der Dichte auftretenden Kugelfunction entspricht ein singulärer Punkt, dessen Ordnung sich aus den in Art. 129c angestellten Untersuchungen ableiten lässt.

Haben wir also

$$4\pi a^2\sigma = \Sigma 4\pi a^2\sigma_k = A_0 + 3A_1 Y_1 + 5A_2 Y_2 + \ldots + (2n+1)A_n Y_n + \ldots$$

so ist das Potential, welches von einer dieser Partialdichten, etwa von $4\pi a^2\sigma_n$, herrührt, gleich (Art. 131a).

$$\frac{r^n}{a^{n+1}} A_n Y_n \text{ für innerhalb der Kugel befindliche Punkte,}$$

$$\frac{a^n}{r^{n+1}} A_n Y_n \text{ für ausserhalb derselben gelegene.}$$

Nun ist aber nach den Gleichungen 1a) und 1b) in Art. 129c, d

$$\frac{a^n}{r^{n+1}} A_n Y_n = (-1)^n A_n \frac{a^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial h_1 \partial h_2 \ldots \partial h_n}\left(\frac{1}{r}\right),$$

wo die Differentiationen auf der rechten Seite der Gleichung auf den Mittelpunkt der Kugel zu beziehen sind.

Das durch die electrische Partialverteilung σ_n auf der Kugelfläche in Punkten ausserhalb derselben hervorgerufene Potential ist also ebenso gross, wie das durch einen im Centrum der Kugel liegenden vielfachen Punkt, dessen Axen $h_1, h_2, \ldots h_n$ sind, und dessen Moment die Grösse $A_n a^n$ hat, verursachte.

Die Greensche Function für die Partialverteilung $4\pi a^2\sigma_n$ auf der Kugel fällt also, sowohl was die Verteilung der auf dem System inducirten Electricität als die der Potentialwerte anbetrifft, mit der für diesen vielfachen Punkt geltenden zusammen, und wenn wir das Potential der durch die Partialverteilung $4\pi a^2\sigma_n$ in andern Conductoren, die sich auf dem Potential Null befinden, inducirten Electricität auf einen Punkt x, y, z mit Ψ_n bezeichnen, so haben wir

$$1_1) \qquad \Psi_n = A_n \frac{a^n}{n!} \frac{\hat{o}'^n G}{\partial' h_1 \partial' h_2 \ldots \partial' h_n},$$

wo die Accente der $\hat{o}$ angeben, dass die Differentiationen sich auf den Punkt x', y', z', den wir nachher mit dem Centrum der Kugel zu confundiren haben, beziehen sollen.

Es ist nun von Vorteil jede der Kugelfunctionen Y_n durch die $2n+1$ Kugelfunctionen des symmetrischen Systems $Y_n^{(\sigma)}$ (die zonalen und tesseralen und sectoriellen in sich begreifend) darzustellen. Ist dann

Digitized by Google

$Y_n = \Sigma A_n^{(\sigma)} Y_n^{(\sigma)}$, so haben wir

$$\frac{\partial'^n}{\partial' h_1 \partial' h_2 \ldots \partial' h_n} = D'^{(\sigma)}_n,$$

wo von den Zeichen s und c (je nachdem $Y_k^{(\sigma)}$ einen $\sin\sigma\varphi$ oder $\cos\sigma\varphi$ als Factor enthält) abgesehen ist.

Für das ganze Potential Ψ der inducirten Electricität haben wir also

1) $$\Psi = A_0 G + \sum\sum\left[A_n^{(\sigma)} \frac{a^n}{n!} D'^{(\sigma)}_n (G)\right].$$

Innerhalb der Kugel ist das Potential der inducirten Electricität plus dem Potential der Ladung auf der Kugelfläche constant, also ergiebt sich

2) $$\Psi + \frac{1}{a} A_0 + \Sigma\Sigma \frac{r^{n_1}}{a^{n_1+1}} A_{n_1}^{(\sigma_1)} Y_{n_1}^{(\sigma_1)} = \text{Const.}$$

Die Werte der n_1 und σ_1 sind von den Beträgen der n und σ unabhängig. Führt man an der linken Seite dieser letztern Gleichung die Operation $D_{n_1}^{(\sigma_1)}$ in Bezug auf x, y, z aus, so fallen in $\Sigma\Sigma r^{n_1} A_{n_1}^{(\sigma_1)} Y_{n_1}^{(\sigma_1)} / a^{n_1+1}$ alle Glieder bis auf das mit $Y_{n_1}^{(\sigma_1)}$ fort, und man findet

3) $$-2\frac{(n_1+\sigma_1)!\,(n_1-\sigma_1)!}{2^{2\sigma_1} n_1!} \frac{1}{a^{n_1+1}} A_{n_1}^{(\sigma_1)}$$

$$= A_0 D_{n_1}^{(\sigma_1)}(G) + \sum\sum\left[A_n^{(\sigma)} \frac{a^n}{n!} D_{n_1}^{\sigma_1}\left(D'^{(\sigma)}_n(G)\right)\right].$$

Wir erhalten so eine Reihe von Gleichungen zur Bestimmung der Constanten $A_{n_1}^{(\sigma_1)}$.

Das Hauptglied auf der rechten Seite dieser Gleichungen ist das erste, welches die Ladung A_0 der Kugel zum Factor hat. Vernachlässigt man alle andern Glieder, so bekommt man in erster Annäherung

3_1) $$A_{n_1}^{(\sigma_1)} = -\tfrac{1}{2} \frac{2^{2\sigma_1} n_1!}{(n_1+\sigma_1)!\,(n_1-\sigma_1)!} A_0 a^{n_1+1} D_{n_1}^{(\sigma_1)}(G).$$

Bezeichnet b die kürzeste Entfernung des Kugelmittelpunktes vom nächsten Conductor, so ist

$$a^{n_1+1} D_{n_1}^{(\sigma_1)}(G) < \left(\frac{a}{b}\right)^{n_1+1}.$$

Wenn demnach b gegen a, den Radius der Kugel beträchtlich ist, so sind die Coefficienten aller andern Kugelfunctionen klein im Verhältnis zu A_0. Die unter der Doppelsumme stehenden vernachlässigten Glieder der rechten Seite der Gleichung 3) sind von ähnlicher Grösse wie

Digitized by Google

$(a/b)^{2n+n_i+1}$, woraus man ersieht, dass man sie in der Tat in erster Annäherung fortlassen darf.

Ersetzt man dann in diesen Gliedern die Constanten $A_{n_i}^{(\sigma_i)}$ durch ihre in erster Näherung gefundenen Werte, so kann man eine zweite Näherung rechnen, mit dieser dann eine dritte u. s. f.

145 a. *Verteilung der Electricität auf nahezu sphärischen Conductoren.* Wir betrachten als anderes Beispiel die Verteilung der Electricität auf einem nahezu sphärischen Conductor.

Die Gleichung des Conductors sei

$$r = a(1 + F)$$

wo F eine Function der Richtung des Radiusvector r, also eine Function von ϑ und φ ist, für Kugeln ganz verschwindet und für unsern Conductor so klein sein soll, dass ihr Quadrat unbeanstandet fortgelassen werden darf.

Entwickelt man F nach Kugelfunctionen, so dass

$$F = f_0 + f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \ldots + f_n Y_n$$

ist, so hängt das erste Glied von dem Ueberschuss des mittlern Radiusvector über den Radius a ab. Aendern wir also die Bedeutung des a dahin, dass wir unter a gerade diesen mittlern Radiusvector verstehen, so dass $4\pi a^3/3$ sehr nahe dem Volumen des gegebenen Conductors gleich ist, so wird in der Entwickelung des F die Grösse f_0 verschwinden.

Das zweite Glied $f_1 Y_1$ hängt von dem Abstande des Massenmittelpunktes des überall gleich dicht gedachten Conductors von dem Coordinatenanfang ab. Wählt man also diesen Mittelpunkt selbst zum Coordinatenursprung, so verschwindet auch f_1, und es bleibt

$$r = a(1 + f_2 Y_2 + f_3 Y_3 + \ldots).$$

Hat der Conductor eine Ladung A_0, und ist er sonst keinen äussern electrischen Kräften unterworfen, so wird sein Potential in Punkten, die ausserhalb seiner Grenzfläche liegen, von der Form

$$V = A_0 \frac{1}{r} + A_1 Y_1' \frac{1}{r^2} + \ldots + A_n Y_n' \frac{1}{r^{n+1}}$$

sein, wobei die Y' nicht von demselben Typus zu sein brauchen wie die Y in der Entwickelung des F. Auf der Fläche selbst ist das Potential constant gleich dem Potential α des Conductors. Aus der Gleichung des Conductors folgt aber bei Vernachlässigung höherer Potenzen von F als der ersten für Punkte, die auf dem Conductor gelegen sind,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a}(1 - F), \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}(1 - 2F) \text{ u. s. f.},$$

mithin haben wir

$$\alpha = A_0 \frac{1 - F}{a} + A_1 \frac{1 - 2F}{a^2} Y_1' + \ldots + A_n \frac{1 - (n+1)F}{a^{n+1}} Y_n'.$$

Digitized by Google

Die Coefficienten A_1, A_2, u. s. f. sind aber klein gegen A_0 und wenn wir ihre Producte mit F in erster Annäherung fortlassen, erhalten wir

$$\alpha = A_0 \frac{1-F}{a} + A_1 Y_1' \frac{1}{a^2} + A_2 Y_2' \frac{1}{a^3} + \ldots + A_n Y_n' \frac{1}{a^{n+1}},$$

oder, weil $F = f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \ldots + f_n Y_n$ ist,

$$\alpha = A_0 \frac{1}{a}\Big(1 - (f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \ldots + f_n Y_n)\Big) + A_1 Y_1' \frac{1}{a^2} + A_2 Y_2' \frac{1}{a^3} + \ldots.$$

Es ist aber sehr näherungsweise $\alpha = A_0/a$, lassen wir also die Glieder mit harmonischen Functionen derselben Ordnung verschwinden, so ergiebt sich das Gleichungssystem

$$\alpha = A_0 \frac{1}{a},$$

$$A_1 Y_1' = A_0 a f_1 Y_1,$$

$$A_2 Y_2' = A_0 a^2 f_2 Y_2,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$A_n Y_n' = A_0 a^n f_n Y_n.$$

Daraus folgt zunächst, dass die Y' Functionen desselben Typus sein müssen wie die Y, und ferner, weil $f_1 = 0$ ist,

$$A_1 = 0, \quad A_2 = A_0 a^2 f_2, \text{ u. s. f.}$$

Ist also die Entwickelung der Grösse F nach harmonischen Functionen bekannt, so resultirt daraus unmittelbar eine angenäherte Entwickelung des Potentials des Conductors nach denselben harmonischen Functionen.

Für die Bestimmung der electrischen Verteilung auf unserm Conductor haben wir die charakteristische Gleichung

$$4\pi\sigma = -\frac{\partial V}{\partial \nu} = -\frac{\partial V}{\partial r}\cos\varepsilon,$$

wo ν die Normale und ε der Winkel zwischen dieser und r ist. Da F und seine Derivirten sehr klein sein sollten, so darf man bis auf Grössen von der Ordnung F^2 den $\cos\varepsilon = 1$ setzen, und erhält

$$4\pi\sigma = -\frac{\partial V}{\partial r} = A_0 \frac{1}{r^2} + 2A_1 Y_1 \frac{1}{r^3} + \ldots + (n+1) A_n Y_n \frac{1}{r^{n+2}}.$$

Indem man wieder die Potenzen von r durch a und F genähert ausdrückt und Producte der $A_1, A_2, \ldots A_n$ mit F vernachlässigt, findet man

$$4\pi\sigma = \frac{A_0}{a^2}(1 - 2F) + 2A_1 Y_1 \frac{1}{a^3} + \ldots.$$

Digitized by Google

oder mit Hilfe der Näherungswerte für die Coefficienten $A_1, A_2, \ldots A_n$

$$4\pi\sigma = A_0 \frac{1}{a^2}\left[1 + f_2 Y_2 + 2 f_3 Y_3 + \ldots + (n-1) f_n Y_n\right].$$

Unterscheidet sich demnach der Conductor von einer Kugel durch eine dünne Schicht, deren Tiefe von Punkt zu Punkt wie eine harmonische Function der $n$ten Ordnung variirt, so ist das Verhältnis der Differenz der Flächendichten in zwei Punkten zu der Summe dieser Flächendichten $n-1$ mal so gross wie das Verhältnis der Differenz der zugehörigen Radien zu deren Summen.

145 b. Existiren ausserhalb des Conductors noch electrische Massen, die ihn mit einer Kraft, deren Potential gleich U ist, angreifen, so entwickeln wir dieses Potential nach harmonischen Raumfunctionen positiven Grades, deren Mittelpunkt wie früher sich in dem Volumcentrum des Conductors befindet, setzen also

$$U = B_0 + B_1 Y_1' r + B_2 Y_2' r^2 + \ldots + B_n Y_n' r^n.$$

Die Functionen Y' brauchen wieder nicht von demselben Typus zu sein wie die Y in der Entwickelung von F.

Wäre der Conductor vollständig kugelförmig, so würde das Potential seiner Ladung auf einen ausserhalb seiner Oberfläche gelegenen Punkt (s. Art. 144a) gleich

$$V = A_0 \frac{a}{r} - B_1 Y_1' \frac{a^3}{r^2} - \ldots - B_n Y_n' \frac{a^{2n+1}}{r^{n+1}}.$$

sein. Da er aber nur genähert kugelförmig ist, so fügen wir zu V noch eine Grösse W hinzu, die wir durch die Entwickelung

$$W = C_0 \frac{a}{r} + C_1 Y_1'' \frac{a^3}{r^2} + \ldots + C_m Y_m'' \frac{a^{2m+1}}{r^{m+1}}$$

darstellen können, in der die Y'' im allgemeinen von den Y und Y' im Typus abweichen werden, und wo die Constanten C klein sind, weil F nur zu geringen Beträgen ansteigt.

Das Gesammtpotential des Conductors und der electrischen Massen ist also $U + V + W$. Auf der Fläche selbst, also für $r = a(1+F)$, muss

$$U + V + W = \text{Const.} = A_0 + B_0$$

gleich dem Potential des Conductors sein. Entwickelt man aber in den Ausdrücken für U, V, W die Potenzen von r nach Potenzen von a und F, vernachlässigt höhere Potenzen von F als die erste und lässt auch alle Producte von C mit F fort, so kommt

$$F\left[-A_0 + 3B_1 a Y_1' + 5B_2 a^2 Y_2' + \ldots + (2n+1) a^n B_n Y_n'\right] + C_0 + C_1 a Y_1'' + \ldots . C_m a^m Y_m'' = 0.$$

Digitized by Google

Der Ausdruck $F(A_0 - 3B_1 a Y_1' - \ldots.)$ stellt also direct die Entwickelung von W auf der Conductorfläche dar und lässt demnach in bekannter Weise W auch für jeden ausserhalb derselben gelegenen Punkt finden. Es ist aber noch folgendes zu beachten.

F ist selbst durch eine harmonische Reihe darstellbar. Die Reihe für W enthält also zunächst Producte harmonischer Functionen. Das Product zweier harmonischer Functionen der Ordnungen n, m ist eine rationale Function des $(n+m)$ten Grades von den Grössen x/r, y/r, z/r, und als solche nach einer Reihe harmonischer Functionen entwickelbar*), deren Ordnungen $n+m$ nicht überschreiten. Kann man also F nach Kugelfunctionen entwickeln, deren Ordnungen nicht grösser als m sind, und ebenso das Potential der äussern Kräfte nach Kugelfunctionen entwickeln, deren Ordnungen nicht grösser als n sind, so wird das Potential der geladenen Conductorfläche keine Kugelfunction enthalten, deren Ordnung die Zahl $m+n$ überschreitet.

Die Flächendichte findet man nach Berechnung des W in erster Annäherung aus der Gleichung

$$4\pi\sigma = -\frac{\partial}{\partial r}(U+V+W).$$

145 c. *Conductor innerhalb einer Schale.* Als Seitenstück zu der im Art. 125 gelösten Aufgabe und als Verallgemeinerung derselben behandele ich noch den Fall, dass ein nahezu kugelförmiger Conductor sich innerhalb einer nahezu kugelförmigen und mit ihm nahezu concentrischen Schale befindet.

Die Gleichung der Conductoroberfläche sei wieder

$$r = a(1+F)$$

wo

$$F = f_1 Y_1 + f_2 Y_2 + \ldots f_n Y_n,$$

ist, die der inneren Schalenfläche

$$r = b(1+G)$$

und

$$G = g_1 Y_1 + g_2 Y_2 + \ldots + g_n Y_n.$$

Die f und g sind klein gegen die Einheit, und die Y_n harmonische Flächenfunctionen von der Ordnung n.

Ferner sei das Potential auf dem Conductor gleich α, auf der Schale gleich β und in einem Punkte zwischen Conductor und Schale gleich Ψ. Entwickeln wir Ψ (weil der Punkt ausserhalb des einen und innerhalb des andern Conductors sich befindet) nach harmonischen Raumfunctionen positiven und negativen Grades, setzen also

$$\Psi = h_0 + h_1 Y_1 r + \ldots + h_n Y_n r^n + k_0 \frac{1}{r} + k_1 Y_1 \frac{1}{r^2} + \ldots + k_n Y_n \frac{1}{r^{n+1}},$$

*) Heine, *Kugelfunctionen*; Bd. I, pag. 71 ff.

Digitized by Google

so haben wir die h und die k so zu bestimmen, dass für $r = a(1+F)$ das $\Psi = \alpha$ und für $r = b(1+G)$ das $\Psi = \beta$ wird. Nun sind die h und k, abgesehen von h_0 und k_0, so kleine Grössen, dass wir ihre Producte mit F vernachlässigen dürfen, wir erhalten also ganz wie bei frühern Gelegenheiten

$$\alpha = h_0 + k_0(1-F)\frac{1}{a} + \left(h_1 a + \frac{k_1}{a^2}\right) Y_1 + \ldots + \left(h_n a^n + \frac{k_n}{a^{n+1}}\right) Y_n,$$

$$\beta = h_0 + k_0(1-G)\frac{1}{b} + \left(h_1 b + \frac{k}{b^2}\right) Y_1 + \ldots + \left(h_n b^n + \frac{k^n}{b^{n+1}}\right) Y_n,$$

also

$$\alpha = h_0 \quad + \frac{k_0}{a}, \qquad \beta = h_0 \quad + \frac{k_0}{b},$$

$$\frac{k_0}{a} f_1 = h_1 a \quad + \frac{k_1}{a^2}, \qquad \frac{k_0}{b} g_1 = h_1 b + \frac{k_1}{b^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{k_0}{a} f_n = h_n a^n + \frac{k_n}{a^{n+1}}, \quad \frac{k_0}{b} g_n = h_n b^n + \frac{k_n}{b^{n+1}}.$$

Die Ladung des innern Conductors wird demnach

$$k_0 = (\alpha - \beta)\frac{ab}{b-a},$$

und ausserdem ist allgemein

$$h_n = k_0 \frac{b^n g_n - a^n f_n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}},$$

$$k_n = k_0 a^n b^n \frac{b^{n+1} f_n - a^{n+1} g_n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}},$$

h_n, k_n, f_n, g_n sind aber Coefficienten einer und derselben harmonischen Flächenfunction in den verschiedenen Entwickelungen.

Die Flächendichte der Electricität auf dem innern Conductor findet man aus der Gleichung

$$4\pi\sigma a^2 = k_0(1 + A_1 Y_1 + \ldots A_n Y_n),$$

wo allgemein

$$A_n = \frac{f_n\{n a^{2n+1} + (n+1) b^{2n+1}\} - g_n (2n+1) a^{n+1} b^n}{b^{2n+1} - a^{2n+1}}$$

gesetzt ist.

146. *Zwei kugelförmige Conductoren.* Als specielles Beispiel für die Anwendung zonaler Functionen untersuchen wir die electrische Verteilung auf zwei kugelförmigen Conductoren.

Digitized by Google

a und b seien die Radien der Kugeln und c gebe den Abstand ihrer Mittelpunkte von einander an. Bezeichnen wir noch mit x, y zwei Zahlen, die kleiner als 1 sind, so haben wir $a = xc$, $b = yc$. Weiter sei r der Abstand eines Punktes von dem Centrum der ersten und s der von dem Centrum der zweiten Kugel, σ_1 die Flächendichte der Electricität auf der ersten Kugel und σ_2 die auf der zweiten.

Wir legen in die Centrale der beiden Kugeln die Axen und in die einander zugewandten Schnittpunkte der Centrale mit den Kugeln die Pole zweier Systeme zonaler Functionen. Entwickeln wir dann die Dichten σ_1, σ_2 nach diesen zonalen Functionen, setzen also

1) $$4\pi a^2 \sigma_1 = A + A_1 P_1 + 3 A_2 P_2 + \ldots + (2m+1) A_m P_m,$$

2) $$4\pi b^2 \sigma_2 = B + B_1 P_1 + 3 B_2 P_2 + \ldots + (2n+1) B_n P_n,$$

und bezeichnen mit U', U das Potential der Electricität der ersten Kugel auf Punkte innerhalb bezüglich ausserhalb ihrer Oberfläche und mit V', V das Potential der zweiten Kugel auf Punkte innerhalb bezüglich ausserhalb ihrer Oberfläche, so haben wir

3) $$aU' = A + A_1 P_1 \frac{r}{a} + A_2 P_2 \frac{r^2}{a^2} + \ldots + A_m P_m \frac{r^m}{a^m},$$

4) $$rU = A + A_1 P_1 \frac{a}{r} + A_2 P_2 \frac{a^2}{r^2} + \ldots + A_m P_m \frac{a^m}{r^m},$$

5) $$bV' = B + B_1 P_1 \frac{s}{b} + B_2 P_2 \frac{s^2}{b^2} + \ldots + B_n P_n \frac{s^n}{b^n},$$

6) $$sV = B + B_1 P_1 \frac{b}{s} + B_2 P_2 \frac{b^2}{s^2} + \ldots + B_n P_n \frac{b^n}{s^n}.$$

Dabei sind A und B die Ladungen der entsprechenden Kugeln.

Ist ferner das Gesammtpotential auf der ersten Kugel gleich α, das auf der zweiten gleich β und das in einem ausserhalb beider Kugeln gelegenen Punkte gleich Ψ, so haben wir

7a) $\alpha = U' + V$ für Punkte innerhalb der ersten Kugel.

8a) $\beta = U + V'$ „ „ „ „ zweiten „

9) $\Psi = U + V$ „ „ ausserhalb beider Kugeln.

Aus der ersten dieser drei Gleichungen folgt aber für Punkte innerhalb der ersten Kugel

$$\frac{\partial (U'+V)}{\partial r} = \frac{\partial^2 (U'+V)}{\partial r^2} = \ldots = \frac{\partial^n (U'+V)}{\partial r^n} = 0.$$

Bildet man diese Gleichungen speciell für Punkte auf der Centrale, wo also

$$r + s = c$$

Digitized by Google

ist, und beachtet, dass eine zonale Function in ihrem Pole den Wert 1 hat, so folgt für $r = 0$, also $s = c$

$$A_1 \frac{1}{a^2} - \left(\frac{\partial V}{\partial s}\right)_{s=c} = 0,$$

$$A_2 \frac{2!}{a^3} + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial s^2}\right)_{s=c} = 0, \quad 10)$$

. . . . . .

$$A_m \frac{m!}{a^{m+1}} + (-1)^m \left(\frac{\partial^m V}{\partial s^m}\right)_{s=c} = 0.$$

Indem man die Differentiationen von V ausführt und $a/c = x$, $b/c = y$ setzt, erhält man das System der Gleichungen

$$\begin{aligned}
0 &= A_1 + Bx^2 + 2B_1 x^2 y + 3B_2 x^2 y^2 + \ldots\ldots + (n+1) B_n x^2 y^n, \\
0 &= A_2 + Bx^3 + 3B_1 x^3 y + 6B_2 x^3 y^2 + \ldots + \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) B_n x^3 y^n, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11_1) \\
0 &= A_m + Bx^{m+1} + (m+1) B_1 x^{m+1} y + \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2) B_2 x^{m+1} y^2 \\
&\quad + \ldots\ldots + \frac{(m+n)!}{m!\,n!} B_n x^{m+1} y^n.
\end{aligned}$$

In ganz derselben Weise ergiebt sich aus der zweiten Gleichung $U + V' = \beta$ für $r = c$ und $s = 0$

$$\begin{aligned}
0 &= B_1 + Ay^2 + 2A_1 y^2 x + 3A_2 y^2 x^2 + \ldots + (m+1) A_m y^2 x^m, \\
0 &= B_2 + Ay^3 + 3A_1 y^3 x + 6A_2 y^3 x^2 + \ldots + \tfrac{1}{2}(m+1)(m+2) A_m y^3 x^m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 11_2) \\
0 &= B_n + Ay^{n+1} + (n+1) A_1 y^{n+1} x + \tfrac{1}{2}(n+1)(n+2) A_2 y^{n+1} x^2 \\
&\quad + \ldots\ldots + \frac{(m+n)!}{m!\,n!} A_n y^{n+1} x^m.
\end{aligned}$$

Wir haben also zwei Systeme von im Ganzen $m + n$ Gleichungen, aus denen wir die $m + n$ Grössen $A_1, A_2 \ldots, A_m, B_1, B_2 \ldots B_n$ durch A und B berechnen können.

Die Lösung lässt sich durch Determinanten ausführen, die folgende Methode führt aber den Rechner schneller zum Ziel.

Entnimmt man dem Gleichungssystem 11_2) die Werte der B und trägt sie in das System 11_1) ein, so geht dieses über in

$$\begin{aligned}
A_1 = &- Bx^2 + A\ x^2 y^3 [2.1 + 3.1\ y^2 + 4.1\ y^4 + 5.1 y^6 + 6.1 y^8 + \&c. \\
&+ A_1 x^3 y^3 [2.2 + 3.3\ y^2 + 4.4\ y^4 + 5.5 y^6 + \&c. \\
&+ A_2 x^4 y^3 [2.3 + 3.6\ y^2 + 4.10 y^4 + \&c. \\
&+ A_3 x^5 y^3 [2.4 + 3.10 y^2 + \&c. \\
&+ A_4 x^6 y^3 [2.5 + \&c. \\
&. . . . . .
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
A_2 = &-Bx^3 + A\ x^3y^3[3.1 + 6.1\ y^2 + 10.1y^4 + 15.1y^6 + \&c.\\
&+ A_1x^4y^3[3.2 + 6.3\ y^2 + 10.4y^4 + \&c.\\
&+ A_2x^5y^3[3.3 + 6.6\ y^2 + \&c.\\
&+ A_3x^6y^3[3.4 + \&c.\\
&\ldots\ldots\ldots\\
A_3 = &-Bx^4 + A\ x^4y^3[4.1 + 10.1y^2 + 20.1y^4 + \&c.\\
&+ A_1x^5y^3[4.2 + 10.3y^2 + \&c.\\
&+ A_2x^6y^3[4.3 + \&c.\\
&\ldots\ldots\ldots\\
A_4 = &-Bx^5 + A\ x^5y^3[5.1 + 15.1y^2 + \&c.\\
&+ A_1x^6y^3[5.2 + \&c.\\
&\ldots\ldots\ldots \text{ u. s. f.}
\end{aligned}
$$

Als erste Näherungswerte für $A_1, A_2, \ldots$ kann man die mit A und B multiplicirten Glieder ansehen. Trägt man dann diese Näherungswerte in die rechten Seiten der vorangehenden Gleichungen ein, so erhält man zweite Näherungswerte u. s. f.

Die allgemeine Form der A und B ist aber

$$A_n = p_nA - q_nB,$$
$$B_n = -r_nA + s_nB,$$

und man findet leicht

$$
\begin{aligned}
p_1 = &\ x^2y^3[\ 2 + 3y^2 + 4y^4 + 5y^6 + 6y^8 + 7y^{10} + 8y^{12} + 9y^{14} + \&c.\\
&+ x^5y^6[\ 8 + 30y^2 + 75y^4 + 154y^6 + 280y^8 + \&c.\\
&+ x^7y^6[\ 18 + 90y^2 + 288y^4 + 735y^6 + \&c.\\
&+ x^9y^6[\ 32 + 200y^2 + 780y^4 + \&c,\\
&+ x^{11}y^6[\ 50 + 375y^2 + \&c.\\
&+ x^{13}y^6[\ 72 + \&c.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ x^8y^9[\ 32 + 192y^2 + \&c.\\
&+ x^{10}y^9[144 + \&c.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
q_1 = &\ x^2\\
&+ x^5y^3[\ 4 + 9y^2 + 16y^4 + 25y^6 + 36y^8 + 49y^{10} + 64y^{12} + \&c.\\
&+ x^7y^3[\ 6 + 18y^2 + 40y^4 + 75y^6 + 126y^8 + 196y^{10} + \&c.\\
&+ x^9y^3[\ 8 + 30y^2 + 80y^4 + 175y^6 + 336y^8 + \&c.\\
&+ x^{11}y^3[\ 10 + 45y^2 + 140y^4 + 350y^6 + \&c.\\
&+ x^{13}y^3[\ 12 + 63y^2 + 224y^4 + \&c.\\
&+ x^{15}y^3[\ 14 + 84y^2 + \&c.\\
&+ x^{17}y^3[\ 16 + \&c.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ x^8y^6[\ 16 + 72y^2 + 209y^4 + 488y^6 + \&c.\\
&+ x^{10}y^6[\ 60 + 342y^2 + 1222y^4 + \&c.\\
&+ x^{12}y^6[150 + 1050y^2 + \&c.\\
&+ x^{14}y^6[308 + \&c.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ x^{11}y^9[\ 64 + \&c.\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Für die folgenden Untersuchungen ist es vorteilhafter, diese Coefficienten durch a, b und c auszudrücken und alles nach c zu ordnen. Man erhält so, indem man bei den Näherungswerten stehen bleibt, die durch die niedergeschriebenen Glieder charakterisirt sind,

$$\begin{aligned}p_1 = {} & 2a^2b^3c^{-5} + 3a^2b^5c^{-7} + 4a^2b^7c^{-9} + (5a^2b^9 + 8a^5b^6)c^{-11} \\ & + (6a^2b^{11} + 30a^5b^8 + 18a^7b^6)c^{-13} \\ & + (7a^2b^{13} + 75a^5b^{10} + 90a^7b^8 + 32a^9b^6)c^{-15} \\ & + (8a^2b^{15} + 154a^5b^{12} + 288a^7b^{10} + 32a^8b^9 + 200a^9b^8 + 50a^{11}b^6)c^{-17} \\ & + (9a^2b^{17} + 280a^5b^{14} + 735a^7b^{12} + 192a^8b^{11} + 780a^9b^{10} \\ & \qquad + 144a^{10}b^9 + 375a^{11}b^8 + 72a^{13}b^6)c^{-19}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_1 = {} & a^2c^{-2} + 4a^5b^3c^{-8} + (6a^7b^3 + 9a^5b^5)c^{-10} \\ & + (8a^9b^3 + 18a^7b^5 + 16a^5b^7)c^{-12} \\ & + (10a^{11}b^3 + 30a^9b^5 + 16a^8b^6 + 40a^7b^7 + 25a^5b^9)c^{-14} \\ & + (12a^{13}b^3 + 45a^{11}b^5 + 60a^{10}b^6 + 80a^9b^7 \\ & \qquad + 72a^8b^8 + 75a^7b^9 + 36a^5b^{11})c^{-16} \\ & + (14a^{15}b^3 + 63a^{13}b^5 + 150a^{12}b^6 + 140a^{11}b^7 + 342a^{10}b^8 \\ & \qquad + 175a^9b^9 + 209a^8b^{10} + 126a^7b^{11} + 49a^5b^{13})c^{-18} \\ & + (16a^{17}b^3 + 84a^{15}b^5 + 308a^{14}b^6 + 224a^{13}b^7 + 1050a^{12}b^8 \\ & \quad + 414a^{11}b^9 + 1222a^{10}b^{10} + 336a^9b^{11} + 488a^8b^{12} + 196a^7b^{13} \\ & \quad + 64a^5b^{15})c^{-20}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_2 = {} & 3a^3b^3c^{-6} + 6a^3b^5c^{-8} + 10a^3b^7c^{-10} + (12a^6b^6 + 15a^3b^9)c^{-12} \\ & + (27a^8b^6 + 54a^6b^8 + 21a^3b^{11})c^{-14} \\ & + (48a^{10}b^6 + 162a^8b^8 + 158a^6b^{10} + 28a^3b^{13})c^{-16} \\ & + (75a^{12}b^6 + 360a^{10}b^8 + 48a^9b^9 + 606a^8b^{10} \\ & \qquad + 372a^6b^{12} + 36a^3b^{15})c^{-18}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_2 = {} & a^3c^{-3} + 6a^6b^3c^{-9} + (9a^8b^3 + 18a^6b^5)c^{-11} \\ & + (12a^{10}b^3 + 36a^8b^5 + 40a^6b^7)c^{-13} \\ & + (15a^{12}b^3 + 60a^{10}b^5 + 24a^9b^6 + 100a^8b^7 + 75a^6b^9)c^{-15} \\ & + (18a^{14}b^3 + 90a^{12}b^5 + 90a^{11}b^6 + 200a^{10}b^7 \\ & \qquad + 126a^9b^8 + 225a^8b^9 + 126a^6b^{11})c^{-17} \\ & + (21a^{16}b^3 + 126a^{14}b^5 + 225a^{13}b^6 + 350a^{12}b^7 + 594a^{11}b^8 \\ & \qquad + 525a^{10}b^9 + 418a^9b^{10} + 441a^8b^{11} + 196a^6b^{13})c^{-19}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_3 = {} & 4a^4b^3c^{-7} + 10a^4b^5c^{-9} + 20a^4b^7c^{-11} + (16a^7b^6 + 35a^4b^9)c^{-13} \\ & + (36a^9b^6 + 84a^7b^8 + 56a^4b^{11})c^{-15} \\ & + (64a^{11}b^6 + 252a^9b^8 + 282a^7b^{10} + 84a^4b^{13})c^{-17}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q_3 = {} & a^4c^{-4} + 8a^7b^3c^{-10} + (12a^9b^3 + 30a^7b^5)c^{-12} \\ & + (16a^{11}b^3 + 60a^9b^5 + 80a^7b^7)c^{-14} \\ & + (20a^{13}b^3 + 100a^{11}b^5 + 32a^{10}b^6 + 200a^9b^7 + 175a^7b^9)c^{-16} \\ & + (24a^{15}b^3 + 150a^{13}b^5 + 120a^{12}b^6 + 400a^{11}b^7 + 192a^{10}b^8 \\ & \qquad + 525a^9b^9 + 336a^7b^{11})c^{-18}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_4 = {} & 5a^5b^3c^{-8} + 15a^5b^5c^{-10} + 35a^5b^7c^{-12} + (20a^8b^6 + 70a^5b^9)c^{-14} \\ & + (45a^{10}b^6 + 120a^8b^8 + 126a^5b^{11})c^{-16}.\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$q_4 = a^5c^{-5} + 10a^8b^3c^{-11} + (15a^{10}b^3 + 45a^8b^5)c^{-13} + (20a^{12}b^3 + 90a^{10}b^5 + 140a^8b^7)c^{-15} + (25a^{14}b^3 + 150a^{12}b^5 + 40a^{11}b^6 + 350a^{10}b^7 + 350a^8b^9)c^{-17}.$$

$$p_5 = 6a^6b^3c^{-9} + 21a^6b^5c^{-11} + 56a^6b^7c^{-13} + (24a^9b^6 + 126a^6b^9)c^{-15}.$$

$$q_5 = a^6c^{-6} + 12a^9b^3c^{-12} + (18a^{11}b^3 + 63a^9b^5)c^{-14} + (24a^{13}b^3 + 126a^{11}b^5 + 224a^9b^7)c^{-16}.$$

$$p_6 = 7a^7b^3c^{-10} + 28a^7b^5c^{-12} + 84a^7b^7c^{-14}.$$

$$q_6 = a^7c^{-7} + 14a^{10}b^3c^{-13} + (21a^{12}b^3 + 84a^{10}b^5)c^{-15}.$$

$$p_7 = 8a^8b^3c^{-11} + 36a^8b^5c^{-13}.$$

$$q_7 = a^8c^{-8} + 16a^{11}b^3c^{-14}.$$

$$p_8 = 9a^9b^3c^{-12}.$$

$$q_8 = a^9c^{-9}.$$

Daraus erhält man die Werte der r und s indem man a mit b in den q bezüglich p vertauscht.

Die Potentiale α und β auf den Kugeln selbst sind zunächst

7b) $$\alpha = \frac{1}{c}\left[A\frac{1}{x} + B + B_1y + B_2y^2 + \ldots + B_ny^n\right]$$

8b) $$\beta = \frac{1}{c}\left[B\frac{1}{y} + A + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_mx^m\right]$$

oder

7c) $$\alpha = lA + mB,$$

8c) $$\beta = mA + nB.$$

l, m, n sind die Potentialcoefficienten (Art. 87), und man findet aus den angegebenen Werten der A und B

$$m = c^{-1} + p_1ac^{-2} + p_2a^2c^{-3} + \ldots.$$
$$n = b^{-1} - q_1ac^{-2} - q_2a^2c^{-3} - \ldots.$$

oder in ihrer Entwickelung nach a, b, c

$$m = c^{-1} + 2a^3b^3c^{-7} + 3a^3b^3(a^2+b^2)c^{-9} + a^3b^3(4a^4 + 6a^2b^2 + 4b^4)c^{-11} + a^3b^3(5a^6 + 10a^4b^2 + 8a^3b^3 + 10a^2b^4 + 5b^6)c^{-13} + a^3b^3(6a^8 + 15a^6b^2 + 30a^5b^3 + 20a^4b^4 + 30a^3b^5 + 15a^2b^6 + 6b^8)c^{-15} + a^3b^3(7a^{10} + 21a^8b^2 + 75a^7b^3 + 35a^6b^4 + 144a^5b^5 + 35a^4b^6 + 75a^3b^7 + 21a^2b^8 + 7b^{10})c^{-17} + a^3b^3(8a^{12} + 28a^{10}b^2 + 154a^9b^3 + 56a^8b^4 + 446a^7b^5 + 102a^6b^6 + 446a^5b^7 + 56a^4b^8 + 154a^3b^9 + 28a^2b^{10} + 8b^{12})c^{-19} + a^3b^3(9a^{14} + 36a^{12}b^2 + 280a^{11}b^3 + 84a^{10}b^4 + 1107a^9b^5 + 318a^8b^6 + 1668a^7b^7 + 318a^6b^8 + 1107a^5b^9 + 84a^4b^{10} + 280a^3b^{11} + 36a^2b^{12} + 9b^{14})c^{-21}.$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
n = b^{-1} &- a^3c^{-4} - a^5c^{-6} - a^7c^{-8} - (a^3 + 4b^3)a^6c^{-10} \\
&- (a^5 + 12a^2b^3 + 9b^5)\ a^6c^{-12} \\
&- (a^7 + 25a^4b^3 + 36a^2b^5 + 16b^7)a^6c^{-14} \\
&- (a^9 + 44a^6b^3 + 96a^4b^5 + 16a^3b^6 + 80a^2b^7 + 25b^9)a^6c^{-16} \\
&- (a^{11} + 70a^8b^3 + 210a^6b^5 + 84a^5b^6 + 260a^4b^7 \\
&\qquad + 72a^3b^8 + 150a^2b^9 + 36b^{11})a^6c^{-18} \\
&- (a^{13} + 104a^{10}b^3 + 406a^8b^5 + 272a^7b^6 + 680a^6b^7 + 468a^5b^8 \\
&\qquad + 575a^4b^9 + 209a^3b^{10} + 252a^2b^{11} + 49b^{13})a^6c^{-20} \\
&- (a^{15} + 147a^{12}b^3 + 720a^{10}b^5 + 693a^9b^6 + 1548a^8b^7 + 1836a^7b^8 \\
&\qquad + 1814a^6b^9 + 1640a^5b^{10} + 1113a^4b^{11} + 488a^3b^{12} \\
&\qquad + 392a^2b^{13} + 64b^{15})a^6c^{-22}.
\end{aligned}
$$

Der Wert des l folgt aus dem des n, indem man a mit b vertauscht.

Aus den Entwickelungen des Art. 87. ergiebt sich für die potentielle Energie des Systems

12) $$W = \tfrac{1}{2}lA^2 + mAB + \tfrac{1}{2}nB^2,$$

Die Abstossungskraft, welche die beiden Kugeln in Richtung ihrer Centrale auf einander ausüben, ist nach Art. 93 a

13) $$-\frac{\partial W}{\partial c} = \tfrac{1}{2}A^2\frac{\partial l}{\partial c} + AB\frac{\partial m}{\partial c} + \tfrac{1}{2}B^2\frac{\partial n}{\partial c}.$$

Endlich findet man noch die Beträge der Flächendichten der Ladungen auf den Kugeln aus den Gleichungen unter 1) und 2), indem man die $A_1 \ldots B_1 \ldots$ durch ihre gefundenen Werte ersetzt.

Digitized by Google

Cap. X.

Confocale Flächen zweiten Grades.

—x—

Krummlinige Coordinaten.

Eine zweite Methode, Lösungen der Poisson-Laplaceschen Gleichung, und damit electrostatischer Probleme zu erhalten, besteht darin, dass man sie für andere Coordinatensysteme transformirt.

In dem Cartesischen Coordinatensystem wird jeder Punkt des Raumes als Schnittpunkt dreier zu den Axenebenen paralleler Ebenen angesehen.

Bei dem jetzt einzuführenden System fixiren wir jeden Punkt des Raumes durch die drei confocalen Flächen zweiten Grades (einschaliges Hyperboloid, zweischaliges Hyperboloid und Ellipsoid), deren Schnittpunkt er ist.

147. Die allgemeine Gleichung eines Systems*) confocaler Flächen ist

$$1) \qquad \frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1.$$

λ ist ein Parameter, durch dessen Variation man von einer Fläche zu einer andern übergeht, und es soll, je nachdem es sich auf Systeme confocaler zweischaliger Hyperboloide, einschaliger Hyperboloide, Ellipsoide bezieht, durch $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ charakterisirt werden.

Die Reihenfolge der a, b, c ist so gewählt, dass $a < b < c$, demnach

$$a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3$$

wird. Doch ist die Grösse a nur der Symmetrie der Resultate wegen eingeführt und kann und soll auch in den Schlussresultaten gleich Null gesetzt werden.

Eliminirt man zwischen den Gleichungen dreier confocaler Flächen, denen die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ zukommen, das y^2 und z^2, so folgt

---

*) Die folgenden Untersuchungen sind der Hauptsache nach dem höchst interessanten Werke Lamé's — *Leçons sur les Fonctions Inverses des Transcendantes et les Surfaces Isothermes.* Paris, 1857, entlehnt.

Digitized by Google

2) $$x^2(b^2-a^2)(c^2-a^2)=(\lambda_1^2-a^2)(\lambda_2^2-a^2)(\lambda_3^2-a^2)$$

als Gleichung für die x Coordinate des Durchschnittspunktes der drei Flächen.

y und z erhält man durch Vertauschung von a mit b und b mit a, bezüglich von a mit c und c mit a.

Weiter ergiebt eine Differentiation

3) $$\frac{\partial x}{\partial\lambda_1}=\frac{\lambda_1}{\lambda_1^2-a^2}x,$$

woraus die acht andern entsprechenden Differentialquotienten durch geeignete Vertauschung der Buchstaben resultiren.

Bezeichnet also s_1 den Bogen der Schnittlinie der Flächen λ_2 und λ_3, der von zwei aufeinander folgenden Flächen λ_1 und $\lambda_1+d\lambda_1$ eingefasst wird, so ergiebt sich

4a) $$\left(\frac{\partial s_1}{\partial\lambda_1}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\lambda_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\lambda_1}\right)^2=\frac{\lambda_1^2(\lambda_2^2-\lambda_1^2)(\lambda_3^2-\lambda_1^2)}{(\lambda_1^2-a^2)(\lambda_1^2-b^2)(\lambda_1^2-c^2)}.$$

Entsprechende Gleichungen erhalten wir für die Grössen $\partial s_2/\partial\lambda_2$, $\partial s_3/\partial\lambda_3$.

Setzen wir

a) $$D_1^2=\lambda_3^2-\lambda_2^2,\ D_2^2=\lambda_3^2-\lambda_1^2,\ D_3^2=\lambda_2^2-\lambda_1^2$$

und nehmen $a=0$, so wird

4b) $$\frac{\partial s_1}{\partial\lambda_1}=\frac{D_2D_3}{\sqrt{b^2-\lambda_1^2}\sqrt{c^2-\lambda_1^2}}.$$

Der Nenner ist das Product der parallel der y bezüglich z Axe laufenden Halbaxen der Fläche mit dem Parameter λ_1. Der Zähler ist ebenfalls ein Product von Halbaxen, und zwar desjenigen Centralschnittes der Fläche λ_1, welcher zum Halbmesser, der durch den Schnittpunkt der drei Flächen geht, conjugirt ist. Es ist auch leicht zu zeigen, dass D_2 parallel ds_2, D_3 parallel ds_3 und D_1 parallel ds_1 verläuft, doch gehe ich nicht weiter darauf ein.

Wir machen nun die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von drei andern Grössen α, β, γ abhängig, indem wir setzen

5a) $$\alpha=\int_0^{\lambda_1}\frac{c\,d\lambda_1}{\sqrt{b^2-\lambda_1^2}\sqrt{c^2-\lambda_1^2}},$$

$$\beta=\int_b^{\lambda_2}\frac{c\,d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2-b^2}\sqrt{c^2-\lambda_2^2}},$$

$$\gamma=\int_c^{\lambda_3}\frac{c\,d\lambda_3}{\sqrt{\lambda_3^2-b^2}\sqrt{\lambda_3^2-c^2}},$$

Digitized by Google

und erhalten damit

4c) $$ds_1 = \frac{1}{c} D_2 D_3 d\alpha, \quad ds_2 = \frac{1}{c} D_3 D_1 d\beta, \quad ds_3 = \frac{1}{c} D_1 D_2 d\gamma.$$

Das Volumenelement, dessen Kanten ds_1, ds_2, ds_3 sind, hat einen Inhalt

6) $$ds_1\, ds_2\, ds_3 = \frac{D_1^2 D_2^2 D_3^2}{c^3} d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Die drei Bogenelemente ds_1, ds_2, ds_3 sind zu einander rechtwinklig geneigt, und die Bogen s_1, s_2, s_3, zu denen sie gehören, bilden ein orthogonales krummliniges Coordinatensystem.

148. Man kann diese drei Grössen α, β, γ auch als elliptische Integrale erster Art darstellen. Setzt man nämlich

$$\lambda_1 = b \sin\vartheta,$$

b) $$\lambda_2 = \sqrt{c^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi},$$

$$\lambda_3 = c \sec\psi,$$

ferner

c) $$b = kc,$$

d) $$k^2 + k'^2 = 1,$$

so dass k und k' als complementäre Moduli des Systems confocaler Flächen angesehen werden können, so findet sich

$$\alpha = \int_0^{\vartheta} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 + k^2 \sin^2\vartheta}} = F(k, \vartheta),$$

5b) $$\beta = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \cos^2\varphi}} = F(k') - F(k', \varphi),$$

$$\gamma = \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2\psi}} = F(k) - F(k, \psi).$$

$F(k)$ ist das vollständige elliptische Integral erster Gattung, das man auch durch K zu bezeichnen pflegt, $F(k')$ ist das ihm complementäre.

Darnach ist α eine Function von ϑ, also von λ_1, β eine Function von φ, also von λ_2, γ eine Function von ψ, also von λ_3. Man kann aber auch umgekehrt die Winkel ϑ, φ, ψ und die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von α, β, γ abhängig machen. Lamé behandelt gerade die Eigenschaften, die sich aus solcher Inversion von Functionen ergeben.

Da übrigens die Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ periodische Functionen der Hilfswinkel ϑ, φ, ψ sind, so müssen sie auch periodische Functionen der α, β, γ sein. Aus der Theorie der elliptischen Functionen folgt, dass die Periode von λ_1 und λ_3 gleich $4F(k)$ ist, während λ_2 zur Periode $2F(k')$ hat.

Digitized by Google

Transformation der Laplace-Poissonschen Gleichung.

149. Wir transformiren die Laplace-Poissonsche Gleichung, indem wir statt der bisherigen Cartesischen Coordinaten die neuen Coordinaten α, β, γ einführen.

Jene Gleichung ist bekanntlich identisch mit der Beziehung

$$\iint R \cos\varepsilon \, ds + \iiint 4\pi\rho \, d\tau = 0,$$

und darum bilden wir zunächst das Flächenintegral der Kraft R.

Bezeichnet V das Potential in einem Punkte (α, β, γ), so ist die in Richtung von ∂s_1 resultirende Kraft

1) $$R_1 = -\frac{\partial V}{\partial s_1} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s_1} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{c}{D_2 D_3}$$

und demzufolge

$$R_1 \, ds_2 \, ds_3 = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{c}{D_2 D_3} \cdot \frac{D_3 D_1}{c} \cdot \frac{D_1 D_2}{c} d\beta \, d\gamma = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{D_1^2}{c} d\beta \, d\gamma.$$

Die linke Seite der Gleichung giebt das Flächenintegral von R_1 für das Flächenelement $ds_2 \, ds_3$. Fassen wir ferner das von dem System der Flächen α, β, γ und $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ gebildete Raumelement (solcher Raumelemente giebt es acht, eines in jedem Octanten) ins Auge, so erhalten wir durch die rechte Seite jener Gleichung das Flächenintegral der (von aussen nach innen als positiv bezeichneten) Normalcomponente der Kraft für das Element der Fläche α, welches zwischen den Flächen β und $\beta + d\beta$, γ und $\gamma + d\gamma$ liegt. Das Flächenintegral für das entsprechende Flächenelement auf $\alpha + d\alpha$ ist dann, weil D_1^2 von α unabhängig ist,

$$+\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{D_1^2}{c} d\beta \, d\gamma + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\frac{D_1^2}{c} d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

Die beiden Flächenelemente auf α und $\alpha + d\alpha$ stehen sich in dem von α, β, γ und $\alpha + d\alpha$, $\beta + d\beta$, $\gamma + d\gamma$ begrenzten Volumelement $d\alpha \, d\beta \, d\gamma$ gegenüber und das Flächenintegral in Bezug auf beide zusammen wird

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2}\frac{D_1^2}{c} d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

Entsprechend erhalten wir für die Flächenintegrale der Normalcomponente der Kraft in Bezug auf die Paare gegenüberstehender Elemente der Flächen β und $\beta + d\beta$ bezüglich γ und $\gamma + d\gamma$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2}\frac{D_2^2}{c} d\alpha \, d\beta \, d\gamma \text{ und } \frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2}\frac{D_3^2}{c} d\alpha \, d\beta \, d\gamma.$$

Digitized by Google

Die sechs Flächenelemente schliessen einen Raum ein, dessen Volumen nach Art. 147, 6)

$$ds_1\, ds_2\, ds_3 = \frac{D_1^2\, D_2^2\, D_3^2}{c^3}\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma$$

ist, und da nach Art. 77 die Summe aus dem Flächenintegral des Elements und aus der in demselben enthaltenen Electricitätsmenge, welcher hier gleich $\rho\, ds_1\, ds_2\, ds_3$ ist, verschwinden muss, so erhalten wir

$$2) \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} D_1^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \beta^2} D_2^2 + \frac{\partial^2 V}{\partial \gamma^2} D_3^2 + 4\pi\rho \frac{D_1^2\, D_2^2\, D_3^2}{c^2} = 0,$$

und das ist die transformirte Poissonsche Gleichung.

Die Laplacesche folgt, wenn $\rho = 0$ gesetzt wird.

Wegen der allgemeinen Discussion dieser Gleichung muss auf das citirte Werk von Lamé verwiesen werden.

Lösungen der Differentialgleichung.

150. Ganz so wie die Laplacesche Gleichung in ihrem Ausdruck durch Cartesische Coordinaten x, y, z durch eine lineare Function dieser Coordinaten erfüllt wird, genügt ihr in ihrer transformirten Gestalt eine lineare Function der α, β, γ. Dadurch sind wir aber in den Stand gesetzt, die electrische Verteilung auf zwei confocalen Flächen derselben Art so wie die Potentialwerte zwischen diesen Flächen zu bestimmen, wenn die Potentiale auf den Flächen selbst gegeben sind.

Zweischalige Hyperboloide.

Wenn α constant ist, so sollte die Fläche, um die es sich handelt, ein zweischaliges Hyperboloid sein. Nehmen wir für α dasselbe Zeichen, welches die x Coordinate der betreffenden Schale hat, so können wir beide Schalen gleichzeitig behandeln.

Es seien α_1 und α_2 die Werte des α für zwei Schalen, die zu demselben oder zu verschiedenen Hyperboloiden gehören, und V_1, V_2 die Potentialniveaus auf ihnen.

Das Potential für einen Punkt zwischen ihnen ist dann

$$1') \qquad V = A + B\alpha$$

und folglich, weil

$$V_1 = A + B\alpha_1, \quad V_2 = A + B\alpha_2$$

sein muss,

$$1) \qquad V = \frac{\alpha_1 V_2 - \alpha_2 V_1 + \alpha(V_1 - V_2)}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Digitized by Google

Die resultirende Kraft in Punkten der confocalen Schalen ist durch

$$2') \qquad R_2 = -\frac{\partial V}{\partial s_1} = -\frac{\partial V}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial s_1} = -R_1$$

gegeben, sie wird also (Art. 147, 4c)

$$2a) \qquad R_2 = -\frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{c}{D_2 D_3} = -R_1.$$

Bezeichnet man mit p_1 die Länge des von dem Mittelpunkt auf die Tangentialebene in dem betreffenden Punkte gefällten Lotes und mit P_1 das Product der Halbaxen des betreffenden Hyperboloids, so ist bekanntlich $p_1 D_2 D_3 = P_1$, demnach auch

$$2b) \qquad R_1 = \frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{c p_1}{P_1}.$$

Die Kraft ist also proportional der Länge des Lotes von dem Mittelpunkt auf die Tangentialebene der betreffenden Fläche.

Für die Flächendichte σ haben wir die Gleichung

$$3a) \qquad 4\pi\sigma = R_1 = \frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{c}{D_2 D_3},$$

oder

$$3b) \qquad 4\pi\sigma = \frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\frac{c p_1}{P_1}.$$

Daraus folgt für die auf einem Segmente, welches durch eine Ebene $x = a$ von einer Schale eines Hyperboloids abgeschnitten wird, vorhandene Electricitätsmenge

$$4) \qquad Q = \frac{c}{2}\frac{V_1 - V_2}{\alpha_1 - \alpha_2}\left(\frac{a}{\lambda_1} - 1\right).$$

Eine ganze Schale enthält also eine unendlich grosse Electricitätsmenge.

Grenzfälle erhalten wir für

1) $\alpha = F(k)$, die Schale wird zu einem Stück der xz Ebene, welches sich auf der positiven Seite des positiven Hyperbelarms, dessen Gleichung

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$$

ist, befindet

2) $\alpha = 0$, die Fläche geht in die yz Ebene über.

3) $\alpha = -F(k)$, die Schale wird zu einem auf der negativen Seite des negativen Arms der angeführten Hyperbel liegenden Stück der xz Ebene.

Digitized by Google

Einschalige Hyperboloide.

Die Gleichung $\beta = \text{const.}$ bestimmt ein einschaliges Hyperboloid. Wird also das electrische Feld durch zwei confocale einschalige Hyperboloide begrenzt, denen die Parameter β_1 bezüglich β_2 angehören, und welche zu den Potentialen V_1 bezüglich V_2 geladen sind, so hat man

$$V = A + B\beta$$

zu setzen, und die weitere Rechnung in ganz derselben Weise zu führen, wie beim zweischaligen Hyperboloid.

Auch hier gelangt man zu dem Resultat, dass die Flächendichte der Electricität in einem Punkte eines der Hyperboloide proportional ist der Länge des Lotes vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene in dem betreffenden Punkte, und dass auf einer Schale eine unendlich grosse Menge Electricität ausgebreitet ist.

Von Grenzfällen hebe ich die folgenden hervor.

1) $\beta = 0$, die Fläche geht in den Teil der xz Ebene über, welcher zwischen den beiden Zweigen der Hyperbel

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2 - b^2} = 1$$

sich befindet.

2) $\beta = F(k')$, die Fläche geht in den Teil der xy Ebene über, welcher von der Ellipse

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1$$

ausgeschlossen wird.

Ellipsoide.

Für ein Ellipsoid ist γ der constante Parameter. Wird also das electrische Feld durch zwei confocale Ellipsoide $\gamma = \gamma_1$ und $\gamma = \gamma_2$ begrenzt, deren Potentiale V_1 bezüglich V_2 sind, so haben wir

1) $$V = \frac{\gamma_1 V_2 - \gamma_2 V_1 + \gamma(V_1 - V_2)}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

Die Flächendichte der Electricität in einem Punkte eines Ellipsoids ist

2) $$\sigma_1 = -\frac{1}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{\gamma_1 - \gamma_2} \frac{c p_3}{P_3} = -\sigma_2,$$

wo p_3 die Länge des vom Mittelpunkt auf die Tangentialebene des Ellipsoides in dem betreffenden Punkte gefällten Lotes ist, und P_3 das Product aus den Halbaxen bezeichnet.

Digitized by Google

Die Ladung jedes der Ellipsoide ist gegeben durch

$$3) \qquad Q_2 = -Q_1 = c\frac{V_1 - V_2}{\gamma_1 - \gamma_2}.$$

Q_1 und Q_2 sind also endliche Grössen.

Für ein unendlich grosses Ellipsoid ist $\gamma = F(k)$. Setzen wir also $V_2 = 0$ und $\gamma_2 = F(k)$, so haben wir es mit einem Ellipsoid γ_1 in einem unendlich ausgedehnten electrischen Felde zu tun. Die auf demselben befindliche Electricitätsmenge ist dann gleich

$$3_1) \qquad Q = c\frac{V_1}{F(k) - \gamma_1}.$$

Haben wir zugleich $\gamma_1 = 0$, so geht die Fläche des Ellipsoides in den von der Ellipse

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2 - b^2} = 1$$

eingeschlossenen Teil der xy Ebene über. Man erhält so eine elliptische Platte mit den Halbaxen c und $\sqrt{c^2 - b^2}$ und von der Excentricität k.

Für die Flächendichte der Electricität in einem Punkte (x, y) haben wir für jede Seite der Platte

$$2_2) \qquad \sigma = \frac{V_1}{4\pi F(k)\sqrt{c^2 - b^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{c^2} - \frac{y}{c^2 - b^2}}},$$

und für die Ladung

$$3_2) \qquad Q = c\frac{V_1}{F(k)}.$$

Besondere Fälle.

151. Bleibt c endlich, während b, also auch k fortdauernd bis Null abnimmt, so wird in jedem der zweischaligen Hyperboloide die reelle Axe und eine der imaginären Axen immer kleiner, bis schliesslich jedes Hyperboloid in zwei in der z Axe sich schneidende Ebenen übergeht. Die Grösse α wird gleich ϑ, und man erhält als Gleichung des Systems der meridionalen Ebenen, in welches das System der confocalen zweischaligen Hyperboloide übergegangen ist,

$$1) \qquad \frac{x^2}{\sin^2\alpha} - \frac{y^2}{\cos^2\alpha} = 0.$$

Aus der Grösse β würde in diesem Falle (Art. 147, 5a)

$$\beta = \int_0^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\lambda_2\sqrt{c^2 - \lambda_2^2}}$$

Digitized by Google

werden. Für die untere Grenze wird aber das Integral unendlich gross, deshalb führe ich eine neue Definition für β ein, indem ich setze

$$\beta = \int_{\lambda_2}^{c} \frac{c\,d\lambda_2}{\lambda_2 \sqrt{c^2-\lambda_2^2}}.$$

Nach den Gleichungen unter b) in Art. 148 wird dann

$$\beta = \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \log \cot \tfrac{1}{2}\varphi.$$

Definiren wir umgekehrt φ durch β, so erhalten wir

$$\cos\varphi = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{e^{\beta} + e^{-\beta}}$$

$$\sin\varphi = \frac{2}{e^{\beta} + e^{-\beta}}.$$

Bekanntlich bezeichnet man die Grösse $(e^{\beta} + e^{-\beta})/2$ als den hyperbolischen Cosinus von β und die $(e^{\beta} - e^{-\beta})/2$ als den hyperbolischen Sinus von β. Führt man entsprechende Definitionen für die hyperbolische Tangente, Cotangente, Secante und Cosecante ein und unterscheidet die hyperbolischen Functionen von den gewöhnlichen trigonometrischen durch Anhängung eines h an die Symbole dieser, so wird

$$\cos\varphi = \operatorname{tgh}\beta,$$
$$\sin\varphi = \operatorname{sech}\beta.$$

Die Gleichung des Systems der einschaligen Hyperboloide geht also über in

$$2) \qquad \frac{x^2+y^2}{\operatorname{sech}^2\beta} - \frac{z^2}{\operatorname{tgh}^2\beta} = c^2.$$

Weiter wird für $b = 0$ das $\gamma = \psi$, also

$$\lambda_3 = c \sec\gamma,$$

und die Gleichung des Systems der Ellipsoide geht über in

$$3) \qquad \frac{x^2+y^2}{\sec^2\gamma} + \frac{z^2}{\operatorname{tg}^2\gamma} = c^2.$$

Die Ellipsoide sind also abgeplattete Rotationsellipsoide mit der Aequatorialaxe $2c\sec\gamma$ und der Polaraxe $2c\operatorname{tg}\gamma$.

Digitized by Google

Die auf einem solchen abgeplatteten Rotationsellipsoid enthaltene Electricitätsmenge ist

4) $$Q = c\frac{V}{\frac{1}{2}\pi - \gamma}.$$

Für $\gamma = 0$ wird das Ellipsoid zur Kreisscheibe vom Radius c, und man erhält dann

$$\sigma = \frac{V}{2\pi^2\sqrt{c^2 - r^2}},$$

$$Q = c\frac{V}{\frac{1}{2}\pi}.$$

152. Als zweiten Fall setzen wir $b = c$. Es wird dann $k = 1$ und $k' = 0$, also

$$\alpha = \log \operatorname{tg}\frac{\pi + 2\vartheta}{4},$$

$$\lambda_1 = c \operatorname{tgh}\alpha.$$

Die zweischaligen Hyperboloide gehen in zweischalige Rotationshyperboloide über, deren Gleichungen durch

1) $$\frac{x^2}{\operatorname{tgh}^2\alpha} - \frac{y^2 + z^2}{\operatorname{sech}^2\alpha} = c^2$$

dargestellt werden.

Ferner wird $\beta = \varphi$, und jedes der einschaligen Hyperboloide geht in ein Ebenenpaar über, dessen Componenten sich in der x Axe schneiden und zur Gleichung

2) $$\frac{y^2}{\sin^2\beta} - \frac{z^2}{\cos^2\beta} = 0$$

haben. Es entsteht so ein System von Meridianebenen, deren gemeinschaftliche Axe die x Axe ist und die sich durch ihre Länge β von einander unterscheiden. Nach der Definition unter 5a) in Art. 147 wird γ für $b = c$ unendlich gross. Ich definire daher diese Grösse in anderer Weise, indem ich setze

$$\gamma = \int_{\lambda_3}^{\infty} \frac{c\,d\lambda_3}{\lambda_3^2 - c^2}.$$

Machen wir dann $\lambda_3 = c\sec\psi$, so wird

$$\gamma = \int_{\psi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sin\psi} = \log\cot\frac{\psi}{2},$$

also

$$\lambda_3 = c\coth\gamma.$$

Digitized by Google

Damit geht die Gleichung für das System der Ellipsoide über in

$$3) \qquad \frac{x^2}{\coth^2\gamma} + \frac{y^2+z^2}{\operatorname{cosech}^2\gamma} = c^2,$$

und zeigt ein System confocaler verlängerter Rotationsellipsoide an.

Die Electricitätsmenge eines solchen verlängerten Rotationsellipsoids ist gleich

$$4a) \qquad Q = \frac{cV}{\log\cot\frac{\psi_0}{2}},$$

wo $c\sec\psi_0$ gleich der Länge der Rotationsaxe ist. Hat also das Ellipsoid A zur Polarhalbaxe und B zur Aequatorialhalbaxe, so wird

$$4b) \qquad Q = V\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{\log\frac{A+\sqrt{A^2-B^2}}{B}}.$$

Ist B verhältnismässig klein gegen A, so wird das Ellipsoid sehr gestreckt und geht in einen Stab mit kreisförmigem Querschnitt und abgerundeten Enden über. Die Electricitätsmenge wird dann

$$4_1) \qquad Q = \frac{AV}{\log 2A - \log B}.$$

Wenn ausserdem, dass $b = c$ ist, auch noch die Gleichung $b = c = 0$ stattfindet, so erhalten wir zwei Systeme confocaler Kegel und ein System concentrischer Kugeln, deren Radien umgekehrt proportional der Grösse γ variiren, falls das Verhältnis von b zu c von Null verschieden und endlich ist.

Ist aber $b/c = 0$ oder gleich 1, so besteht ein System von Flächen aus Meridianebenen, das zweite aus geraden Kegeln mit gemeinschaftlicher Axe und das dritte wieder aus concentrischen Kugeln mit Radien, die im umgekehrten Verhältnis zu ihren Parametern γ stehen.

Die letztern drei Flächensysteme dienen zur Definition der sphärischen Polarcoordinaten.

Cylindrische Flächen.

153. Ist c unendlich gross, so gehen die Flächen in cylindrische Flächen über, deren erzeugende Linien parallel der z Axe laufen.

Ein System hyperbolischer Cylinder entsteht durch die Degenerirung der zweischaligen Hyperboloide, und da für $c = \infty$ das $k = 0$ und $\vartheta = \alpha$ wird, so erhalten wir als Gleichung dieses Systems

$$1) \qquad \frac{x^2}{\sin^2\alpha} - \frac{y^2}{\cos^2\alpha} = b^2.$$

Digitized by Google

Im zweiten System wird

$$\beta = \int_b^{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{\sqrt{\lambda_2^2 - b^2}}$$

also $\lambda_2 = b \cosh \beta$, und

2) $$\frac{x^2}{\cosh^2 \beta} + \frac{y^2}{\sinh^2 \beta} = b^2$$

repräsentirt das zweite aus elliptischen Cylindern bestehende System.

Im dritten wird $\lambda_3 = \infty$ und

3) $$z^2 = (\lambda_3^2 - c^2).$$

Das System besteht also aus parallelen zu beiden Seiten der xy Ebene senkrecht zur z Axe verlaufenden Ebenen.

Die Curven auf Tafel XI. stellen einen Durchschnitt der beiden ersten Flächensysteme mit einer Fläche des dritten Systems, also mit einer zur z Axe senkrechten Ebene dar.

Confocale Paraboloide.

154. Wir transformiren die allgemeine Gleichung confocaler Flächen zweiten Grades, indem wir den Coordinatenursprung auf der x Axe um die Grösse t verschieben. Setzen wir für x, λ, b, c die neuen Werte $x + t$, $\lambda + t$, $b + t$, $c + t$, und lassen t bis ins Unendliche wachsen, so geht die allgemeine Gleichung über in

1) $$4(x - \lambda) + \frac{y^2}{\lambda - b} + \frac{z^2}{\lambda - c} = 0.$$

Sie stellt ein System von Paraboloiden dar, deren Brennpunkte im $x = b$ und $x = c$ liegen.

Wir verstehen speciell unter λ den Parameter elliptischer Paraboloide, unter μ den hyperbolischer Paraboloide und unter ν den elliptischer Paraboloide der zweiten Art, so dass

$$\lambda < b < \mu < c < \nu$$

ist. Für einen Durchschnittspunkt dieser drei Flächenarten haben wir dann

2a) $$\begin{aligned} x &= \lambda + \mu + \nu - c - b, \\ y^2 &= 4\frac{(b-\lambda)(\mu-b)(\nu-b)}{c-b}, \\ z^2 &= 4\frac{(c-\lambda)(c-\mu)(\nu-c)}{c-b}, \end{aligned}$$

Digitized by Google

Ferner setzen wir, um unendlich grossen Werten, die wir bei der frühern in Art. 147 gegebenen Definition für α, β, γ in unserm Fall erhalten würden, aus dem Wege zu gehen,

$$\alpha = \int_{\lambda}^{b} \frac{d\lambda}{\sqrt{(b-\lambda)(c-\lambda)}},$$

3)
$$\beta = \int_{b}^{\mu} \frac{d\lambda}{\sqrt{(\mu-b)(c-\mu)}},$$

$$\gamma = \int_{c}^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{(\nu-b)(\nu-c)}},$$

woraus sich ergiebt

4)
$$\begin{aligned} \lambda &= \tfrac{1}{2}(c+b) - \tfrac{1}{2}(c-b)\cosh\alpha, \\ \mu &= \tfrac{1}{2}(c+b) - \tfrac{1}{2}(c-b)\cos\beta, \\ \nu &= \tfrac{1}{2}(c+b) + \tfrac{1}{2}(c-b)\cosh\gamma, \end{aligned}$$

also

$$x = \frac{1}{2}(c+b) + \frac{1}{2}(c-b)(\cosh\gamma - \cos\beta - \cosh\alpha)$$

2b)
$$y = 2(c-b)\sinh\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cosh\frac{\gamma}{2},$$

$$z = 2(c-b)\cosh\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sinh\frac{\gamma}{2}.$$

Für $b=c$ erhalten wir Rotationsparaboloide mit der x Axe als Rotationsaxe, und es wird

$$\begin{aligned} x &= a(e^{2\alpha} - e^{2\gamma}), \\ y &= 2a\,e^{\alpha+\gamma}\cos\beta, \\ z &= 2a\,e^{\alpha+\gamma}\sin\beta. \end{aligned}$$

Die Flächen $\alpha = \text{const}$ sind, wie schon bemerkt, confocale Paraboloide, die sich, wenn $\alpha = -\infty$ wird, auf gerade Linien, die im Coordinatenanfang ihr Ende finden, reduciren.

Die Flächen $\beta = \text{const}$ sind Ebenen, welche alle durch die x Axe gehen, und deren Neigung gegen eine die x Axe enthaltende feste Ebene durch die Grösse β ausgedrückt wird.

Man kann auch die Werte der α, β, γ durch sphärische Polarcoordinaten ausdrücken, deren Ursprung im Brennpunkt sich befindet, und deren Axe mit der der Paraboloide zusammenfällt. Man hat so

$$\begin{aligned} \alpha &= \log(r^{\frac{1}{2}}\cos\tfrac{1}{2}\vartheta), \\ \beta &= \varphi, \\ \gamma &= \log(r^{\frac{1}{2}}\sin\tfrac{1}{2}\vartheta). \end{aligned}$$

Digitized by Google

Das Potential $V = \alpha$ lässt sich mit dem Potential, das durch eine zonale harmonische Raumfunction $r^i Q_i$ dargestellt wird, vergleichen. Beide Potentiale genügen der Laplaceschen Gleichung und beide sind homogene Functionen von x, y, z. Im erstern Falle tritt aber an der Axe eine Discontinuität ein und i fällt mit Null zusammen.

Die Flächendichte in einem Punkt eines Paraboloids, das sich in einem unendlichen electrischen Felde befindet, ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus dem Radiusvector des Punktes (seinem Abstande vom Brennpunkte). Geht das Paraboloid in eine nach einer Seite sich ins Unendliche erstreckende gerade Linie über, so fällt der Brennpunkt in den Anfang der Linie, die Dichtigkeit der Electricität in einem Punkte einer solchen Linie ist also umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Strecke vom Anfang der Linie bis zu dem betreffenden Punkt.

Digitized by Google

Cap. XI.

Theorie der electrischen Bilder und der electrischen Inversion.

—×—

155. Ein anderes Mittel zur Lösung electrischer Probleme liefert uns die Theorie der electrischen Bilder und der electrischen Inversion.

Wir haben schon gesehen, dass, wenn sich eine leitende Kugel unter dem Einflusse bestimmt verteilter electrischer Agentien befindet, man stets mit Hilfe harmonischer Kugelfunctionen die Verteilung der Electricität auf der Kugelfläche und das Potential auf Punkte ausserhalb derselben bestimmen kann. Man hat dazu das Potential des influencirenden Systems in eine nach harmonischen Raumfunctionen positiven Grades fortschreitende Reihe zu entwickeln, aus der sich dann unmittelbar eine andere nach harmonischen Raumfunctionen negativen Grades fortschreitende Reihe ergiebt, welche das Potential der influencirten Kugel auf ausserhalb derselben gelegene Punkte darstellt (Art. 144a).

Nach dieser in ihrer Anwendbarkeit mächtigen Analyse hat Poisson die Electrisirung einer Kugel, die unter dem Einflusse eines gegebenen electrischen Systems steht, bestimmt und auch noch das schwierigere Problem der Berechnung der Verteilung der Electricität auf zwei gleichzeitig im electrischen Felde vorhandenen Kugeln gelöst. Plana und andere haben dann die Poissonschen Untersuchungen weiter verfolgt und seine Resultate bestätigt.

Im einfachsten Falle, wenn eine Kugel durch einen electrischen Punkt influencirt wird, hat man also das Potential dieses Punktes nach Kugelfunctionen zu entwickeln und daraus dann die entsprechende Reihe von Kugelfunctionen abzuleiten, die das Potential der Kugel auf Punkte ausserhalb ihrer Oberfläche darstellt.

Bildet man nun diese zweite Reihe harmonischer Kugelfunctionen, also das Potential der influencirten Kugelfläche, so zeigt sich, dass die Wirkung der durch den ursprünglichen electrischen Punkt inducirten Electricität auf ausserhalb der Kugel gelegene Punkte vollständig durch die eines imaginären,

Digitized by Google

innerhalb der Kugel befindlichen electrischen Punktes ersetzt werden kann. Der eben genannte Punkt hat keine reelle Existenz, man nennt ihn das *Electrische Bild* des die Kugel influencirenden Punktes.

Diese Aequivalenz zwischen der Wirkung einer durch einen electrischen Punkt influencirten Kugelfläche und der des electrischen Bildes des influencirenden Punktes scheint vor W. Thomson von keinem Mathematiker bebemerkt worden zu sein.

W. Thomson deducirte aber aus derselben eine äusserst wirksame Methode zur Lösung electrischer Pfobleme und zur elementaren geometrischen Darstellung der erhaltenen Resultate.

Seine ersten diesbezüglichen Untersuchungen sind in dem *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* vom Jahre 1848 enthalten und noch ganz in der Terminologie der gewöhnlichen Theorie der Wirkung in die Ferne durchgeführt. Er macht in seiner ersten Abhandlung noch keinen Gebrauch vom Potential und ebensowenig von den in Cap. IV auseinandergesetzten Lehrsätzen, wenn er auch wahrscheinlich gerade durch den Begriff des Potentials zu seiner Entdeckung geführt worden ist.

Ich werde aber bei der Wiedergabe seiner Theorie der electrischen Bilder nicht der Methode des Autors folgen, sondern von den Begriffen des Potentials und der Niveauflächen überall, wo die Untersuchung durch ihre Einführung an Klarheit gewinnt, den freiesten Gebrauch machen.

Theorie der electrischen Bilder.

156. Es seien (Fig. 6) A und B zwei in einem gleichförmigen dielectrischen Medium von unendlicher Ausdehnung befindliche Punkte, welche die bezüglichen Electricitätsmengen e_1 und e_2 enthalten. Ihr Potential auf einen dritten Punkt P, der von A um r_1 und von B um r_2 absteht, ist

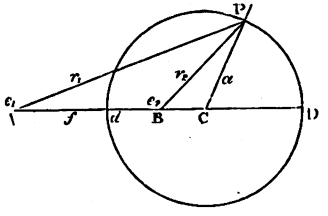


Fig. 6.

$$1) \qquad V = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}.$$

Ich habe schon in Art. 118 und 119 den Verlauf der äquipotentiellen Flächen für diesen Fall beschrieben und auf den Tafeln II. und III. Darstellungen von Schnitten durch diese Flächen für die Fälle gegeben, dass e_1 und e_2 gleiche bezüglich entgegengesetzte Zeichen haben. Hier interessirt uns nur eine äquipotentielle Fläche, nämlich die, für welche das Potential verschwindet. Die Gleichung dieser Fläche ist

$$1_1) \qquad \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} = 0.$$

Digitized by Google

Haben e_1 und e_2 dasselbe Zeichen, so kann sich die zugehörende Fläche nur in der Unendlichkeit befinden. Sind aber e_1 und e_2 entgegengesetzte Grössen, so wird jene Gleichung auch für in der Endlichkeit liegende Punkte erfüllbar. Sie stellt dann eine Kugel und im Grenzfall eine Ebene dar.

Der Mittelpunkt C der Kugel liegt auf der Verbindungslinie der beiden electrischen Punkte A und B und sein Abstand AC, BC von ihnen genügt der Gleichung

$$2) \qquad AC : BC = e_1^2 : e_2^2.$$

Der Radius der Kugel ist dann

$$3) \qquad Cd = AB \frac{e_1 e_2}{e_1^2 - e_2^2} = BC \frac{e_1}{e_2} = \sqrt{AC \cdot BC}.$$

Er ist also die mittlere Proportionale zu den Abständen der Punkte A und B vom Kugelmittelpunkt.

Die beiden Punkte A und B heissen in Bezug auf die Kugel *Inverse Punkte*. Hat die Kugel den Radius Eins, so bilden sie mit den auf der Kugel liegenden Punkten des durch sie gehenden Durchmessers ein harmonisches Punktsystem, in dem sie einander zugeordnet sind.

Da sich die eben bestimmte Kugelfläche auf dem Potential Null befindet, so können wir sie uns durch eine dünne zur Erde abgeleitete Metallkugelfläche ersetzt denken. Wir ändern dadurch das Potential weder in dem von ihr eingeschlossenen noch in dem von ihr ausgeschlossenen Raum, vielmehr bleibt die electrische Wirkung stets von der Grösse, wie sie durch die alleinige Existenz der beiden electrischen Punkte bedingt wird.

Entfernen wir jetzt den innerhalb der Kugel befindlichen Punkt B, während diese noch mit der Erde in Verbindung bleibt, so sinkt das Potential in allen Punkten innerhalb der Kugel auf Null herab, ausserhalb der Kugel aber bleibt es ungeändert, weil erstens die Kugel ihr früheres Potentialniveau Null beibehalten hat und zweitens der electrische Punkt A in seiner ursprünglichen Lage geblieben ist.

Aus dieser Betrachtung ergiebt sich das Resultat:

Liegt ein electrischer Punkt ausserhalb eines kugelförmigen auf dem Potential Null erhaltenen Conductors, so ist seine electrische Wirkung auf ausserhalb des Conductors befindliche Punkte zusammen mit der Wirkung der durch ihn in dem Conductor inducirten Electricität ebenso gross wie seine Wirkung zusammen mit der eines innerhalb des Conductors befindlichen Punktes, den wir als sein electrisches Bild bezeichnen können.

Liegt der electrische Punkt innerhalb des Conductors, so ist seine electrische Wirkung auf innerhalb des Conductors befindliche Punkte zu-

Digitized by Google

sammen mit der Wirkung des inducirten Conductors ebenso gross wie seine Wirkung zusammen mit der eines ausserhalb des Conductors befindlichen und als electrisches Bild bezeichneten electrischen Punktes.

Fassen wir die bisherigen Resultate zusammen und verallgemeinern sie noch dadurch, dass wir statt der Kugel irgend eine Fläche zu Grunde legen, so haben wir die folgende Definition.

157. *Definition eines electrischen Bildes.* Befindet sich ein System von electrischen Punkten auf einer Seite einer Fläche, so ist sein electrisches Bild mit Bezug auf diese Fläche ein System electrischer auf der andern Seite der Fläche gelegener Punkte, welches auf der Seite der Fläche, wo das ursprüngliche electrische System sich befindet, in jeder Hinsicht ganz dieselbe Wirkung ausübt, wie die auf der Fläche selbst tatsächlich vorhandene Electricität.

In der Optik bezeichnet man bekanntlich ein auf der einen Seite eines Spiegels oder einer Linse gelegenes Punktsystem, welches, wenn es existirte, auf der andern Seite des Spiegels bezüglich der Linse dieselben Strahlen hervorbringen würde, welche dort tatsächlich vorhanden sind, als ein virtuelles Bild.

Electrische Bilder entsprechen also solchen virtuellen optischen Bildern insofern, als ihre Wirkung in Räumen betrachtet wird, in denen sie nicht existiren, die also von ihren imaginären Aufenthaltsorten durch Flächen getrennt sind. Sie entsprechen ihnen aber nicht in der wirklichen Lage, und sie können auch nicht, wie jene es wenigstens näherungsweise vermögen, in Brennpunkten vereinigt auftreten.

Während ferner optische Bilder wirklich im Raume existiren können, giebt es keine reellen electrischen Bilder, das heisst keine imaginären electrischen Punkte, welche auf derselben Seite der Fläche, auf der auch ihr imaginärer Aufenthaltsort sich befindet, dieselbe Wirkung wie die electrische Fläche ausüben.

Denn, wenn das Potential in einem bestimmten Gebiete gleich dem durch ein gewisses electrisches System hervorgebrachten Potential ist, so ist es eben das Potential dieses Systems allein, und keines andern, und dieses System muss eine reelle Existenz haben, weil man mit Hilfe der Poisson-Laplaceschen Gleichung die Electricitätsmenge in jedem Punkte des electrischen Systems eindeutig und reell bestimmen kann.

Es sei nunmehr a der Radius der Kugel und f der Abstand eines Punktes A, welcher die Electricitätsmenge e enthält, von ihrem Mittelpunkt. Das Bild B des Punktes A liegt auf dem zu A führenden Radius, ist vom Mittelpunkt der Kugel um

1) $$BC = \frac{a^2}{f}$$

entfernt und besitzt eine Electricitätsmenge von der Grösse

2) $$e_1 = -e\frac{a}{f}.$$

Digitized by Google

Dieses Bild wirkt, wie wir wissen, ausserhalb bezüglich innerhalb der Kugel (je nachdem es sich innerhalb bezüglich ausserhalb derselben befindet) wie die Kugel selbst, und das setzt uns in den Stand, die Verteilung der Electricität auf der Kugel zu bestimmen.

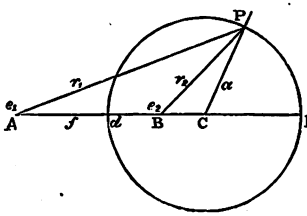


Fig. 7.

Nach der Coulombschen Gleichung (Art. 80) ist die resultirende Kraft R an einer Stelle der Oberfläche eines Conductors, wo die Electricität die Dichte σ hat,

$$R = 4\pi\sigma,$$

falls eine Kraft als positiv gerechnet wird, wenn sie von der Fläche fort wirkt.

Die Kraft R setzt sich aber aus zwei Teilen zusammen, einem Teile, der dem Punkte A seine Entstehung verdankt, längs der Linie AP wirkt und die Grösse e/AP^2 hat, und einem zweiten, dem Zeichen nach diesem entgegengesetzten, der von der Wirkung des Bildes B von A herrührt, in Richtung von BP wirkt und von der Grösse ea/fPB^2 ist.

Zerlegen wir jede dieser beiden Partialkräfte nach AC und CP, so hat die erste Kraft die Componenten

$$\frac{ef}{AP^3} \text{ in der Richtung } AC \text{ und } \frac{ea}{AP^3} \text{ in der Richtung } CP.$$

Die entsprechenden Componenten der zweiten Kraft sind

$$-e\frac{a}{f}\frac{BC}{BP^3} \text{ nach } AC \text{ und } -e\frac{a^2}{f}\frac{1}{BP^3} \text{ nach } CP.$$

Es ist aber

$$BP = \frac{a}{f}AP, \quad BC = \frac{a^2}{f},$$

und damit werden die Componenten der letztern Kraft

$$-ef\frac{1}{AP^3} \text{ in Richtung von } AC \text{ und } -e\frac{f^2}{a}\frac{1}{AP^3} \text{ in Richtung von } CP.$$

Die in Richtung AC wirkenden Componenten der Partialkräfte heben sich auf, so dass die gesammte Kraft den Punkt P in Richtung des Radius CP angreift. Hieraus folgt zunächst, dass die Kugelfläche wirklich eine Niveaufläche ist, denn an einer äquipotentiellen Fläche wirken die Kräfte überall senkrecht zu ihr.

Die resultirende Kraft in P wirkt also in Richtung von CP nach der Seite der Kugel, auf welcher der ursprüngliche electrische Punkt A sich befindet, und ihre Grösse ist

$$3_1) \qquad R = -e\frac{f^2 - a^2}{a}\frac{1}{AP^3},$$

Digitized by Google

wenn A ausserhalb und

$$3_2) \qquad R = -e\frac{a^2-f^2}{a}\frac{1}{AP^3},$$

wenn A innerhalb der Kugel liegt.

In der Form

$$3) \qquad R = -e\frac{AD.\,Ad}{CP}\frac{1}{AP^3},$$

wo D, d die Schnittpunkte der Kugel mit irgend einer von A aus durch die Kugel gezogenen Linie bezeichnen, braucht man keinen Unterschied zwischen den Fällen zu machen, wo der Punkt A ausserhalb oder innerhalb der Kugel liegt, weil $AD.\,Ad$ stets positiv ist.

158. Aus dem angeführten Coulombschen Satz ergiebt sich nunmehr die Flächendichte der Electricität im Punkte P der Kugel

$$4) \qquad \sigma = -\frac{e}{4\pi}\frac{AD.\,Ad}{CP}\frac{1}{AP^3},$$

woraus folgt, dass die Flächendichte in den einzelnen auf ein und derselben Kugel gelegenen Punkten umgekehrt proportional der dritten Potenz ihrer Entfernung vom electrischen Punkt A ist.

Die gesammte auf der Kugel vorhandene Electricitätsmenge ist, wie man leicht findet,

$$5) \qquad E = -e\frac{a}{f}.$$

Um es nochmals zu wiederholen, so bringt die so auf der Kugel verteilte Electricität zusammen mit der Ladung des Punktes A auf Punkte, die mit A auf derselben Seite der Kugel liegen, dieselbe Wirkung hervor, wie die Ladung des Punktes A zusammen mit einer Electricitätsmenge $-ea/f$, welche sich in einem vom Centrum der Kugel um a^2/f entfernten Punkte B befindet, der auf der Verbindungslinie des Punktes A mit dem Kugelmittelpunkt liegt. Die Electricität der Kugel für sich wirkt also, wenn sie auf derselben so verteilt ist, wie die Gleichung 4) vorschreibt, auf Punkte, die mit A auf derselben Seite der Fläche liegen, ebenso wie das mit der Electricitätsmenge $-ea/f$ geladene Bild von A.

Damit erhalten wir die folgenden Sätze.

Wenn Electricität auf einer Kugel vom Radius a so verteilt ist, dass ihre Flächendichte in irgend einem Punkte P umgekehrt proportional dem Cubus der Entfernung dieses Punktes von einem festen Punkt A ist, dass also

$$\sigma = \frac{C}{AP^3}$$

ist, so giebt

$$6) \qquad -e = \frac{4\pi a\,C}{AD.\,Ad}$$

Digitized by Google

die Electricitätsmenge, welche im festen Punkt A concentrirt gedacht, auf der Kugel durch Influenz jene Verteilung hervorbringen würde.

Die Wirkung der so auf der Kugelfläche verteilten Electricität auf Punkte, die durch sie von A getrennt sind, ist ebenso gross wie die der im Punkte A concentrirt gedachten Electricitätsmenge

7) $$-e = \frac{4\pi a C}{AD \,.\, Ad}.$$

Ihre Wirkung auf Punkte, die mit A auf derselben Seite der Kugel liegen, ist ebenso gross wie die einer in dem Bilde von A concentrirt gedachten Electricitätsmenge

8) $$e_1 = \frac{4\pi a^2 C}{f \,.\, AD \,.\, Ad}.$$

Die gesammte auf der Kugel verteilte Electricitätsmenge ist gleich

9_1) $$E_1 = \frac{4\pi a C}{AD \,.\, Ad},$$

wenn A innerhalb der Kugel liegt, und gleich

9_2) $$E_2 = \frac{4\pi a^2 C}{f \,.\, AD \,.\, Ad},$$

wenn A ausserhalb derselben sich befindet.

All diese Sätze sind zuerst von W. Thomson in seinen geometrischen Untersuchungen über die Verteilung der Electricität auf kugelförmigen Conductoren aufgestellt. Ich verweise den Leser auf die Originalabhandlung.

159. Wir untersuchen den allgemeinen Fall, dass eine Kugel statt unter dem Einflusse eines electrischen Punktes unter dem eines ganzen Systems von Punkten sich befindet.

Die Kugelfläche sei also leitend, habe den Radius a und befinde sich durch ihre Verbindung mit der Erde stets auf dem Potential Null.

Die electrischen Punkte bezeichne ich durch $A_1, A_2, \ldots$, ihre bezüglichen Entfernungen vom Mittelpunkt der Kugel durch $f_1, f_2, \ldots$, ihre Ladungen durch $e_1, e_2, \ldots$ und endlich ihre Bilder. mit Bezug auf die Kugel durch B_1, $B_2 \ldots$ Jedes Bild B_k befindet sich mit dem ihm zugehörigen electrischen Punkt A_k und dem Centrum der Kugel auf derselben Geraden. Die Entfernungen der Bilder vom Centrum sind

$$\frac{a^2}{f_1}, \frac{a^2}{f_2}, \ldots,$$

ihre bezüglichen Ladungen

$$-e_1\frac{a}{f_1}, \quad -e_2\frac{a}{f_2}, \ldots$$

Das Potential der durch Influenz der electrischen Punkte auf der Kugel verteilten Electricität ist dann auf Punkte, die mit den influencirenden

Digitized by Google

Punkten auf derselben Seite ihrer Oberfläche liegen, gleich dem Potential der Bilder der influencirenden Punkte.

Das System der einzelnen Bilder giebt also das Bild des Systems der influencirenden Punkte.

Man kann diese und alle vorhergehenden Betrachtungen leicht so abändern, dass sie ihre Geltung behalten, wenn das Potentialniveau der Kugel auch von Null verschieden ist.

Hat nämlich das Potentialniveau der Kugel den Wert V, so haben wir zu der influencirten Electricität noch eine andere hinzuzufügen, die mit gleichförmiger Dichte

$$\sigma_1 = \frac{V}{4\pi a}$$

auf der Kugel ausgebreitet ist.

Das Potential der Kugel ist dann in diesem Zustande in Punkten ausserhalb ihrer Oberfläche gleich dem Potential in ihrem frühern Zustande zusammen mit dem Potential einer in ihrem Mittelpunkt concentrirt gedachten Electricitätsmenge Va; das Potential auf Punkte innerhalb ihrer Oberfläche wächst um V an.

Die gesammte Electricitätsmenge der Kugel ist, wenn die influencirenden Punkte sich ausserhalb ihrer Oberfläche befinden,

$$10_1) \qquad E_1 = Va - e_1\frac{a}{f_1} - e_2\frac{a}{f_2} - \cdots$$

Kennt man eine der Grössen V oder E, so lässt sich die andere nach dieser Gleichung berechnen.

Liegen die influencirenden Punkte innerhalb der Kugeloberfläche, so wird die gesammte Electricitätsmenge der Kugel

$$10_2) \qquad E_2 = Va - e_1 - e_2 - \cdots$$

$-\Sigma e$ giebt die auf ihr inducirte Electricität an, die für jede geschlossene Fläche gleich und entgegengesetzt der inducirenden ist, wenn diese sich im Innern der Fläche befindet.

160.*) Bezeichnet man das Potentialniveau des electrischen Punktes A, wenn er als sehr kleine Kugel vom Radius b angesehen wird, mit v, verwendet für die Capacität der Kugel bezüglich des Punktes A die Buchstaben q_{aa}, q_{bb} und setzt den Inductionscoefficienten zwischen Kugel und Punkt gleich q_{ab}, so ist die electrische Energie dieser beiden Körper nach Art. 87, 1c)

$$W = \tfrac{1}{2}\{q_{aa}V^2 + 2q_{ab}Vv + q_{bb}v^2\}.$$

*) Diese Stelle ist in dem Original etwas dunkel, die Anmerkung, die der Herausgeber der zweiten engl. Aufl., Herr Niven, deshalb zu derselben gemacht hat, scheint mir aber nicht zutreffend zu sein, ich habe sie darum fortgelassen und den Anfang des Artikels etwas anders, ich hoffe etwas klarer, gefasst. Anm. d. Uebers.

Digitized by Google

Aus Art. 93 ergiebt sich hieraus für die zwischen dem Punkt und der Kugel wirkende Abstossungskraft

$$F = \tfrac{1}{2}\left\{ V^2 \frac{\partial q_{aa}}{\partial f} + 2\, Vv \frac{\partial q_{ab}}{\partial f} + v^2 \frac{\partial q_{bb}}{\partial f} \right\}.$$

Nun ist zwar v für einen Punkt unendlich gross von der Ordnung e/b, aber $v\partial q_{ab}/\partial f$ ist ebenso wie $v^2\partial q_{bb}/\partial f$ endlich. Man hat nämlich, wenn der Punkt ausserhalb der Kugel liegt, nach später in Art. 173 abzuleitenden Formeln

$$q_{aa} = a + \frac{a^2 b}{f^2 - b^2} + \cdots,$$

$$q_{ab} = -\frac{ab}{f} - \frac{a^2 b^2}{f(f^2 - a^2 - b^2)} - \cdots,$$

$$q_{bb} = b + \frac{b^2 a}{f^2 - a^2} + \cdots,$$

somit bis auf unendlich kleine Grössen

$$\frac{\partial q_{aa}}{\partial f} = 0, \quad v \frac{\partial q_{ab}}{\partial f} = \frac{ae}{f^2}, \quad v^2 \frac{\partial q_{bb}}{\partial f} = -\frac{2e^2 af}{(f^2 - a^2)^2}.$$

Hiernach wird

$$11_1) \qquad F_1 = ea\left(\frac{V}{f^2} - \frac{ef}{(f^2 - a^2)^2}\right) = \frac{e}{f^2}\left(E - e\frac{a^3(2f^2 - a^2)}{f(f^2 - a^2)^2}\right).$$

Die Kugel und der Punkt ziehen sich also an, wenn

1. die Kugel nicht isolirt ist,
2. die Kugel ausser der Influenzelectricität keine andere Ladung besitzt,
3. der electrische Punkt A der Kugelfläche hinlänglich kommt.

Soll jene Kraft in einer Repulsion bestehen, so muss das Potential der Kugel positiv und grösser sein als $ef^3/(f^2 - a^2)^2$, oder die Gesammtladung der Kugel muss mit e dasselbe Zeichen haben und einen grössern Betrag besitzen als $ea^3(2f^2 - a^2)/f(f^2 - a^2)^2$.

Im allgemeinen befindet sich im Felde eine Gleichgewichtsstelle, da aber Kugel und Punkt sich anziehen, wenn sie einander nahe kommen und sich abstossen, wenn sie sich von einander mehr entfernen, so kann A in diesem Punkte sich nur in einem labilen Gleichgewicht befinden.

Liegt der electrische Punkt innerhalb der Kugel, so ist die Grösse der auf ihn wirkenden Kraft

$$11_2) \qquad F_2 = \frac{e^2 af}{(a^2 - f^2)^2}.$$

Der Punkt wird dann stets vom Mittelpunkt fortgedrängt.

Befindet sich der influencirende Punkt wieder ausserhalb der Kugel, so ist die Flächendichte der Electricität in dem ihm nächsten Punkte der Kugel

Digitized by Google

$$12_1) \qquad \sigma_1 = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{Va - e\frac{a(f+a)}{(f-a)^2}\right\} = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{E - e\frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2}\right\}.$$

und in dem von ihm entferntesten

$$12_2) \qquad \sigma_2 = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{Va - e\frac{a(f-a)}{(f+a)^2}\right\} = \frac{1}{4\pi a^2}\left\{E + e\frac{a^2(3f+a)}{f(f+a)^2}\right\}.$$

Liegt die Gesammtladung E der Kugel zwischen

$$e\frac{a^2(3f-a)}{f(f-a)^2} \text{ und } -e\frac{a^2(3f+a)}{f(f+a)^2},$$

so ist die Electricität negativ an der dem influencirenden Punkte A nächsten und positiv in der von ihm entferntesten Stelle der Kugel.

Es giebt dann auf der Kugel eine kreisförmige Linie, welche die beiden Electricitätsarten von einander trennt, und die in Folge dessen eine Gleichgewichtslinie sein muss.

Ist speciell

$$E = ea\left(\frac{1}{\sqrt{f^2-a^2}} - \frac{1}{f}\right),$$

so wird die Gleichgewichtslinie durch die Schnittcurve der Kugel mit einer andern äquipotentiellen Kugel gebildet. Der Mittelpunkt dieser zweiten Kugel liegt in A, und der Radius derselben ist gleich $\sqrt{f^2-a^2}$.

Die in Art. 121 beschriebene Figur auf Tafel V. soll dem Leser einen Begriff von dem Verlauf der äquipotentiellen Flächen und der Kraftlinien, die sich in diesem Falle ausbilden, geben.

Abbildung in einer leitenden unendlichen Ebene.

161. Wenn zwei Punkte gleich stark, aber entgegengesetzt electrisirt sind, so ist die Niveaufläche mit dem Potentialniveau Null eine Ebene, welche zwischen beiden Punkten hindurch geht, und deren Elemente ebenso weit von dem einen wie von dem andern electrischen Punkte abstehen.

Ist also A ein mit der Electricitätsmenge e geladener, in der Entfernung AD von einer leitenden und mit der Erde verbundenen Ebene liegender Punkt, so befindet sich sein Bild mit Bezug auf diese Ebene in einem Punkte B, der von ihm durch die Ebene getrennt ist, auf dem von A auf die Ebene gefällten Lote liegt, von dieser Ebene ebensoweit absteht wie A und die Electricitätsmenge $-e$ enthält. Dieses Bild wirkt auf alle von ihm durch die leitende Ebene getrennten Punkte, ganz ebenso wie die durch A auf der Ebene influenzirte Electricität. Denn erstens erfüllt das Gesammtpotential von A und B in allen Punkten, die mit A auf derselben Seite der Ebene sich befinden,

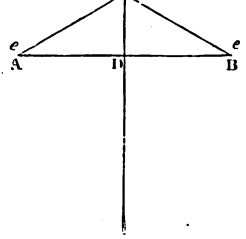


Fig. 8.

Digitized by Google

mit Ausnahme von A selbst, die Laplacesche Gleichung, und zweitens verschwindet dieses Gesammtpotential auf der Ebene. Die Bedingung, dass eine Function der Laplaceschen Gleichung genügt und auf einer vorgeschriebenen Fläche einen vorgeschriebenen Wert annimmt, genügt aber zur eindeutigen Bestimmung derselben.

Jedes Element P der Ebene wird von zwei Kräften angegriffen, die in den Richtungen AP bezüglich PB wirken und numerisch gleich $e/AP^2 = e/PB^2$ sind. Die resultirende Kraft wirkt also in Richtung von AB und ist der Grösse nach gleich

$$\frac{e}{AP^2}\,\frac{AB}{AP}.$$

Rechnet man die Kraft als positiv, wenn sie nach der Seite des Raumes wirkt, wo A liegt, und beachtet, dass $AB = 2\,AD$ ist, so folgt für dieselbe

1) $$R = -\frac{2eAD}{AP^3},$$

damit wird die Dichte der im Punkte P der Ebene durch A inducirten Electricität nach der Coulombschen Gleichung

2) $$\sigma = -\frac{eAD}{2\pi AP^3}.$$

Inversion.

162. Die Theorie der electrischen Bilder führt, wie ich im Folgenden zeigen will, unmittelbar zu einer besondern Transformation, die uns gestattet, aus einem electrischen Problem, dessen Lösung wir besitzen, eine Reihe anderer Probleme gleichzeitig mit ihren Auflösungen abzuleiten.

Bezeichnet r den Abstand eines electrischen Punktes vom Mittelpunkt einer mit dem Radius R geschlagenen Kugel, und giebt r' den Abstand seines Bildes (das sich auf demselben Radius wie der Punkt befindet) ebenfalls vom Mittelpunkt der Kugel, so gilt die Relation

a_1) $$rr' = R^2.$$

Man erhält also das Bild eines Systems von Punkten, Linien oder Flächen durch eine Constructionsmethode, die in der reinen Geometrie unter dem Namen der *Inversion* (Methode der reciproken Radien) bekannt und von Chasles, Salmon und andern Mathematikern behandelt worden ist.

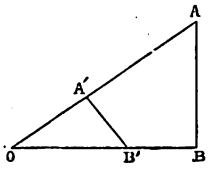


Fig. 9.

Sind A und B zwei electrische mit den Electricitätsmengen e, e_1 geladene Punkte, A' und B' ihre bezüglichen die Electricitätsmengen e', e_1' enthaltenden Bilder und O der Mittelpunkt der zugehörigen Kugel, so ergiebt sich aus der Gleichung unter a_1)

a) $$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = R^2.$$

Digitized by Google

Die Dreiecke OAB und $OB'A'$ sind also einander ähnlich und geben unter Zuhilfenahme der Gleichung a) die Doppelproportion

b) $$AB : A'B' = OA : OB' = OA \,.\, OB : R^2.$$

Ist V das Potential von A in B und V' das Potential von A' in B', so haben wir

$$V = \frac{e}{AB}, \quad V' = \frac{e}{A'B'}.$$

Da aber A', B' Bilder von A, B sind, so besteht nach Art. 156, 2) die Gleichung

c) $$e : e' = OA : R = R : OA',$$

also ist

d) $$V : V' = R : OB.$$

Das Potential eines electrischen Punktes auf einen andern Punkt verhält sich zum Potential seines Bildes auf das Bild dieses andern Punktes wie der Radius der abbildenden Kugel zu der Entfernung des zweiten Punktes vom Centrum der Kugel.

Es fällt sofort auf, dass dieses Verhältnis der bezeichneten Potentiale ganz unabhängig von der Lage des ersten electrischen Punktes in A ist, wir können daher den erweiterten Satz aufstellen:

Das Verhältnis des Potentials eines electrischen Systems auf einen Punkt zu dem Potential des Bildes des Systems auf das Bild des Punktes ist gleich dem Verhältnis des Radius der abbildenden Kugel zu der Entfernung des Punktes von dem Centrum der Kugel.

Daraus und aus den vorhergehenden Gleichungen fliessen eine Menge von Relationen, die ich nach dem Vorgange von Thomson und Tait in ihrem Lehrbuche über theoretische Physik (Art. 515) hier wiedergeben will.

Ausser den schon benutzten Bezeichnungen r, r'; e, e' für die Entfernung vom Kugelmittelpunkt und für die Electricitätsmenge des Punktes A bezüglich seines Bildes führe ich noch ein L, S, K; λ, σ, ρ für das Element einer Linie, Fläche und eines Raumes bezüglich für die Linien-, Flächen- und Raumdichte der Electricität in A, L', S', K'; λ', σ', ρ' für die entsprechenden Grössen im Bilde von A und nenne V das Potential in A, herrührend von einem Punkte B und V' das Potential im Bilde von A, herrührend vom Bilde von B. Damit erhalten wir

1) $$\frac{r'}{r} = \frac{L'}{L} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{r'^2}{R^2}, \quad \frac{S'}{S} = \frac{R^4}{r^4} = \frac{r'^4}{R^4}, \quad \frac{K'}{K} = \frac{R^6}{r^6} = \frac{r'^6}{R^6}$$

2) $$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{r}{R} = \frac{R}{r'}, \quad \frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{r^3}{R^3} = \frac{R^3}{r'^3}, \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{r^5}{R^5} = \frac{R^5}{r'^5}.$$

Digitized by Google

3) $$\frac{e'}{e} = \frac{R}{r} = \frac{r'}{R}.$$

4) $$\frac{V'}{V} = \frac{r}{R} = \frac{R}{r'}.$$

Befindet sich im ursprünglichen System in A eine Conductorfläche vom constanten Potentialniveau P, so haben die Punkte ihres Bildes das Potential PR/r'. Verlegt man daher in den Mittelpunkt der abbildenden Kugel, in das *Centrum der Inversion*, eine Electricitätsmenge von der Grösse $-PR$, so reducirt sich das Potential des abgebildeten Conductors auf Null.

Kennt man also die Verteilung der Electricität auf einem isolirten Conductor, der bis zum Potential P geladen ist, so erhält man durch Inversion die Verteilung der Electricität auf einem andern mit der Erde in Verbindung stehenden Conductor, dessen Form gleich der des Bildes jenes Conductors ist, und der unter dem Einflusse einer im Centrum der abbildenden Kugel vom Radius R, im Inversionsmittelpunkt, concentrirten Electricitätsmenge $-PR$ sich befindet.

163. Ehe ich zu weitern Folgerungen und Anwendungen dieser Theorie übergehe, habe ich noch eine Reihe geometrischer Ergebnisse derselben anzuführen, deren Kenntniss uns von grossem Nutzen sein wird.

I. Der Winkel zwischen zwei geometrischen Figuren bleibt bei der Inversion ungeändert.

Oder allgemeiner.

Das Bild ist dem Gegenstand in den kleinsten Teilchen ähnlich.

II. Die Abbildung eines Kreises ist wiederum ein Kreis, der zur geraden Linie wird, falls der Kreis durch das Inversionscentrum geht.

III. Das Bild einer Kugel, die Ebene als Kugel mit unendlich grossem Radius mitgerechnet, ist wiederum eine Kugel. Geht die Kugel durch das Inversionscentrum, so wird ihr Bild zur Ebene.

Sind a, a' die Abstände der Mittelpunkte einer Kugel und ihrer Abbildung vom Mittelpunkt der abbildenden Kugel, also vom Inversionsmittelpunkt, α, α' die bezüglichen Radien der Kugeln und verstehen wir unter Potenz einer Kugel in Bezug auf das Inversionscentrum, wie üblich, das Product der Strecken einer Geraden vom Inversionscentrum bis zu ihren Schnittpunkten mit der Kugel, so dass die Potenz der ersten Kugel gleich $a^2 - \alpha^2$ und die der zweiten gleich $a'^2 - \alpha'^2$ ist, so gilt der Satz:

IV. Das Verhältnis der Abstände der Mittelpunkte einer Kugel und ihrer Abbildung vom Inversionscentrum ist gleich dem Verhältnis ihrer Radien, oder gleich dem Verhältnis der Potenz der Inversionskugel zu der Potenz der abzubildenden oder endlich gleich dem Verhältnis der Potenz der abgebildeten Kugel zur Potenz der Inversionskugel.

Wir haben also

$$\frac{a'}{a} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{R^2}{a^2 - \alpha^2} = \frac{a'^2 - \alpha'^2}{R^2}.$$

Digitized by Google

V. Besteht der Gegenstand und sein Bild in einer Kugel und einer Ebene, so verhält sich das vom Inversionscentrum auf die Ebene gefällte Lot zum Radius der Inversionskugel wie dieser Radius zum Durchmesser der Kugel. Die Kugel hat ihren Mittelpunkt auf diesem Lote und geht durch das Centrum der Inversion.

VI. Das Bild des Centrums vom Bilde einer gegebenen Kugel in Bezug auf eine und dieselbe Inversionskugel fällt mit dem Bilde des Inversionscentrums in Bezug auf die gegebene Kugel zusammen.

Oder allgemeiner.

Das Bild des Inversionscentrums in Bezug auf eine der beiden Kugeln ist der inverse Punkt des Centrums der andern Kugel in Bezug auf die Inversionskugel.

VIIa. Geht ein Kreis gleichzeitig durch einen Punkt und durch das Bild dieses Punktes, so schneidet er die Inversionskugel senkrecht.

Die Umkehrung dieses Satzes ist ebenfalls richtig.

VIIb. Geht also ein Kreis durch einen Punkt und schneidet er zugleich die Inversionskugel senkrecht, so geht er auch durch das Bild jenes Punktes.*)

Zwei Punkte heissen *Invers in Bezug auf zwei Kugeln*, wenn sie Bilder von einander in den bezüglichen Kugeln sind.

VIII. Das Bild eines der beiden inversen Punkte in Bezug auf die Kugel, innerhalb deren er liegt, fällt mit seinem Bilde in Bezug auf die andere Kugel, also mit dem zweiten inversen Punkt zusammen.

IX. Geht ein Kreis durch die beiden inversen Punkte zweier Kugeln, so schneidet er diese Kugeln orthogonal.

Die inversen Punkte haben noch eine andere Eigenschaft, welche hervorgehoben werden muss, weil sie im folgenden oft benutzt wird.

X. Die Bilder zweier sich nicht schneidenden Kugeln in Bezug auf einen der beiden inversen Punkte sind concentrische Kugeln.

Sind α_1 und α_2 die Radien der Kugeln, c der Abstand ihrer Mittelpunkte, und ξ die Entfernung eines der inversen Punkte von dem Mittelpunkt der Kugel (α_2), so ist

$$\xi^2 + \xi\left(\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - c^2}{c}\right) = -\alpha_2^2.$$

Setzt man die Grösse

$$\left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 + c^2}{2c}\right)^2 - \alpha_2^2 = k^2,$$

also

$$k = \frac{1}{2c}\sqrt{\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + c^4 - 2\alpha_1^2\alpha_2^2 - 2\alpha_1^2 c^2 - 2\alpha_2^2 c^2},$$

*) Die folgenden Sätze bis zum Schluss des Artikels habe ich wegen der in den Art. 171 bis 174 behandelten Probleme hinzugefügt, um wenigstens etwas für das leichtere Verständniss der dort ziemlich schwierig gehaltenen Untersuchungen zu tun. Anm. d. Uebers.

Digitized by Google

so wird

$$\xi = -\frac{\alpha_1^2 - \alpha_2^2 - c^2}{2c} \pm k.$$

Daher sind die Abstände der inversen Punkte von den bezüglichen Mittelpunkten der Kugeln (α_2), (α_1)

$$\xi_2 = \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 + c^2}{2c} - k = \sqrt{k^2 + \alpha_2^2} - k,$$

$$\xi_1 = c - \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2 + c^2}{2c} + k\right) = c - \left(\sqrt{k^2 + \alpha_2^2} + k\right).$$

Der Abstand der beiden inversen Punkte von einander ist

$$\overline{\xi_1 \xi_2} = 2k.$$

164. Wir benutzen die Methode der Inversion, um die Verteilung der Electricität auf einer von einem electrischen Punkt influencirten leitenden, nicht isolirten Kugel (a) aus der gleichförmigen Verteilung der Electricität einer Kugel (a'), welche sich ganz allein im electrischen Felde befindet, abzuleiten.

Wir nehmen den electrischen Punkt A, den wir uns vorläufig als ungeladen vorstellen, zum Inversionscentrum. Ist dann f die Entfernung des Mittelpunktes der Kugel (a) von A, bezeichnet ferner a den Radius dieser Kugel (a), a' den Radius ihrer Abbildung (a') und f' die Entfernung des Mittelpunktes unserer Abbildung vom Inversionscentrum A; so haben wir nach Art. 163, IV.

$$f' = f\frac{a'}{a} = f\frac{R^2}{f^2 - a^2}.$$

Erteilen wir der Kugel (a') eine Electricitätsmenge e' und entziehen sie allen fremden Einflüssen, so verteilt sich diese Electricitätsmenge ganz gleichförmig auf ihrer Oberfläche und giebt zur Entstehung einer Flächendichte

$$\sigma' = \frac{e'}{4\pi a'^2}$$

Veranlassung.

Die Wirkung dieser Electricität auf ausserhalb dieser Kugel gelegene Punkte ist dieselbe, wie die einer gleichen, in ihrem Mittelpunkt B' concentrirten Electricitätsmenge e'. Auf der Kugel selbst und in ihrem Innern ist das Potential

$$P' = \frac{e'}{a'}$$

eine Constante.

Bilden wir nunmehr diese gleichförmig belegte Kugel (a') in Bezug auf die um A gelegte Inversionskugel ab, so geht sie wieder in die ursprüngliche Kugel (a) über, und wir erhalten ausserdem einen Punkt B, der die

Digitized by Google

Abbildung des Centrums der Abbildung (a') des ursprünglichen Kugelconductors (a) mit Bezug auf eine und dieselbe Inversionskugel darstellt, der also nach dem im vorhergehenden Artikel angeführten Satz VI. mit dem Bilde des Inversionscentrums A in Bezug auf den Kugelconductor (a) zusammenfällt.

Der Ladung e', die wir uns früher in B' vereinigt denken konnten, entspricht in B eine Ladung $e'R/f'$.

Das Potential $P' = e'/a'$ des Punktes B' in einem Punkte der Bildkugel (a') geht für einen Punkt P auf dem ursprünglichen Conductor (a) oder für einen Punkt, der mit B auf derselben Seite dieses Conductors liegt, nach Art. 162, 4) über in

$$P = \frac{e'}{a'} \frac{R}{AP}.$$

Bringen wir aber in A eine Electricitätsmenge

$$e = -\frac{e'}{a'} R,$$

so sinkt das Gesammtpotential für alle Punkte der neuen Kugel (a) und für alle Punkte, die mit B auf derselben Seite von a liegen, auf Null herab.

Hingegen ist das Potential in allen Punkten, die sich auf derselben Seite der Kugelfläche wie A befinden, gleich dem Potential der Ladung e in A zusammen mit dem der Ladung $e'R/f'$ in B.

Es ist aber

$$\frac{e'R}{f'} = -e\frac{a'}{f'} = -e\frac{a}{f}.$$

Die Ladung des Punktes B ist also dieselbe, wie wir sie schon früher für die Ladung des Bildes von A erkannt haben, und hieraus folgt, dass das Potential der Kugel (a) auf Punkte, die mit A auf derselben Seite ihrer Oberfläche liegen, gleich dem Potential des Bildes B von A ist.

Für die Dichte der Electricität in einem Punkte der Kugel (a) ergiebt sich nach Art. 162, 2)

$$\sigma = \sigma' \frac{R^3}{AP^3} = \frac{e'}{4\pi a'^2} \frac{R^3}{AP^3} = -\frac{e}{4\pi a'} \frac{R^2}{AP^3}$$

oder

$$\sigma = -\frac{e}{4\pi} \frac{f^2 - a^2}{a} \frac{1}{AP^3}.$$

Der letzte Ausdruck ist aber genau derselbe, wie wir ihn schon in Art. 157 für die Dichte der Electricität auf einer zur Erde abgeleiteten und durch die im Punkte A concentrirte Electricitätsmenge e influencirten Kugel vom Radius a berechnet haben.

Digitized by Google

Successive Bilder in endlicher Anzahl.

Abbildung in zwei Ebenen.

165a. Wenn ein Punkt sich zwischen zwei Conductorflächen befindet, so entwirft die eine derselben ein Bild von ihm. Dieses Bild wird dann von der zweiten Fläche wieder abgebildet und von dieser Abbildung des Bildes macht die erste Fläche ein neues Bild u. s. f. Dasselbe gilt von den Bildern, welche von dem durch die zweite Fläche erzeugten primären Bilde entworfen werden. Man erhält so zwei Reihen von Bildern des electrischen Punktes, die im allgemeinen eine unendliche Anzahl von Bildern umfassen. In besondern Fällen kommt es aber vor, dass in der Folge der einen Reihe von Abbildungen ein Bild mit dem primären Bilde der zweiten Reihe zusammenfällt, dann geben die beiden Reihen dieselben Bilder und umfassen eine endliche Anzahl von Bildern.

Das trifft beispielsweise ein, wenn die Conductoren aus zwei Ebenen bestehen, die sich unter einem Winkel schneiden, der ein Submultiplum von zwei Rechten ist.

Es sei in diesem Falle AOB ein Schnitt durch die beiden leitenden Ebenen, der senkrecht zur Durchsetzungslinie derselben geführt ist und den electrischen Punkt P enthält. Den Winkel AOB setzen wir gleich π/n, machen $PO = r$ und $POB = \vartheta$. Bilden wir den Punkt P in der Ebene OB ab, so erhalten wir nach Art. 161 sein Bild Q_1 auf dem Lote von P auf OB ebenso weit von der Ebene abstehend wie P. Die zweite Ebene OA entwirft dann ein Bild von Q_1 in P_2, welches auf dem Lote von Q_1 auf OA liegt und ebenso weit von OA absteht wie Q_1. Dann bildet die erste Ebene P_2 in Q_3 ab und die zweite Q_3 in P_3, die erste wieder P_3 in Q_2 und schliesslich in dem in der Figur angenommenen Fall die zweite Ebene Q_2 in P_1 ab, welches mit P zusammenfällt, so dass Q_2 das Bild von P in der Ebene OA ist. All diese Bilder liegen auf einem Kreise, der in O seinen Mittelpunkt hat und durch den electrischen Punkt P geht.

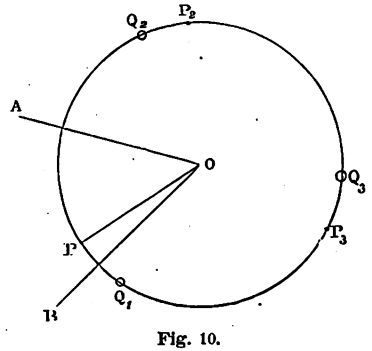


Fig. 10.

Hätten wir mit dem Bilde von P in AO begonnen, so würden wir ganz dieselben Bilder, nur in der umgekehrten Folge Q_2, P_3, Q_3, P_2, Q_1 erhalten haben, wenn eben AOB ein Submultiplum von zwei rechten Winkeln ist. Denn man überzeugt sich leicht, dass die Bilder von P mit Bezug auf die Ebene OA, also P_1, P_2, P_3, ebenso wie die Bilder mit Bezug auf die Ebene OB, also Q_1, Q_2, Q_3, auf dem Kreise in Intervallen von der Winkelgrösse $2AOB$ angeordnet sind. Wenn also $2AOB$ ein Submultiplum von

Digitized by Google

2π ist, so kann es nur eine endliche Anzahl von Bildern geben, deren keines in den Raum AOB fallen darf.

Wir haben also in diesem Falle, wo $AOB = \pi/n$ ist, n negative Bilder $Q_1, Q_2 \ldots Q_n$, deren jedes (Art. 161) gleich und entgegengesetzt geladen ist wie P und $n-1$ positive $P_2, P_3 \ldots P_n$, deren jedes gleich und gleichsinnig geladen ist wie P.

Der Winkel im Centrum O zwischen zwei gleichsinnig geladenen Bildern ist gleich $2\pi/n$. Die Bilder sind in Bezug auf jede der beiden Ebenen symmetrisch angeordnet, so dass jedem positiven Bilde auf der entgegengesetzten Seite der Ebene ein negatives auf derselben Normale und in gleichem Abstande von der Ebene befindliches entspricht.

Die Bilder bestimmen völlig die durch Influenz des Punktes P auf den Ebenen hervorgerufenen Electricitäten, wie bald bei einem andern Beispiel erläutert wird.

Abbildung in zwei sich schneidenden Kugeln.

165 b. Wir können aus diesem Fall sofort einen zweiten ableiten, indem wir die Ebenen mit Bezug auf irgend einen Punkt als Inversionscentrum abbilden. Sie gehen dann in zwei Kugeln oder in eine Kugel und eine Ebene über, die sich in einem Kreise schneiden und so eine Linse bilden. Der Winkel π/n zwischen den beiden Ebenen ändert seine Grösse nicht, und der electrische Punkt P liegt innerhalb dieses Winkels.

Die successiven Bilder von P mit Bezug auf die beiden Kugeln sind auf einem Kreise angeordnet, der durch P geht und die Kugeln rechtwinklig schneidet.

Wir finden diese Bilder, weil ein Punkt und sein Bild auf demselben Radius der abbildenden Kugel liegt, dadurch dass wir mit P anfangend Sehnen des Kreises ziehen, die alternirend durch die Mittelpunkte der Kugeln gehen.

Die Zeichen der Bilder wechseln wieder ab, so dass, wenn man den electrischen Punkt P mitzählt, ebenso viele positive als negative Bilder vorhanden sind.

Die Ladungen aller Bilder sind proportional ihren Abständen von ein und demselben (sonst willkürlichen) auf dem Schnittkreise der Kugeln liegenden Punkt, als welchen man den Punkt, wo die Ebene des Bilderkreises diesen Schnittkreis der beiden Kugeln trifft, annehmen kann.

In dieser Weise lässt sich also die Verteilung der Bilder bestimmen, wenn ein Raum durch zwei leitende Kugelflächenstücke begrenzt wird, die sich unter einem ausspringenden Winkel π/n schneiden, auf dem Potential Null erhalten werden und unter dem Einfluss eines electrischen von ihnen eingeschlossenen Punktes stehen.'

Digitized by Google

166. Der eben betrachtete Raum wurde von zwei Kugelflächen begrenzt, deren Mittelpunkte ausserhalb desselben lagen, er hatte also die Gestalt einer gewöhnlichen biconvexen oder planconvexen Linse mit ausspringender Kante. Bilden wir jetzt jene Kugeln mit Bezug auf den electrischen Punkt P als Inversionscentrum ab, so erhalten wir durch die vorangegangenen Betrachtungen die Lösung des Problems der electrischen Verteilung auf zwei sich unter einem einspringenden Winkel π/n schneidenden Kugelsegmenten, deren Potentialniveau gleich 1 ist, und die von keinen äussern electrischen Agentien angegriffen werden.

Der Kreis, auf dem die Bilder früher lagen, geht in eine Gerade über, welche nach Art. 163, I, II durch die Mittelpunkte der Kugelsegmente hindurchgeht, er transformirt sich also in die Centrale der neuen Kugelflächen.

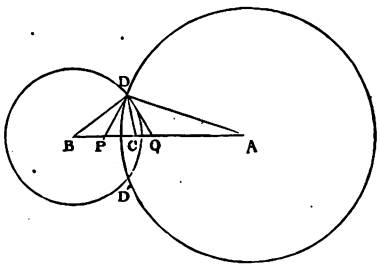


Fig. 11.

Die beistehende Fig. 11 repräsentirt einen Centralschnitt durch die Kugeln. A, B sind die Mittelpunkte der Kugeln, $P, C, Q, \ldots$ die electrischen Bilder und D, D' Punkte auf dem Durchsetzungskreis der Kugeln.

Die successiven Bilder liegen auf der Centrale AB.

Verbinden wir D mit A und ziehen von D aus Linien, die gegen DA um Winkel von der Grösse π/n, $2\pi/n, \ldots$ geneigt sind, so sind die Schnittpunkte $C, B \ldots$ mit der Centralen AB die positiven Bilder. Das letzte positive Bild liegt im Centrum B einer der Kugeln.

Ziehen wir andererseits von D aus Linien, welche die Centrale AB unter Winkeln π/n, $2\pi/n, \ldots$ treffen, so sind die Schnittpunkte dieser Linien mit der Centralen die negativen Bilder. Die Ladungen der Bilder sind abgesehen vom Zeichen proportional ihren bezüglichen Abständen von D.

Die Flächendichte in irgend einem Punkte S einer der Kugeln ist gleich der Summe der Flächendichten, welche die einzelnen entsprechenden Bilder dort hervorrufen.

Liegt also beispielsweise S auf der Kugel mit dem Centrum A, und sind $A, B, C \ldots$ die positiven Bilder, so ist nach Art. 157 die Flächendichte der Electricität in S

$$1) \quad \sigma = \frac{1}{4\pi DA}\left[1 + (AD^2 - AB^2)\frac{DB}{BS^3} + (AD^2 - AC^2)\frac{DC}{CS^3} + \ldots\right].$$

In dem Schnittkreise der Segmente ist die Flächendichte gleich Null.

Die ganze auf einem der Kugelsegmente enthaltene Electricitätsmenge findet sich durch eine einfache Integration.

Nehmen wir wieder das Kugelsegment um A, so ist σ_1 die Flächendichte in einem Punkte desselben, welche von der positiven Electricitäts-

Digitized by Google

menge AD in A hervorgerufen wird. Aehnlich verdankt σ_2 der positiven Electricitätsmenge BD in B seine Entstehung u. s. f.

Die einzelnen Integrationen sind über die ganze Fläche des Segments auszuführen, und indem man von den angegebenen Werten für die Flächendichten Gebrauch macht, findet sich

$$\iint \sigma_1 \, ds = DA \, \frac{DA + OA}{2\,DA} = \frac{DA + OA}{2}$$

$$\iint \sigma_2 \, ds = DB \, \frac{DB + OB}{2\,DB} = \frac{DB + OB}{2} \qquad \text{u. s. f.,}$$

wo O den Mittelpunkt des Schnittkreises der beiden Segmente um A und B angiebt, und die Strecken OA, OB, ... von O zur Rechten gemessen als positiv, zur Linken als negativ in Anschlag zu bringen sind.

Die Gesammtladung des Segments (A) ist also

$$2) \qquad E = \tfrac{1}{2}(DA + DB + DC + \ldots) + \tfrac{1}{2}(OA + OB + OC + \ldots) - \tfrac{1}{2}(DP + DQ + DR + \ldots) - \tfrac{1}{2}(OP + OQ + OR + \ldots).$$

167. Man kann die Methode der electrischen Bilder auf irgend einen Raum anwenden, welcher von Ebenen oder Kugeln begrenzt wird, die sich alle unter Winkeln, welche Submultipla von zwei rechten Winkeln sind, schneiden.

Dazu muss im Falle sphärischer Flächen jeder körperliche Winkel in dem System von drei Flächen begrenzt sein, zwei seiner Kantenwinkel müssen rechte Winkel, der dritte ebenfalls ein rechter oder ein Submultiplum von zwei rechten Winkeln sein.

Die Anzahl der Bilder ist endlich, wenn wir haben

1) Eine einzelne Kugelfläche oder Ebene.

2) Zwei Ebenen, eine Kugel und eine Ebene, oder zwei Kugeln, die sich unter einem Winkel π/n durchsetzen.

3) Zwei der unter 2) erwähnten Flächen und eine dritte Ebene oder Kugel, welche jene rechtwinklig durchsetzt.

4) Drei der unter 3) erwähnten Flächen und eine vierte Ebene oder Kugel, welche die beiden ersten Flächen rechtwinklig, die dritte unter einem Winkel π/n' schneidet.

In diesem Falle muss wenigstens eine der vier begrenzenden Flächen eine Kugelfläche sein.

Den ersten und zweiten Fall haben wir schon behandelt, und es hat sich ergeben, dass im ersten Falle ein Bildpunkt vorhanden ist, im zweiten $2n - 1$ Bilder (abgesehen vom influencirenden Punkt) sich vorfinden, die alle auf einem Kreise angeordnet sind, der durch den influencirenden Punkt geht und die beiden Flächen orthogonal schneidet.

Im dritten Fall haben wir ausser diesen $2n - 1$ Bildern auch noch ihre Bilder in Bezug auf die dritte Fläche, zusammen also $4n - 1$ Bilder ausser dem influencirenden Punkt.

Digitized by Google

Um im vierten Fall die Anzahl der Bilder zu finden, construiren wir zunächst die Bilder für die beiden ersten Flächen auf dem Kreise, der sie beide orthogonal trifft. Dann construiren wir uns zu jedem der $2n$ Bilder (der influencirende Punkt eingeschlossen), indem wir durch jedes Bild einen Kreis ziehen, der orthogonal zur dritten und vierten Fläche ist, die $2n'-1$ neuen Bilder, so dass wir im ganzen den influencirenden Punkt mit einbegriffen $2nn'$ positive und $2nn'$ negative, also $4nn'$ Bilder erhalten.

Diese $4nn'$ Bilder sind die Schnittpunkte von n Kreisen mit n' andern Kreisen, welche zu den beiden Systemen von Krümmungslinien einer Cyclide gehören.

Ist jeder der Punkte mit der ihm zukommenden Electricitätsmenge geladen, so besteht die Fläche, deren Potential gleich Null ist, aus $n+n'$ Kugeln, die sich in zwei Reihen anordnen. In der einen Reihe ist der Schnittwinkel auf einander folgender Kugeln gleich π/n, in der andern ist dieser Winkel gleich π/n'.

Jede Kugel der ersten Reihe durchsetzt jede Kugel der zweiten Reihe orthogonal.

168a. *Zwei sich rechtwinklig schneidende Kugeln.* (Tafel V.) Ich führe die Rechnungen specieller zunächst für den Fall aus, dass zwei leitende Kugeln sich rechtwinklig durchschneiden.

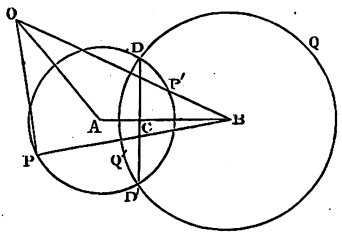


Fig. 12.

A und B (Fig. 12) seien die Mittelpunkte der Kugeln, D und D' Punkte auf ihrem Durchschnittskreis und C gebe den Schnittpunkt von DD' mit der Centrale AB, also den Mittelpunkt des Schnittkreises der Kugeln an.

n ist in diesem Fall gleich 2, es giebt also 4 Bilder, zwei davon, die positiven, fallen in A bezüglich B, die beiden andern negativen Bilder liegen in demselben Punkte C, denn C ist sowohl das Bild von A in der Kugel um B als das Bild von B in der Kugel um A.

Setzt man zur Abkürzung

a) $$AD=\alpha,\ BD=\beta,$$

so wird

b) $$DC=\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Demnach sind, Art. 165, 166, die Ladungen in A, B und C

1) $$\alpha,\ \beta,\ -\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Digitized by Google

Das Potential der drei Punkte auf einen von ihnen um die bezüglichen Strecken r_1, r_2, r_3 abstehenden Punkt ist

$$2) \qquad V = \frac{\alpha}{r_1} + \frac{\beta}{r_2} - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\frac{1}{r_3}.$$

Sucht man die Fläche, für welche dieses Potential gleich 1 wird, so findet man nach leichter Zwischenrechnung unsere Kugelflächen. Letztere sind also Niveauflächen mit dem Potentialniveau 1.

Wenn sich nun 2 Kugeln schneiden, so können wir vier Configurationen ableiten, deren Grenzflächen Teile beider Kugeln sind, nämlich die Linse $PDQD'P$ mit einspringender Kante, die Linse $P'DQ'D'P'$ mit auspringender Kante, den Meniscus $DPD'Q'D$ und den Meniscus $DQD'P'D$.

Auf jeder dieser Configurationen ist das Potential gleich 1.

Wir erhalten demnach durch die obigen in A, B und C gelegenen Bilder die Lösung für die Verteilung der Electricität in 4 Problemen.

1) Der Conductor $PDQD'P$ befindet sich auf dem Potentialniveau 1 und enthält die Electricitätsmenge

$$1_1) \qquad \alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = AD + BD - CD,$$

welche die Capacität dieses Conductors bezeichnet, wenn er sich, wie im angenommenen Fall, in einem freien electrischen Felde befindet.

Man bekommt in der oft angegebenen Weise die Flächendichte der Electricität in einem Punkte P der Kugel um A bezüglich in einem Punkte Q der Kugel um B, wenn man beachtet, dass der Punkt C bei jeder Kugel zweimal berücksichtigt werden muss, einmal als Bild von A in der Kugel um B und dann als Bild von B in der Kugel um A, gleich

$$3_1) \qquad \frac{1}{4\pi\alpha}\left[1 - \left(\frac{\beta}{BP}\right)^3\right] \text{ bezüglich } \frac{1}{4\pi\beta}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{AQ}\right)^3\right].$$

Auf dem Durchschnittskreise der Segmente ist die Flächendichte gleich Null.

Wenn eine der Kugeln sehr gross gegen die andere wird, so ist die Dichte in dem Scheitel der kleineren Kugel dreimal so gross wie die in dem Scheitel der grösseren.

2) Die Linse $P'DQ'D'P'$ befindet sich auf dem Potential 1, enthält die Electricitätsmenge

$$1_2) \qquad -\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} = -CD$$

und wird von den in den Punkten A, B concentrirten bezüglichen Ladungen α, β angegriffen.

Für die Dichte der Electricität in den verschiedenen Punkten der Linsenfläche findet man dieselben Ausdrücke, wie im vorigen Fall.

Digitized by Google

3) Der Meniscus $DPD'Q'D$ hat das Potentialniveau 1, enthält die Ladung

$1_3)$ $$\alpha = AD$$

und wird von den in den Punkten B, C concentrirten Electricitätsmengen β, $-\alpha\beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ angegriffen. Alles andere wie früher.

4) Der Meniscus $DQD'F'D$ hat wieder das Potential 1, ist mit der Electricität

$1_4)$ $$\beta = BD$$

geladen und steht unter dem Einflusse der in den Punkten A, C concentrirten Electricitäten α und $-\alpha\beta/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

Das gilt alles für die äussern Flächen der angeführten Conductorformen. Man kann aber auch die entsprechenden Probleme für die innern Flächen lösen, wenn diese sich unter dem Einflusse der betreffenden von ihnen eingeschlossenen electrischen Punkte A, B, C befinden. Ich gehe darauf nicht weiter ein, sondern wende mich zu einer Erweiterung des ad 1) behandelten Falles.

168 b. *Linse mit einspringender Kante von einem äussern electrischen Punkt influencirt.*

Ich bestimme nämlich die Flächendichte in Punkten der ersten Linse (der mit einspringender Kante), wenn sie von einer negativen Electricitätseinheit, die sich ausserhalb ihrer Oberfläche im Punkte O befindet, influencirt wird, und das Potentialniveau Null hat.

Ist r der Abstand eines Punktes P der Oberfläche unseres Conductors in seinem jetzigen Zustande vom Punkte O, so wird durch Ladung dieses Punktes mit einer negativen Electricitätseinheit das Potential in P um $-1/r$ vermehrt, so dass es auf $1-1/r$ ansteigt.

Wir haben daher ein System zu construiren, dessen Inversion mit unserm Conductor zusammenfällt und auf der Oberfläche das Potential $1/r$ hat.

Ein solches System erhält man aber, wenn man den Conductor in Bezug auf eine Kugel, deren Radius gleich 1 ist, und deren Centrum sich in O befindet (das wir uns noch als electricitätsfrei vorzustellen haben), abbildet.

Die Abbildung darf sich aber nur auf die Form erstrecken.

Die Inversion unseres Conductors ist diesem in den kleinsten Teilchen ähnlich und alle Betrachtungen, die wir für diesen angestellt haben, gelten unmittelbar auch für seine Inversion.

Setzen wir im ursprünglichen Conductor

a) $$OA = a,\ OB = b,\ OP = r,\ OQ = \rho,\ BP = p,\ AQ = q,$$
$$AD = \alpha,\ BD = \beta,\ AB = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

und benutzen accentuirte Buchstaben zur Bezeichnung der Bilder dieser Grössen, so haben wir nach der Aufgabe ad 1)

Digitized by Google

1') $$\sigma' = \frac{1}{4\pi\alpha'}\left[1 - \left(\frac{\beta'}{p'}\right)^3\right],$$

wenn P' auf der Kugel um A' liegt und das Potentialniveau des inversen Systems gleich 1 ist.

Es ist aber nach den Gleichungen unter 1) in Art. 162 und nach IV) in Art. 163

b) $$a' = \frac{a}{a^2 - \alpha^2}, \quad b' = \frac{b}{b^2 - \beta^2}, \quad \alpha' = \frac{\alpha}{a^2 - \alpha^2}, \quad \beta' = \frac{\beta}{b^2 - \beta^2},$$

$$r' = \frac{1}{r}, \quad p'^2 = \frac{\beta^2 r^2 + (b^2 - \beta^2)(p^2 - \beta^2)}{r^2 (b^2 - \beta^2)^2},$$

somit wird

1) $$\sigma' = \frac{1}{4\pi}\frac{a^2 - \alpha^2}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta^3 r^3}{[\beta^2 r^2 + (b^2 - \beta^2)(p^2 - \beta^2)]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Bilden wir nunmehr die Inversion des inversen Systems mit Bezug auf dieselbe Abbildungskugel, so erhalten wir genau unser ursprüngliches System wieder, aber da wir dem inversen System das Potentialniveau 1 zugeschrieben haben, so wird in einem Punkt P der Inversion des inversen Systems, also unseres ursprünglichen Systems, das Potential nach der citirten Gleichung 4) in Art. 162 gleich $1/r$. Bringen wir dann in O eine negative Electricitätseinheit, so sinkt das Potential in P und überhaupt in allen Punkten unseres Conductors auf Null.

Ferner ist nach Art. 162, 2)

2') $$\sigma = \frac{1}{r^3}\sigma'.$$

Befindet sich also ein Conductor der angegebenen Form, während er zur Erde abgeleitet ist, unter dem influencirenden Einfluss einer in O concentrirten negativen Electricitätseinheit, so ist die Flächendichte der in einem vom electrischen Punkt O um r abstehenden Punkt P der Kugel A influencirten Electricität

2) $$\sigma = \frac{1}{4\pi r^3}\frac{a^2 - \alpha^2}{\alpha}\left(1 - \frac{\beta^3 r^3}{[\beta^2 r^2 + (b^2 - \beta^2)(p^2 - \beta^2)]^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Die Flächendichte in einem von O um ρ abstehenden Punkte Q der Kugel um B erhalten wir durch Vertauschung von $a, b, \alpha, \beta, p, r$ mit $b, a, \beta, \alpha, q, \rho$.

Um die gesammte Influenzelectricität unseres Conductors zu finden, wenden wir uns wieder dem inversen System zu; dort befinden sich in den Punkten A', B', C' die bezüglichen Ladungen

$$\alpha', \beta', -\frac{\alpha'\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}},$$

A', B' sind die Mittelpunkte der inversen Kugeln, C' ist der inverse Punkt C.

Digitized by Google

Setzen wir also

c) $$OA' = a', \quad OB' = b', \quad OC' = c',$$

so erhalten wir, indem wir das inverse System in unser ursprüngliches zurück invertiren, nach der Gleichung unter 3) in Art. 162 für die Ladungen in A, B, C

3') $$\frac{\alpha'}{a'}, \quad \frac{\beta'}{b'}, \quad -\frac{\alpha'\beta'}{\sqrt{\alpha'^2+\beta'^2}}\frac{1}{c'}.$$

Nun ist zunächst (Art. 163)

$$\frac{\alpha'}{a'} = \frac{\alpha}{a}, \quad \frac{\beta'}{b'} = \frac{\beta}{b}.$$

Ferner haben wir

$$A'C' : C'B' = \alpha'^2 : \beta'^2,$$

$$A'B' = \sqrt{\alpha'^2+\beta'^2},$$

also

$$c'^2 = \frac{a'^2\beta'^2 + b'^2\alpha'^2 - \alpha'^2\beta'^2}{\alpha'^2+\beta'^2},$$

und damit wird die gesammte Influenzelectricität des Conductors

3) $$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-\frac{\alpha\beta}{\sqrt{a^2\beta^2+b^2\alpha^2-\alpha^2\beta^2}}.$$

Drei orthogonale Kugeln im freien electrischen Felde.

169. Bezeichnen wir die Mittelpunkte der Kugeln mit A, B, C die Radien mit α, β, γ, so wird

a) $$AB = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}, \quad BC = \sqrt{\beta^2+\gamma^2}, \quad CA = \sqrt{\gamma^2+\alpha^2}.$$

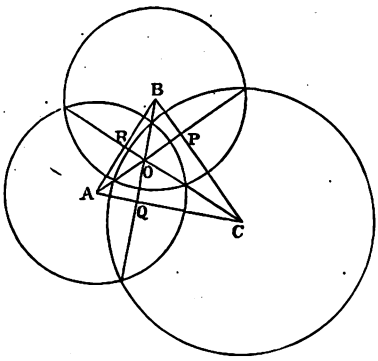


Fig. 13.

Ferner seien P, Q, R die Fusspunkte der von A, B, C auf die gegenüberliegenden Centralen gefällten Lote und O gebe den Schnittpunkt dieser Lote an.

P ist das Bild von B in der Kugel (C) und ebenso das Bild von C in der Kugel (B), und es wird seinerseits durch O in der Kugel (A) abgebildet.

Sind α, β, γ die in den Mittelpunkten A, B, C concentrirten Ladungen, so haben wir für die Ladung in P (ähnlich wie im vorigen Artikel für die Ladung in C)

Digitized by Google

1) $$-\frac{\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}=-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

Ferner ist

$$AP=\frac{\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}},$$

also die Ladung im Bilde O von P

2) $$\frac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2+\alpha^2\beta^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

Genau so berechnet man die Ladungen der Bilder in R und in Q zu

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\alpha^2}}} \text{ und } -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}}}.$$

Die weitern Abbildungen von R und Q fallen dann in O, so dass O ein dreifacher Bildpunkt ist.

Damit lässt sich dann alles, was auf die Verteilung der Electricität auf dem System Bezug hat, unmittelbar erledigen. Das Potentialniveau der Kugeln ist gleich Eins.

Vier orthogonale Kugeln.

170 a. Aehnlich kann man die Verteilung der Bilder, welche vier electrischen, sich rechtwinklig schneidenden Kugelflächen mit dem Potentialniveau 1 electrisch äquivalent sind, finden.

Ist der Mittelpunkt der vierten Kugel D, ihr Radius gleich δ, und concentriren wir in dem Mittelpunkt eine Ladung δ, so ist die Ladung in dem Schnittpunkte der Centrale zweier Kugeln, etwa (A) und (B), mit der Ebene des Schnittkreises der beiden Kugeln, also in dem Bilde von B in (A) oder A in (B), gleich

1) $$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}}}.$$

Das Bild dieses Punktes liegt in dem Schnittpunkte der durch die drei Centren A, B, C gelegten Ebene mit einem von D gefällten Lot, und die daselbst befindliche Ladung ist

2) $$+\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}.$$

Digitized by Google

Durch die vier Centren lassen sich aber vier Ebenen legen, welche je drei von ihnen in sich aufnehmen, wir haben also auch vier von den betreffenden übrigbleibenden Centren zu fällende Lote. Diese vier Lote schneiden sich in einem Punkt, der wieder der Bildpunkt des letzten Bildes ist und die Ladung

3) $$-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{1}{\delta^2}}}$$

enthält. Genau so kann man alle noch fehlenden Bilder construiren und ihre Ladungen berechnen. Die letzten Abbildungen fallen immer in den Schnittpunkt D der vier letztgenannten Lote, der somit ein vierfacher Bildpunkt ist. Ausser den vier Centren hat man sechs einfach invertirte, vier zweimal invertirte Punkte und einen dreimal invertirten Punkt; mit den vier Centren kommen also für diesen Fall fünfzehn Bilder in Rechnung.

170b. *Vier sich rechtwinklig schneidende Kugeln unter dem Einfluss eines electrischen Punktes.* Wie früher bezeichnen A, B, C, D die Centren der vier Kugeln und O den electrischen Punkt. Man construirt vier andere Kugeln A_1, B_1, C_1, D_1, von denen jede durch O hindurchgeht und die ihr nicht entsprechenden drei ursprünglichen Kugeln orthogonal schneidet, so dass die Kugel (A_1) durch O hindurchgeht und (B), (C), (D) rechtwinklig durchsetzt. Ausser in dem Punkte O schneiden sich je drei der vier construirten Kugeln auch noch in einem andern Punkte, den ich mit A', B', C, D' bezeichne, je nachdem zu den sich schneidenden Kugeln A_1, B_1, C_1 oder D_1 nicht gehört. Darauf construirt man weitere sechs Kugeln (ab), (ac), (ad), (bc), (bd), (cd), deren jede durch O und den Schnittkreis zweier der ursprünglichen Kugeln geht [z. B. (ab) durch den von (A) und (B)].

Von diesen sechs Kugeln wird jede, etwa (cd) von zwei der zuerst construirten vier Kugeln, von (A_1), (B_1) in einem Punkte $(a'b')$ geschnitten. Das giebt sechs Punkte.

Weiter schneidet jede der Kugeln (A_1), (B_1), (C_1), (D_1), etwa (A_1), drei der sechs Kugeln, etwa (ab), (ac), (ad) in einem Punkte a', was wieder vier Schnittpunkte giebt.

Endlich durchsetzen sich alle sechs Kugeln noch in einem Punkt S. Im ganzen haben wir also, abgesehen von O, fünfzehn Schnittpunkte.

Bilden wir die Inversion des aus den leitenden vier Kugeln bestehenden Conductors und aller zehn dazu construirten Kugeln in Bezug auf eine um O als Centrum mit dem Radius R geschlagene Kugel, so geht der Conductor in einen ihm in den kleinsten Teilchen ähnlichen Conductor über, und die zehn construirten Kugeln geben, weil sie alle das Inversionscentrum enthalten, zehn Ebenen.

Von den fünfzehn Schnittpunkten zwischen je drei der zehn construirten Kugeln gehen die vier ersten A', B', C', D' in die Centren der inversen Conductorkugeln über. Die elf andern verwandeln sich in das System der Bilder, das wir am Ende des vorigen Artikels behandelt haben. Die Inversionen der

Digitized by Google

fünfzehn Schnittpunkte der construirten Kugeln sind also die Bilder des Punktes O in unserm aus vier Kugeln zusammengesetzten Conductor.

In dem Punkt A', der das Bild von O in der Kugel (A) ist, haben wir die Ladung zu verlegen, die ihm als Bild von O zukommt, also $-\alpha/a$, wo α der Radius von (A) ist und a den Abstand seines Centrums von O angiebt.

Entsprechend haben wir in den Punkt B', C', D' die Ladungen $-\beta/b$, $-\gamma/c$, $-\delta/d$ zu concentriren.

Die Ladungen der andern elf Bilder ergeben sich aus den am Ende des letzten Capitels abgeleiteten Ausdrücken, indem man in ihnen α, β, γ, δ durch

$$\alpha' = -\frac{\alpha}{a^2 - \alpha^2},\quad \beta' = -\frac{\beta}{b^2 - \beta^2},\quad \gamma' = -\frac{\gamma}{c^2 - \gamma^2},\quad \delta' = -\frac{\delta}{d^2 - \delta^2}$$

ersetzt und jede Ladung mit dem Abstande des zugehörigen Punktes vom electrischen Punkt O multiplicirt.

Successive Bilder in unendlicher Anzahl.

Zwei concentrische Kugelflächen.

171. Wird ein Raum von zwei Kugelflächen begrenzt, die sich nirgends schneiden, und die unter dem Einfluss eines in diesem Raume befindlichen electrischen Punktes stehen, so bilden die successiven Abbildungen des electrischen Punktes in ihnen zwei unendliche Reihen. Alle Bilder liegen ausserhalb des von beiden Kugelflächen begrenzten Raumes, so dass man die Theorie der electrischen Bilder in Anwendung bringen kann.

Man darf das Problem, das uns jetzt beschäftigen soll, dadurch vereinfachen, dass man die Kugelflächen als concentrisch annimmt, denn wenn sie es nicht sind, so kann man sie durch Inversion in Bezug auf einen ihrer inversen Punkte immer dazu machen (Art. 163, X).

Wir beginnen also mit dem Fall, wo wir zwei concentrische, leitende, nicht isolirte Kugelflächen haben, die von einem electrischen zwischen ihnen liegenden Punkt influencirt werden.

Der Radius der ersten Kugel sei b, der der zweiten be^w und der Abstand des electrischen Punktes P vom Centrum O gleich be^u. Alle Bilder liegen mit P auf demselben Radius der Kugelflächen ausserhalb des von ihnen begrenzten Raumes.

Sei Q_0 das Bild von P in der ersten Kugel, P_1 das von Q_0 in der zweiten, Q_1 das von P_1 in der ersten u. s. f., dann haben wir allgemein nach Art. 162, 1)

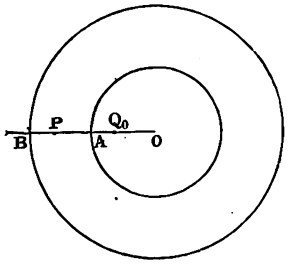


Fig. 14.

Digitized by Google

1′) $$OP_s \cdot OQ_s = b^2,$$

2′) $$OP_s \cdot OQ_{s-1} = b^2 e^{2\omega},$$

wo Q_s das Bild von P_s in der ersten Kugel und P_s das Bild von Q_{s-1} in der zweiten Kugel ist. Aus diesen Recursionsformeln folgt

$$OQ_0 = be^{-u},$$
$$OP_1 = be^{u+2\omega},$$
$$OQ_1 = be^{-(u+2\omega)},$$

und allgemein

1) $$OP_s = be^{u+2s\omega},$$

2) $$OQ_s = be^{-(u+2s\omega)}.$$

Bezeichnet man die Ladung des electrischen Punktes in P durch P, und allgemein die Ladung eines Bildes in P_s durch P_s, so haben wir

3) $$P_s = Pe^{s\omega},$$

4) $$Q_s = -Pe^{-(u+s\omega)},$$

und damit ist die erste Reihe von Bildern vollständig bestimmt.

Die zweite Reihe von Bildern bekommen wir dadurch, dass wir P zuerst in der zweiten Kugel abbilden. Ist Q_1' das Bild von P in der zweiten Kugel, P_1' das von Q_1' in der ersten, Q_2' das von P_1' in der zweiten u. s. f., so findet man

$$OQ_1' = be^{2\omega-u}, \qquad OP_1' = be^{u-2\omega},$$
$$OQ_2' = be^{4\omega-u}, \qquad OP_2' = be^{u-4\omega},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Allgemein ist

5) $$OP_s' = be^{u-2s\omega},$$

6) $$OQ_s' = be^{2s\omega-u}.$$

Die Ladungen dieser Bilder ergeben sich zu

7) $$P_s' = Pe^{-s\omega},$$

8) $$Q_s' = -Pe^{s\omega-u}.$$

Digitized by Google

Alle Bilder P sind positiv geladen, alle Bilder Q negativ, ausserdem gehören alle P' und Q, also alle Bilder in Bezug auf die erste Kugel, zur Bestimmung der electrischen Verteilung auf der ersten Kugel und alle P und Q', also alle Bilder in Bezug auf die zweite Kugel, zur Bestimmung der Verteilung auf der zweiten.

Die Ladungen der Bilder, die bei der ersten Kugel in Betracht kommen, bilden eine convergente Reihe, deren Summe

9a) $$(A) = -P\frac{e^{\omega-u}-1}{e^{\omega}-1}$$

die Electricitätsmenge der ersten, innern, Kugelfläche angiebt.

Die Bilder, die bei der zweiten, äussern, Kugel in Rechnung zu ziehen sind, liegen ausserhalb ihrer Oberfläche, und ihre Ladungen bilden eine divergente Reihe, aber da eben das Flächenintegral einer jeden Einzelladung in Bezug auf diese zweite Kugelfläche verschwindet (d. h. die gesammte auf beiden Kugelflächen influencirte Electricitätsmenge gleich und entgegengesetzt der influencirenden ist), so hat man für die auf der äussern Kugelfläche influencirte Electricitätsmenge

10a) $$(B) = P\left(\frac{e^{\omega-u}-1}{e^{\omega}-1}-1\right) = -P\frac{e^{\omega}-e^{\omega-u}}{e^{\omega}-1}.$$

Beachten wir, dass

$$e^{\omega} = \frac{OB}{b} = \frac{OB}{OA} \text{ und } e^{u} = \frac{OP}{b} = \frac{OP}{OA}$$

ist, so resultirt auch

9b) $$(A) = -P\frac{OA}{OP}\frac{PB}{AB};$$

10b) $$(B) = -P\frac{OB}{OP}\frac{AP}{AB}.$$

Werden die Radien der Kugeln unendlich gross, so liegt der electrische Punkt zwischen zwei parallelen unendlichen Ebenen, und es wird

9_1) $$(A)_1 = -P\frac{PB}{AB},$$

10_1) $$(B)_1 = -P\frac{AP}{AB}.$$

Digitized by Google

Zwei sich ausschliessende Kugelflächen.

172. Auf den eben behandelten Fall lässt sich der allgemeinere reduciren, dass zwei Kugeln, die sich nicht schneiden, irgendwie zu einander liegen. Denn, wenn man die beiden Kugeln in Bezug auf einen der beiden inversen Punkte OO', durch welche auch alle Kreise hindurchgehen, welche beide Kugeln orthogonal schneiden, invertirt, so erhält man zwei concentrische Kugeln.

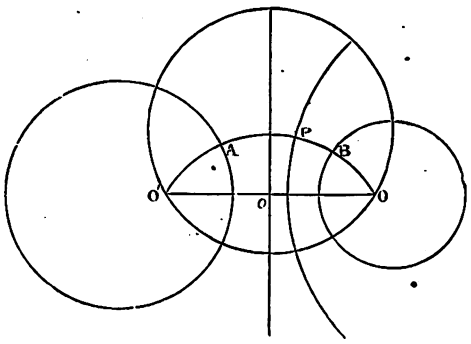


Fig. 15.

Für zwei concentrische Kugelflächen haben wir aber schon im vorigen Artikel die Lösung gefunden. Bilden wir demnach rückwärts die Inversion der concentrischen Kugeln in Bezug auf einen der charakterisirten Punkte O, O', der zwischen ihnen liegt, so gehen die beiden concentrischen Kugelflächen in zwei andere sich ausschliessende über, und wir erhalten so die Lösung unseres jetzigen Problems.*)

Die Bilder des Inversionscentrums in Bezug auf die beiden sich ausschliessenden Kugeln fallen nach Art. 163 mit dem Bilde des Centrums der beiden concentrischen Kugeln in dem zweiten inversen Punkte zusammen.

Der Radius $OAPB$ in Fig. 14, auf welchem die Bilder liegen, geht daher in Fig. 15 in den Bogen eines Kreises durch O und O' über, auf dem sich also die successiven Bilder und auch der electrische Punkt P befinden. Die Lage des electrischen Punktes P ist dadurch fixirt, dass das Verhältnis von $O'P$ zu OP gleich Ce^u ist, wo C eine Zahl bedeutet. Setzen wir also

$$\text{a)} \qquad \vartheta = \log \frac{O'P}{OP}, \quad \alpha = \log \frac{O'A}{OA}, \quad \beta = \log \frac{O'B}{OB},$$

so erhalten wir

$$\text{b)} \qquad \beta - \alpha = \omega, \quad u + \alpha = \vartheta.$$

Die Lage des Bildes Q_0 von P in der Kugel (A) ergiebt sich aus

$$\vartheta(Q_0) = \log \frac{O'Q_0}{OQ_0} = 2\alpha - \vartheta,$$

*) Eine genaue Untersuchung über dieses Problem findet man in Heine's *Handbuch der Kugelfunctionen* Bd 2, p. 261 ff. Man sehe ferner Poisson, *Mémoire de la classe des sc. math. et phil. de l'Institut de France* année 1811. Plana, *Memorie delle scienze di Torino* VII. 1845. Kirchhoff in Crelle's *Journal für reine und angew. Math.* 1861, Bd. 59, oder *Gesammelte Abhandlungen* pag. 78 ff.

Digitized by Google

die des Bildes P_1 von Q_0 in der Kugel (B) aus

$$\vartheta(P_1) = \log \frac{O'P_1}{OP_1} = \vartheta + 2\omega.$$

Allgemein ist

1) $$\vartheta(P_s) = \vartheta + 2s\omega, \quad \vartheta(Q_s) = 2\alpha - \vartheta - 2s\omega.$$

Aehnlich bestimmen sich die Bilder von P, wenn man P zuerst in der zweiten Kugel abbildet. Man hat

$$\vartheta(Q_0') = 2\beta - \vartheta, \qquad \vartheta(P_1') = \vartheta - 2\omega,$$

und allgemein

2) $$\vartheta(Q_s') = 2\beta - \vartheta + 2s\omega, \quad \vartheta(P_s') = \vartheta - 2s\omega.$$

Für die Ladung eines Punktes P_s fanden wir bei den concentrischen Kugeln nach den Gleichungen unter 1) und 3) den Wert

$$P\sqrt{\frac{OP_s}{OP}},$$

daher ist die Ladung des entsprechenden Bildes für unsern jetzigen Fall

3'a) $$P_s = P\sqrt{\frac{OP_s}{OP}\,\frac{O'P_s}{O'P}}.$$

Setzen wir zur Abkürzung

c') $$\xi = \sqrt{OP.\,O'P},$$

und nennen ξ den Parameter des Punktes P, so wird

3'b) $$P_s = \frac{\xi_s}{\xi} P.$$

Die Ladung eines Bildes ist also proportional seinem Parameter.

Genau so berechnen sich die Ladungen für die andern drei Klassen von Bildern Q, P', Q'.

Zur Fixirung der Lage des electrischen Punktes P führen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem ein, dessen x Axe mit der Linie OO' zusammenfällt und dessen y Axe durch die Mitte von OO' geht.

Sind dann x, y die Coordinaten von P und $k = \frac{1}{2}OO'$, so setzen wir

d) $$e^{\vartheta + i\varphi} = \frac{x + iy - k}{x + iy + k}.$$

Für die Grösse k ergiebt sich aus der Bedingungsgleichung für die inversen Punkte O, O' nach Art. 163, X)

e) $$k = \frac{1}{2c}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2},$$

Digitized by Google

wo a, b die Radien der Kugeln sind und c die Entfernung ihrer Mittelpunkte bezeichnet.

ϑ ist gleich $\log O'P - \log OP$, φ bezeichnet den Winkel OPO' und wir erhalten

f) $$x = -\frac{k \sinh\vartheta}{\cosh\vartheta - \cos\varphi}, \quad y = \frac{k \sin\varphi}{\cosh\vartheta - \cos\varphi},$$

also

$$x^2 + (y - k\cot\varphi)^2 = k^2 \operatorname{cosec}^2\varphi,$$
$$(x + k\coth\vartheta)^2 + y^2 = k^2 \operatorname{cosech}^2\vartheta,$$

und daraus folgt

g) $$\cot\varphi = \frac{x^2 + y^2 - k^2}{2ky}, \quad \coth\vartheta = -\frac{x^2 + y^2 + k^2}{2kx}.$$

Weiter haben wir

$$OP^2 = (k - x)^2 + y^2, \quad O'P^2 = (k + x)^2 + y^2,$$

somit

c) $$\xi = \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}}.$$ *)

Die Ladung eines jeden Bildes ist, wie wir schon bemerkt haben, proportional seinem Parameter, und sie hat das positive oder negative Zeichen, je nachdem sie zu den P oder Q gehört. Demnach findet sich

3) $$P_s = \frac{P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}}{\sqrt{\cosh(\vartheta + 2s\omega) - \cos\varphi}},$$

4) $$Q_s = -\frac{P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}}{\sqrt{\cosh(2\alpha - \vartheta - 2s\omega) - \cos\varphi}},$$

5) $$P'_s = \frac{P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}}{\sqrt{\cosh(\vartheta - 2s\omega) - \cos\varphi}},$$

6) $$Q'_s = -\frac{P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi}}{\sqrt{\cosh(2\beta - \vartheta + 2s\omega) - \cos\varphi}}.$$

*) Es ist zu bemerken, dass

$$2\cosh\vartheta = e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}, \quad 2\sinh\vartheta = e^{\vartheta} - e^{-\vartheta}$$

gesetzt ist. Vergl. noch Art. 151.

Die Anwendung dipolarer Coordinaten rührt von Thomson her, Liouville Journal 1847, und Thomson *Reprint of Electrical Papers* § 211, 212.

Die Rechnungen sind im Anschluss an Betti's Untersuchungen über unser Problem (Nuovo Cimento XX) durchgeführt, die Methode aber, die der electrischen Bilder, ist dieselbe, deren sich Thomson zuerst bedient hat. Vergl. Phil. Mag. 1853.

Digitized by Google

Die durch den electrischen Punkt P inducirte Ladung (A) der Kugel um A ist gleich der Summe der Ladungen der Bilder Q und P', welche innerhalb dieser Kugel sich befinden, die Ladung (B) der Kugel um B ist gleich der Summen der Ladungen der Bilder Q' und P, welche innerhalb dieser Kugel liegen. Also

$$7) \quad (A) = P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{\sqrt{\cosh(\vartheta - 2s\omega) - \cos\varphi}}$$

$$- P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\sqrt{\cosh(2\alpha - \vartheta - 2s\omega) - \cos\varphi}},$$

$$8) \quad (B) = P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{\sqrt{\cosh(\vartheta + 2s\omega) - \cos\varphi}}$$

$$- P\sqrt{\cosh\vartheta - \cos\varphi} \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\sqrt{\cosh(2\beta - \vartheta + 2s\omega) - \cos\varphi}}.$$

Das Potential ist auf beiden Kugeln gleich Null.

173. *Capacität und Induction zweier Kugeln.* Wir leiten daraus die Bestimmung der Capacitäts- und Inductionscoefficienten zweier Kugeln her, deren Radien a und b sind, und deren Centralabstand durch c gegeben ist.

Nach der Definition dieser Grössen (Art. 87) haben wir eine der Kugeln auf dem Potential Null, die andere, deren Capacität bestimmt werden soll, auf dem Potential Eins zu erhalten.

Im vorigen Fall hatten beide Kugeln das Potential Null, bringen wir also in den Mittelpunkt der Kugel (A) mit dem Radius a eine Electricitätsmenge a, so wird ihr Potentialniveau gleich Eins und das der Kugel (B) bleibt Null. Die durch die successiven Bilder dieser Ladung a berechnete Verteilung der auf den Kugeln inducirten Electricität entspricht vollständig der Verteilung, wie sie unter Annahme der bezeichneten Potentialniveaus eintreten muss. Die Bilder dieser Ladung liegen alle auf der Centralen zwischen den Polen und den Centren der Kugeln, und es bleiben von den vier Systemen von Bildern Q, P, Q', P', die wir im vorigen Artikel bestimmt haben, nur zwei übrig, das erste und das letzte System.

Als Ladung in P haben wir die Ladung des Centrums A, also a zu setzen, und diese Ladung muss natürlich bei der Bestimmung der Gesammtladung (A) mit in Rechnung gezogen werden.

Nach den unter a) aufgestellten Gleichungen des vorigen Artikels und nach Art. 163, X) haben wir

$$a) \qquad \sinh\alpha = -\frac{k}{a}, \quad \sinh\beta = \frac{k}{b},$$

Digitized by Google

wo k den schon angegebenen Wert

b) $$k = \frac{1}{2c}\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2}$$

besitzt.

Demnach ist auch

c) $$P = -\frac{k}{\sinh\alpha}.$$

Ferner haben wir nach den Gleichungen unter a) und g) des vorigen Artikels, in denen $y = 0$ zu setzen ist,

d) $$\varphi = 0,\ \vartheta = 2\alpha.$$

Damit wird die Capacität q_{aa} von A

1a) $$q_{aa} = k\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\sinh(s\omega - \alpha)},$$

und der Inductionscoefficient von A auf B oder von B auf A

2a) $$q_{ab} = -k\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{\sinh s\omega}.$$

Genau so erhalten wir, wenn (B) das Potential 1 und (A) das Potential 0 hat,

3a) $$q_{bb} = k\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{1}{\sinh(\beta + s\omega)}.$$

In diesen Ausdrücken können wir noch α, β, ω und k durch a, b, c ersetzen. Machen wir nämlich

e) $$K = \sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2} = 2ck,$$

so ergiebt sich wegen der Beziehung $\sinh^2 x = \cosh^2 x - 1$ und der Gleichungen unter b) im vorigen Artikel

f) $$\sinh\alpha = -\frac{K}{2ac},\ \sinh\beta = \frac{K}{2bc},\ \sinh\omega = \frac{K}{2ab},$$

$$\cosh\alpha = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac},\ \cosh\beta = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc},\ \cosh\omega = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}.$$

Indem man noch von den Relationen

$$\sinh(\alpha + \beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta,$$
$$\cosh(\alpha + \beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta$$

Gebrauch macht, gelangt man zu demselben Resultat, welches Thomson

Digitized by Google

durch directe Berechnung der einzelnen Bilder schon gefunden hat, nämlich zu den Gleichungen

$$1b)\quad q_{aa} = a + \frac{a^2 b}{c^2 - b^2} + \frac{a^3 b^2}{(c^2 - b^2 + ac)(c^2 - b^2 - ac)} + \ldots$$

$$2b)\quad q_{ab} = q_{ba} = -\frac{ab}{c} - \frac{a^2 b^2}{c(c^2 - a^2 - b^2)} - \frac{a^3 b^3}{c(c^2 - a^2 - b^2 + ab)(c^2 - a^2 - b^2 - ab)} - \ldots$$

$$3b)\quad q_{bb} = b + \frac{ab^2}{c^2 - a^2} + \frac{a^2 b^3}{(c^2 - a^2 + bc)(c^2 - a^2 - bc)} + \ldots$$

174. Haben die beiden Kugeln Potentialniveaus V_a bezüglich V_b, so ergeben sich ihre Ladungen E_a, E_b nach Art. 87 aus den Gleichungen

$$4)\quad E_a = V_a q_{aa} + V_b q_{ab},$$

$$5)\quad E_b = V_a q_{ab} + V_b q_{bb}.$$

Setzen wir die Determinante der q

$$g_1)\quad q_{aa} q_{bb} - q_{ab}^2 = D = \frac{1}{D'}$$

und machen

$$6)\quad p_{aa} = q_{bb} D',\ p_{ab} = p_{ba} = -q_{ab} D',\ p_{bb} = q_{aa} D',$$

also

$$g_2)\quad p_{aa} p_{bb} - p_{ab}^2 = D',$$

so erhält man zur Berechnung der Potentialniveaus aus den Ladungen die Formeln

$$7)\quad V_a = p_{aa} E_a + p_{ab} E_b,$$

$$8)\quad V_b = p_{ab} E_a + p_{bb} E_b.$$

Die p sind die Potentialcoefficienten.

Die Energie unseres Systems ist nach Art. 85

$$9a)\quad Q = \tfrac{1}{2}(E_a V_a + E_b V_b),$$

$$9b)\quad = \tfrac{1}{2}(q_{aa} V_a^2 + 2 q_{ab} V_a V_b + q_{bb} V_b^2),$$

$$9c)\quad = \tfrac{1}{2}(p_{aa} E_a^2 + 2 p_{ab} E_a E_b + p_{bb} E_b^2).$$

Endlich ergiebt sich für die Abstossungskraft zwischen den beiden Kugeln aus Art. 92, 93

$$10a)\quad F = \tfrac{1}{2}\left\{V_a^2 \frac{\partial q_{aa}}{\partial c} + 2 V_a V_b \frac{\partial q_{ab}}{\partial c} + V_b^2 \frac{\partial q_{bb}}{\partial c}\right\},$$

$$10b)\quad = -\tfrac{1}{2}\left\{E_a^2 \frac{\partial p_{aa}}{\partial c} + 2 E_a E_b \frac{\partial p_{ab}}{\partial c} + E_b^2 \frac{\partial p_{bb}}{\partial c}\right\},$$

wo c wie bisher den Abstand der Centren der beiden Kugeln darstellt.

Digitized by Google

Von diesen beiden Ausdrücken für die zwischen den Kugeln wirkende Abstossungskraft ist der erste zu speciellen Rechnungen geeigneter als der zweite; er setzt sich aus Producten der Potentiale der Kugeln und der Derivirten der Capacitäts- und Inductionscoefficienten zusammen.

Bei der Differentiation der q nach c sind a und b als Constanten zu betrachten, somit ergiebt sich aus den Gleichungen [s. Art. 173 f)]

$$k = -a\sinh\alpha = b\sinh\beta = -c\frac{\sinh\alpha\sinh\beta}{\sinh\omega},$$

h) $$\frac{\partial k}{\partial c} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh\omega},$$

i) $$\frac{\partial \alpha}{\partial c} = \frac{\sinh\alpha\cosh\beta}{k\sinh\omega},$$

k) $$\frac{\partial \beta}{\partial c} = \frac{\cosh\alpha\sinh\beta}{k\sinh\omega},$$

l) $$\frac{\partial \omega}{\partial c} = \frac{1}{k}.$$

Wir finden also

11a) $$\frac{\partial q_{aa}}{\partial c} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh\omega}\frac{q_{aa}}{k} - \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(sc + b\cosh\beta)\cosh(s\omega - \alpha)}{c\sinh^2(s\omega - \alpha)},$$

12a) $$\frac{\partial q_{ab}}{\partial c} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh\omega}\frac{q_{ab}}{k} + \sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{s\cosh s\omega}{\sinh^2 s\omega},$$

13a) $$\frac{\partial q_{bb}}{\partial c} = \frac{\cosh\alpha\cosh\beta}{\sinh\omega}\frac{q_{bb}}{k} - \sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(sc + a\cosh\alpha)\cosh(\beta + s\omega)}{c\sinh^2(s\omega + \beta)}.$$

Man gelangt zu diesen Differentialquotienten auch durch Differentiation der Reihen in a, b, c, welche ich unter den Gleichungen 1b), 2b), 3b) des vorigen Artikels für die q gegeben habe.

11b) $$\frac{\partial q_{aa}}{\partial c} = -\frac{2a^2bc}{(c^2-b^2)^2} - \frac{2a^3b^2c(2c^2-2b^2-a^2)}{(c^2-b^2+ac)^2(c^2-b^2-ac)^2} - \cdots$$

12b) $$\frac{\partial q_{ab}}{\partial c} = \frac{ab}{c^2} + \frac{a^2b^2(3c^2-a^2-b^2)}{c^2(c^2-a^2-b^2)^2} + \frac{a^3b^3\{(5c^2-a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)-a^2b^2\}}{c^2(c^2-a^2-b^2+ab)^2(c^2-a^2-b^2-ab)^2} - \cdots$$

13b) $$\frac{\partial q_{bb}}{\partial c} = -\frac{2ab^2c}{(c^2-a^2)^2} - \frac{2a^2b^3c(2c^2-2a^2-b^2)}{(c^2-a^2+bc)^2(c^2-a^2-bc)^2} - \cdots$$

Digitized by Google

Thomson*) hat die Kraftwirkung zwischen zwei Kugeln von gleichen Radien, deren Abstand er von geringerer Grösse als den Durchmesser einer der Kugeln annahm, berechnet. Bei grösseren Entfernungen der Kugeln von einander braucht man nicht mehr als zwei oder drei aufeinanderfolgende Bilder zu berücksichtigen.

Zwei sich berührende Kugeln.

175. Zwei sich berührende Kugeln von den bezüglichen Radien a und b sollen zum Potentialniveau 1 geladen sein und von keinen fremden electrischen Punkten influencirt werden.

Bildet man die Inversion der beiden Kugeln in Bezug auf ihren Berührungspunkt als Inversionscentrum, so erhält man zwei um die bezüglichen Strecken $1/2a$ und $1/2b$ vom Berührungspunkt abstehende Ebenen, welche von einer Electricitätseinheit, die in diesem Punkte concentrirt zu denken ist, influencirt werden.

Die Bilder des electrischen Punktes in diesen Ebenen zerfallen in zwei Reihen, deren eine alle positiv geladenen enthält, während die andere die negativ electrisirten umfasst.

Bezeichnet s eine ganze von $-\infty$ bis $+\infty$ variirende Zahl, so sind die Abstände der positiven Bilder vom electrischen Punkt gleich $s\,(1/a + 1/b)$ und die der negativen $1/a + s\,(1/a + 1/b)$ in Richtung von a.

Die Ladungen der positiven Bilder sind alle gleich $+1$, die der negativen alle gleich -1.

Bilden wir die beiden Ebenen wieder in sich berührende Kugeln um, so geht die Reihe der positiven Bilder in negative über, deren Abstände vom Berührungspunkt durch

$$Q_s = \frac{1}{s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

gegeben sind. Davon gehören alle Bilder mit positivem s der Kugel mit dem Radius a, alle mit negativem s der Kugel mit dem Radius b an. Die Ladung jedes Bildes ist, wenn das Potentialniveau den Wert 1 hat, numerisch gleich seinem Abstand vom Berührungspunkt und, wie schon bemerkt, stets negativ.

Die positiven Bilder liegen in Abständen

$$P_s = \frac{1}{\frac{1}{a} + s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}$$

*) *Reprint of Electrical Papers*, pag. 96 ff.; Wiedemann *Electricität* 1882, Bd. I. pag. 83.

Digitized by Google

vom Berührungspunkt (wobei die positive Richtung nach dem Centrum der Kugel (A) hin gerechnet ist). Alle Bilder, für welche s gleich Null oder gleich einer ganzen positiven Zahl ist, liegen innerhalb der Kugel (A), alle, für welche s eine ganze negative, von Null verschiedene Zahl ist, befinden sich in der Kugel (B). Die Ladung jedes Bildes ist auch hier gleich seinem Abstand vom Berührungspunkt der Kugeln, sie ist aber stets positiv.

Demnach ist die ganze Ladung der Kugel (A).

1a) $$E_a = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{\frac{1}{a} + s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)} - \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}.$$

Für sich genommen, divergirt jede der beiden Reihen, verbinden wir aber die zwei Reihen zu einer

1b) $$E_a = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a^2 b}{s(a+b)\{s(a+b) - a\}},$$

so erhalten wir eine convergente Reihe. Die Ladung der Kugel (B) ist

2b) $$E_b = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{ab^2}{s(a+b)\{s(a+b) - b\}}.$$

Poisson giebt diese Ladungen in Form bestimmter Integrale. Nach ihm ist

1c) $$E_a = \frac{ab}{a+b} \int_0^1 \frac{\vartheta^{\frac{b}{a+b}-1} - 1}{1-\vartheta} d\vartheta,$$

2c) $$E_b = \frac{ab}{a+b} \int_0^1 \frac{\vartheta^{\frac{a}{a+b}-1} - 1}{1-\vartheta} d\vartheta,$$

was dem Resultate nach mit unseren Reihen zusammenfällt.

Eine andere Darstellung ist (*Legendre Traité des Fonc. Elliptiques, II, 438*)

1d) $$E_a = a - \left\{\gamma + \psi\left(\frac{b}{a+b}\right)\right\} \frac{ab}{a+b},$$

2d) $$E_b = b - \left\{\gamma + \psi\left(\frac{a}{a+b}\right)\right\} \frac{ab}{a+b},$$

wo

$$\gamma = 0{,}57712\ldots, \quad \psi(x) = \frac{d}{dx} \log \Gamma(1+x)$$

gesetzt ist.

Digitized by Google

Die Auswertung dieser Ausdrücke ist durch die Tafel, welche Gauss (Werke Bd. III. pagg. 161, 162) für die Function ψ berechnet hat, beträchtlich erleichtert worden.

Für die Differenz der Ladungen beider Kugeln haben wir, wenn $x = b/(a+b)$ gesetzt wird,

3) $$E_a - E_b = -\frac{ab}{a+b}\frac{d}{dx}\Big(\log\Gamma(x)\,\Gamma(1-x)\Big)$$
$$= \frac{ab}{a+b}\frac{d}{dx}\Big(\log\sin\pi x\Big)$$
$$= \frac{\pi ab}{a+b}\cot\frac{\pi b}{a+b}.$$

Sind beide Kugeln gleich gross, so sind ihre Ladungen einander gleich und es wird

4) $$E = E_a = E_b = a\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{2s(2s-1)}$$
$$= a\left(\tfrac{1}{2\cdot 1}+\tfrac{1}{4\cdot 3}+\tfrac{1}{6\cdot 5}+\cdots\right)$$
$$= a\left(1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}+\cdots\right)$$
$$= a\log 2$$
$$= 0{,}69314718\ldots a.$$

Ist die Kugel (A) sehr klein, so haben wir näherungsweise

1_1) $$E_a = \frac{a^2}{b}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^2} = \frac{\pi^2}{6}\frac{a^2}{b}.$$

und

2_1) $$E_b = b.$$

Die Ladung auf (B) ist also so gross, als wenn (A) gar nicht existirte.

Die mittlere Dichte auf jeder der Kugeln ergiebt sich durch Division der zugehörigen Ladung mit dem Flächeninhalt der betreffenden Kugel. Für ein sehr kleines (A) ist also

5_1) $$\sigma_a = \frac{E_a}{4\pi a^2} = \frac{\pi}{24b},$$

6_1) $$\sigma_b = \frac{E_b}{4\pi b^2} = \frac{1}{4\pi b},$$

7) $$\sigma_a = \frac{\pi^2}{6}\sigma_b = 1.644936\ldots\sigma_b.$$

Berührt also eine kleine Kugel eine grosse, so ist die mittlere Flächendichte der auf ihr sich verbreitenden Electricität das 1.644936 fache der mittlern Flächendichte der Ladung der grossen Kugel.

Digitized by Google

Kugelkalotte.

176. Eines der bemerkenswertesten Beispiele von der Anwendbarkeit der Thomsonschen Methode der electrischen Inversion bietet das von Thomson selbst untersuchte Problem der Verteilung der Electricität auf einem Stücke einer Kugelfläche, das von einem kleinen Kreise begrenzt ist. Thomson teilte seine Resultate ohne Details Liouville mit, der sie 1847 in seinem *Journal* veröffentlichte. Später erschienen dann auch die diesbezüglichen speciellen Rechnungen in Thomsons *Electrical Papers*, Art. XV.

Es scheint dies das erste und einzige Mal gewesen zu sein, dass die electrische Verteilung auf einer begrenzten krummen Fläche bestimmt worden ist.*)

Da aber der specielle Zweck meines Buches mehr darin besteht, Methoden auseinander zu setzen, als Rechnungen zu wiederholen und zu verificiren, so kann ich nicht auf die geometrischen und analytischen Einzelheiten eingehen, und muss den Leser auf das citirte Thomsonsche Werk verweisen. Ich will aber sowohl den Weg angeben, den man bei der Behandlung von Kugelsegmenten einzuschlagen hat, als auch die einzelnen Resultate mitteilen.

Dazu bedarf es einer kleinen Vorbereitung.

177. Eine Kugelkalotte entsteht durch Abbildung einer Kreisscheibe, und daher müssen wir uns zunächst mit dieser beschäftigen.

Eine Kreisscheibe ist aber eine specielle Form des Ellipsoids, so dass die Verteilung auf einer solchen bekannt ist, wenn man die Verteilung der Electricität auf Ellipsoiden kennt.

Verteilung der Electricität auf einem Ellipsoid. Es lässt sich in bekannter**) Methode (vergl. Art. 150) nachweisen, dass die Attraction einer von zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen concentrischen Ellipsoidenflächen begrenzten Schale auf jeden in ihrem Innern gelegenen Punkt verschwindet. Lässt man die Dicke der Schale mehr und mehr abnehmen, so gelangt man schliesslich zu der Conception eines auf einer Ellipsoidenfläche ausgebreiteten Agens, dessen Flächendichte von Punkt zu Punkt wie das vom Centrum auf die Tangentialebene gefällte Lot variirt. Ist also das auf dem Ellipsoid ausgebreitete Agens Electricität, dessen Flächendichte in der angegebenen Weise bestimmt ist, so wird sich die Electricität, weil sie im Innern des Ellipsoides keine Wirkung ausübt, auf demselben in Gleichgewicht befinden. Wir können also umgekehrt schliessen:

Wird die Electricität auf einem Ellipsoid durch keine anderweitigen electrischen Pole beeinflusst, so verteilt sie sich derartig, dass ihre Flächendichte in einem Punkte proportional dem Lote ist, das man vom Mittelpunkt des Ellipsoides auf die Tangentialebene in jenem Punkte fällt.

---

*) Vergl. dagegen Heine, *Handbuch der Kugelfunctionen.* Bd. 2 pag. 292 Anm. Anm. d. Uebers.

**) Thomson und Tait, *Theoretische Physik* § 520. Clausius, *Mechanische Wärmetheorie* Bd. II, § 19.

Digitized by Google

Verteilung der Electricität auf einer Scheibe. Macht man zwei Axen des Ellipsoides einander gleich und lässt die dritte verschwinden, so geht dasselbe in eine kreisförmige Scheibe über, und man erhält durch Specialisirung des obigen Satzes einen Ausdruck für die Flächendichte der Electricität in den Punkten einer Scheibe, welche zum Potentialniveau V geladen und allen fremden Einflüssen entzogen ist.

Bezeichnet σ die Flächendichte in einem Punkte P einer solchen Scheibe und KPL eine durch P gehende Sehne, deren Schnittpunkte mit dem Grenzkreis der Scheibe in K und L liegen, so hat man

$$1) \qquad \sigma = \frac{V}{2\pi^2 \sqrt{KP.\,PL}}.$$

178. *Inversion einer electrischen Scheibe, Kugelkalotte.* Wir bilden nunmehr die Scheibe in einer um einen Punkt Q mit dem Radius R geschlagenen Kugel ab. Die Scheibe verwandelt sich dann in ein Stück einer durch das Inversionscentrum Q gehenden Kugelfläche, das von einem Kreise begrenzt ist, und als Kugelkalotte bezeichnet wird.

Ist die Scheibe S' bei Abwesenheit fremder electrischer Pole zum Potential V' geladen gewesen, so wird ihr Bild S, die Kugelkalotte, sich auf dem Potential Null befinden und von einer Electricitätsmenge $V'R$, die in Q concentrirt ist, influencirt werden.

S muss als Bild einer Ebene durch den electrischen Punkt Q hindurchgehen. Wir lösen also durch die bezeichnete Inversion das Problem der Verteilung der Electricität auf einer Kugelkalotte, die von einem auf ihrer Oberfläche befindlichen electrischen Punkt influencirt wird.

Eine Kugelkalotte unter dem Einfluss eines auf dem Rest der Kugelfläche liegenden electrischen Punktes. Das Resultat, zu dem man auf dem angegebenen Wege gelangt, lässt sich so aussprechen:

Liegt der Pol der Kugelkalotte in C in einem Abstande a von einem Punkte der Kante der Kalotte, giebt q die im electrischen auf der Kugeloberfläche liegenden Punkt Q concentrirte Electricitätsmenge, bezeichnet σ die Flächendichte in einem Punkte P der Kalotte, wie sie durch die in Q concentrirte Electricitätsmenge dort inducirt wird, wenn die Kalotte zur Erde abgeleitet ist, so haben wir

$$2) \qquad \sigma = \frac{1}{2\pi^2} \frac{q}{QP^2} \sqrt{\frac{CQ^2 - a^2}{a^2 - CP^2}},$$

wo QP, CQ, CP die die Punkte C, P, Q verbindenden Geraden bezeichnen.

Es muss hervorgehoben werden, dass dieser Ausdruck für σ unabhängig von dem Radius der Kugel ist, von der die Kalotte einen Teil bildet, er gilt also auch für eine ebene Scheibe.

Digitized by Google

179. *Eine Kugelkalotte unter dem Einfluss beliebig vieler auf dem Rest der Kugelfläche liegender electrischer Punkte.* Wenn auf dem Rest der Kugel sich mehrere electrische Punkte befinden, welche die Kugelkalotte influenciren, so wird die Dichte der hervorgerufenen Electricität gleich der Summe aller durch die einzelnen Punkte inducirten Flächendichten sein. Das gilt, wie nahe auch die electrischen Punkte nebeneinander liegen, es gilt auch, wenn sie so dicht gruppirt sind, dass sie den ganzen Rest der Kugelfläche continuirlich mit der Dichte ρ bedecken. In diesem Falle tritt an Stelle der Summation eine Integration, die sich über den ganzen Rest der Kugelfläche erstreckt und die Flächendichte auf einer Kugelkalotte bestimmt, die sich auf dem Potential Null befindet und von einer electrischen Schicht, die mit der Dichte ρ auf dem Rest der Kugelfläche ausgebreitet ist, influencirt wird.

Wir isoliren jetzt das ganze System, also die Kugelkalotte sammt dem zugehörigen Rest der Kugel, und bringen es in eine andere Kugel vom Durchmesser f, die durch eine electrische Schicht, welche sich auf ihr gleichförmig mit der Raumdichte ρ' ausbreitet, electrisirt ist.

Innerhalb einer gleichförmig electrisirten Kugel hat aber die electrische Kraft keine von Null verschiedene Resultante. Die Verteilung der Electricität auf dem Kugelsegment wird also durch die angegebene Operation nicht alterirt. Das Potential dagegen wächst in allen Punkten, die sich innerhalb der neuen Kugel befinden, um die Grösse

$$V = 2\pi\rho' f.$$

an. Das Potentialniveau der Kalotte geht dadurch von Null in V über.

Legen wir die umgebende Kugel concentrisch mit der Kugel, zu der die Kalotte gehört, und lassen ihren Radius so lange abnehmen, bis sie sich unserer Kugel eng anschliesst, so gewinnen wir die Lösung unserer Aufgabe für den Fall, dass die Kalotte bei dem Potentialniveau V sich unter dem Einfluss einer den Rest der Kugel, von der sie einen Teil bildet, mit der Raumdichte

$$\rho + \rho' = \rho + \frac{V}{2\pi f}$$

fest bedeckenden electrischen Schicht befindet.

180. *Eine Kugelkalotte im freien electrischen Feld.* Nehmen wir speciell $\rho + \rho' = 0$, so ergiebt sich sofort die Lösung des Problems der Verteilung der Electricität auf einer Kugelkalotte, die zum Potential V geladen ist und von keinen fremden electrischen Punkten angegriffen wird.

Bezeichnet σ die Flächendichte in einem Punkte einer der Flächen der Kalotte, wenn diese sich auf dem Potential Null befindet und von dem Rest der Kugel, welche zur Dichte ρ geladen ist, influencirt wird, so wächst also die Dichte auf der Aussenseite der Kalotte, wenn ihr Potentialniveau zu V erhoben wird, um $\rho' = V/2\pi f$.

Digitized by Google

Eine nähere Untersuchung lehrt, dass, wenn wie bisher f den Durchmesser der Kugel und a, r die Entfernung des Pols der Kalotte von einem Punkte ihrer Kante bezüglich von einem Punkte P ihrer Fläche bezeichnet, dass also die Flächendichte in einem auf der Innenseite der Kalotte gelegenen Punkt

$$3) \qquad \sigma_i = \frac{V}{2\pi^2 f}\left\{\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}}\right\}$$

ist.

Die Flächendichte in dem entsprechenden Punkte P der Aussenseite der Kalotte findet sich zu

$$4) \qquad \sigma_a = \sigma_i + \frac{V}{2\pi f} = \frac{V}{2\pi^2 f}\left\{\pi + \sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{f^2-a^2}{a^2-r^2}}\right\}.$$

Bei der Berechnung dieses Endresultates hat man, abgesehen von der Inversion selbst, weiter keine schwierigeren Operationen auszuführen, als Integrationen über Teile von Kugelflächen.

181. *Eine Kugelkalotte unter dem Einfluss eines beliebig gelegenen electrischen Punktes.* Auf die Lösung des eben behandelten Problems reducirt sich die des allgemeinern Falls, dass der eine Kugelkalotte influencirende electrische Punkt sich nicht auf dem Rest der Kugel befindet. Ich gebe den Weg, den man bei der Berechnung der dann eintretenden Verteilung einzuschlagen hat, und die Resultate, zu denen man gelangt, an.

Man geht von dem Bilde S' der Kalotte, das wieder eine Kalotte ist, in einer mit dem Radius R um den electrischen Punkt Q geschlagenen Kugel aus, nimmt in diesem Bilde Q als unelectrisch an und setzt voraus, dass die Bildkalotte das Potentialniveau q/R hat, wo q die in Q ursprünglich vorhandene Electricitätsmenge ist. Berechnet man dann nach dem vorigen Artikel die Verteilung der Electricität auf dieser Bildkalotte und invertirt sie wieder zurück in die ursprüngliche Kalotte, so wird das Potential in einem von Q um r abstehenden Punkte dieser Kalotte nach Art. 162, 4) gleich q/r, verlegt man also die Electricitätsmenge $-q$ in den bisher als unelectrisch angenommenen Punkt Q, so fällt das Potentialniveau der Kalotte auf Null und sie tritt in die von unserm Problem vorgeschriebenen Verhältnisse. Bezeichnet man also mit σ die Dichte in dem Punkte P der ursprünglichen Kugelkalotte S und mit σ' die Dichte in dem Bilde von P auf der Bildkalotte, in P', so hat man nach Art. 162, 2)

$$\sigma = -\frac{\sigma' R^3}{(QP)^3}.$$

Digitized by Google

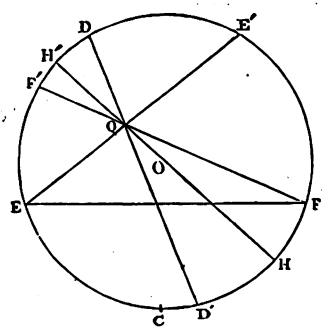


Fig. 16.

Zur Durchführung der Inversion benutzen wir die beistehende Figur 16, welche einen Durchschnitt durch das Centrum O der Kugel, den Pol C der Kugelkalotte um den influencirenden Punkt Q darstellt. E, F sind im Rande der Kalotte gelegene Punkte.

Nimmt man zum Radius R der Inversionskugel die mittlere Proportionale zu den Abschnitten der durch den electrischen Punkt Q gelegten Sehnen der Kugel, und zieht durch den bezeichneten Punkt die Sehnen EQE' und FQF', so ist $E'F'$ das Bild von EF.

Halbirt man den Bogen $F'CE'$ in D' und zieht die Grade $D'QD$, so ist D das Bild vor D', wo eine von Q durch den Mittelpunkt des Randes der Kalotte gezogene Linie die Fläche der Kalotte trifft. Verbindet man ferner Q mit O und verlängert QO zu beiden Seiten, so ist H' das Bild von H.

Damit findet man für die durch die Electricitätsmenge q des Punktes Q in einem Punkte P der Kugelkalotte, der von Q durch die vervollständigte Kugelfläche getrennt ist, inducirte Flächendichte

$$5)\quad \sigma_a = \frac{q}{2\pi^2}\,\frac{QH\,.\,QH'}{HH'\,.\,PQ^3}\left\{\frac{PQ}{DQ}\left(\frac{CD^2-a^2}{a^2-CP^2}\right)^{\frac{1}{2}} - \operatorname{arctg}\left[\frac{PQ}{DQ}\left(\frac{CD^2-a^2}{a^2-CP^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\},$$

wo a wie bisher den Abstand des Poles C von einem im Rande der Kalotte gelegenen Punkte bezeichnet.

Liegt P auf der Q zugewandten Seite der Kalotte, so hat man

$$6)\quad \sigma_i = \sigma_a + \frac{q}{2\pi}\,\frac{QH\,.\,QH'}{HH'\,.\,PQ^3}.$$

Digitized by Google

Cap. XII.

Electrische Probleme in zweidimensionalen Gebieten.

—x—

182. Die Methoden, die wir bisher zur Lösung von Problemen über das electrische Gleichgewicht kennen gelernt haben, sind in den Bereichen ihrer Anwendbarkeit äusserst wirksam. So beantwortet die Methode der Entwickelung nach Kugelfunctionen alle Fragen, die sich auf Kugelconductoren beziehen, und noch vielseitiger und mächtiger in ihrer Anwendbarkeit ist die Methode der electrischen Bilder. Im Ganzen ist aber doch die Zahl der vollständig untersuchten von einander unabhängigen Fälle des electrischen Gleichgewichts sehr beschränkt, und so viel ich weiss, kennt man nur für Conductoren, die von Flächen zweiten Grades begrenzt sind, den Verlauf der Niveauflächen und der Kraftlinien, wenn letztere nicht gerade ebene Curven sind.

Wir haben nun noch eine Klasse von wichtigen Problemen näher zu untersuchen, die sich dadurch charakterisiren, dass die Functionen, die bei ihrer Behandlung auftreten, zweidimensional sind, also nur von zwei Variabeln abhängen.

Haben wir zum Beispiel einen Teil des electrischen Feldes zu untersuchen, in welchem die Flächen aller Conductoren durch Bewegung von geraden Linien, die ein und derselben Axe, der der z Coordinaten, parallel laufen, gebildet sind, und der so weit von andern Teilen des Feldes, in denen das nicht zutrifft, entfernt ist, dass man von diesen andern Teilen abstrahiren darf, so ist die Electricität längs jeder erzeugenden Geraden gleichförmig verteilt. Betrachtet man also ein Stück des electrischen Feldes, das durch zwei parallele, zur z Axe senkrechte und um die Einheit der Länge von einander abstehende Ebenen ausgeschnitten wird, so werden darin Potential und Verteilung der Electricität lediglich Functionen von x und y sein.

Bezeichnet $\rho\, dx\, dy$ diejenige Electricitätsmenge, welche in einem Raumelement enthalten ist, dessen Grundfläche gleich $dx\, dy$ und dessen Höhe

Digitized by Google

gleich 1 ist, so nennen wir ρ die Raumdichte der Electricität. Entsprechend ist σ die Flächendichte, wenn $\sigma\, ds$ die in einem Flächenelement mit der Basis ds und der Höhe 1 vorhandene Electricitätsmenge angiebt.

Die Poissonsche Gleichung geht über in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 4\pi\rho = 0.$$

Wo keine freie Electricität vorhanden ist, da tritt an Stelle dieser Gleichung die Laplacesche

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Das allgemeine Problem, dessen Lösung uns lehren soll, wie die Electricität in diesem Falle sich verteilt, wenn sie sich im Gleichgewicht befindet, lässt sich so aussprechen.

Man soll eine Function V finden, die innerhalb eines durch geschlossene Curven begrenzten zwei dimensionalen Gebietes der Laplaceschen Gleichung genügt, endlich, stetig und einwertig ist, und die auf den Grenzlinien des Gebietes constante vorgeschriebene Werte $V_1, V_2, \ldots$ annimmt.

Ich glaube nicht, dass dieses Problem bisher eine allgemeine Lösung erfahren hat. Die Transformationsmethode aber, die wir in Art. 190 kennen lernen werden, wird uns mehr specielle Aufgaben erledigen helfen, als irgend eine der für dreidimensionale Gebiete entwickelten Methoden.

Ehe ich sie auseinander setzen kann, muss ich den Leser mit den Eigenschaften der conjugirten Functionen zweier Variabeln vertraut machen.

Conjugirte Functionen.

183. *Definition.* Zwei Grössen α und β heissen *Conjugirte Functionen* der Variabeln x und y, wenn ihre Zusammenfassung zu $\alpha + i\beta$ eine Function von $x + iy$ ist.

Aus dieser Definition ergiebt sich

I) $$\frac{\partial\alpha}{\partial x} = \frac{\partial\beta}{\partial y}, \quad \frac{\partial\alpha}{\partial y} = -\frac{\partial\beta}{\partial x},$$

II) $$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} = 0.$$

Zwei Functionen, die in einem conjugirten Verhältnis zu einander stehen, genügen also gleichzeitig der Laplaceschen Gleichung.

Ferner ergiebt sich aus der Formel unter I) die Beziehung

III) $$\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y} - \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x} = \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2 = R^2.$$

Digitized by Google

Die Gleichungen $\alpha = \text{const}$ und $\beta = \text{const}$ stellen in der xy Ebene gelegene Curven dar. Bezeichnet man mit ds_1 das Bogenstück einer Curve β, welches von zwei aufeinander folgenden Curven α und $\alpha + d\alpha$ ausgeschnitten wird, und mit ds_2 das Bogenstück einer Curve α, das von zwei aufeinander folgenden Curven β und $\beta + d\beta$ ausgeschnitten wird, so hat man

IV) $$\frac{ds_1}{d\alpha} = \frac{ds_2}{d\beta} = \frac{1}{R}.$$

Die Curvensysteme α und β schneiden einander rechtwinklig.

α und β sind beide Lösungen der Laplaceschen Gleichung. Nehmen wir also das Potential $V = V_0 + k\alpha$, wo k irgend eine Constante bedeutet, so genügt V der Laplaceschen Gleichung, und die Curven $\alpha = \text{const}$ stellen die Niveaulinien dar. Die zu α conjugirten Curven $\beta = \text{const.}$ geben die Kraftlinien.

Die resultirende Kraft in einem Punkte x, y ist zufolge der Gleichung unter III) gleich

1) $$kR = k\left[\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = k\left[\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\beta}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Das Flächenintegral von R in Bezug auf ein Stück der Cylinderfläche, dessen Breite gleich der Längeneinheit ist, und dessen Projection auf die xy Ebene durch die Curve AB dargestellt wird, ist gleich

2) $$F = k(\beta_B - \beta_A),$$

wo β_A bezüglich β_B die Werte von β in den beiden Endpunkten der Curve AB darstellen.

Zeichnet man in der xy Ebene eine Reihe von Curven $\alpha = \text{const}$, in der die Differenz der Constanten zweier aufeinander folgender Curven überall dieselbe ist (so dass die Constanten eine arithmetische Reihe bilden), und eine entsprechende Reihe von Curven $\beta = \text{const}$, bei der die constante Constantendifferenz zweier aufeinander folgender Curven dieselbe ist wie bei den Curven α, so zerfällt die ganze Ebene bei abnehmender Constantendifferenz schliesslich in lauter kleine Quadrate, deren Seiten in den verschiedenen Teilen des electrischen Feldes verschieden gerichtet und verschieden lang sein können. Die Grösse der Seite eines solchen Quadrats ändert sich umgekehrt proportional der Grösse der resultirenden Kraft R.

Laufen zwei oder mehr äquipotentielle Linien α in sich zurück, so können die von ihnen eingefassten Cylinderflächen als Conductoroberflächen mit den bezüglichen Potentialniveaus $V_0 + k\alpha_1$, $V_0 + k\alpha_2, \ldots$ gewählt werden.

Die auf einem zwischen zwei Kraftlinien β_1 und β_2 liegenden Stück einer solchen Conductoroberfläche befindliche Electricitätsmenge ist gleich

3) $$e = \frac{k}{4\pi}(\beta_2 - \beta_1).$$

Digitized by Google

Die Zahl der zwischen zwei Conductoren verlaufenden äquipotentiellen Linien zeigt die Potentialdifferenz der Conductoren an.

Die Zahl der von einem Conductor ausgehenden Kraftlinien giebt die Ladung desselben.

Ich habe nun noch einige Sätze über conjugirte Functionen anzuführen, deren Beweise entweder aus den unter I) gegebenen Differentialgleichungen oder direct aus der Definition der conjugirten Functionen, welche auf der Kenntnis der complexen Grössen basirt, fliessen.

184. V. *Sind x', y' und x'', y'' zwei Paare conjugirter Functionen von x, y, so geben die Summen $x' + x''$, $y' + y''$ ein Paar ebenfalls conjugirter Functionen von x, y.*

Aus den unter I) angeführten Gleichungen des vorigen Artikels folgt

$$\frac{\partial x'}{\partial x} = \frac{\partial y'}{\partial y}, \quad \frac{\partial x''}{\partial x} = \frac{\partial y''}{\partial y}; \quad \frac{\partial x'}{\partial y} = -\frac{\partial y'}{\partial x}, \quad \frac{\partial x''}{\partial y} = -\frac{\partial y''}{\partial x};$$

also

$$\frac{\partial(x' + x'')}{\partial x} = \frac{\partial(y' + y'')}{\partial y}, \quad \frac{\partial(x' + x'')}{\partial y} = -\frac{\partial(y' + y'')}{\partial x},$$

was mit den Definitionsgleichungen eines conjugirten Functionenpaars übereinstimmt.

Graphische Summation. Es sei eine Function α von x, y graphisch durch eine Reihe von Curven, deren jede einem bestimmten Werte des α entspricht, in der xy Ebene so dargestellt, dass die Differenz δ der Werte von α auf zwei aufeinanderfolgenden Curven überall dieselbe ist.

Ebenso sei eine zweite Function β von x, y durch eine Reihe von Curven β repräsentirt, in der die Constantendifferenz zweier aufeinander folgender Curven ebenfalls überall dieselbe bleibt und von derselben Grösse δ wie die Constantendifferenz bei den Curven α ist.

Verbinden wir die Schnittpunkte der Curven α und β, $\alpha + \delta$ und $\beta - \delta$, $\alpha + 2\delta$ und $\beta - 2\delta$, so erhalten wir eine neue Curve, die durch die Gleichung $\alpha + \beta = \text{const}$ repräsentirt ist. Verbinden wir ebenso die Schnittpunkte der Curven α und $\beta + \delta$, $\alpha + \delta$ und β, $\alpha + 2\delta$ und $\beta - \delta$ u. s. f., so ergiebt sich die nächste Curve $\alpha + \beta + \delta = \text{const}$. Man erhält also eine dritte Reihe von Curven, deren Gleichungen allgemein $\alpha + \beta = \text{const}$ sind, die also die Summe der beiden gegebenen Functionen α und β darstellen.

Bei der wirklichen Ausführung solcher graphischen Summationen kann man natürlich die drei Curvensysteme auf verschiedenen transparenten Papierstücken zeichnen, man legt dann die Papierstücke mit den Curven α und β in der gehörigen Weise übereinander und deckt darüber das Blatt, auf welches das System der Curven $\alpha + \beta$ hingezeichnet werden soll.

Durch diese Methode Functionen graphisch zu summiren, kann man in manchen interessanten Fällen den Verlauf complicirter Functionen kennen lernen, wenn man die einfachern Functionen, aus denen sie zusammengesetzt sind, darzustellen vermag.

Digitized by Google

Es giebt aber noch eine andere in ihrer Anwendbarkeit weit mächtigere Methode, aus schon bekannten Lösungen der Laplaceschen Gleichung andere Lösungen abzuleiten. Sie wird aus dem folgenden Theorem deducirt.

185. VI. *Sind x'', y'' conjugirte Functionen von x' und y', und x', y' ihrerseits conjugirte Functionen von x und y, so sind x'', y'' auch in Bezug auf x und y einander conjugirt.*

Es ist nämlich

$$\frac{\partial x''}{\partial x} = \frac{\partial x''}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial x''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x},$$

also nach der Gleichung I) des Art. 183

$$\frac{\partial x''}{\partial x} = \frac{\partial y''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y} + \frac{\partial y''}{\partial x'}\frac{\partial y'}{\partial y} = \frac{\partial y''}{\partial y}.$$

Ebenso haben wir

$$\frac{\partial x''}{\partial y} = \frac{\partial x''}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial x''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y}$$

also

$$\frac{\partial x''}{\partial y} = -\frac{\partial y''}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x} - \frac{\partial y''}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x} = -\frac{\partial y''}{\partial x},$$

so dass x'', y'' auch in Bezug auf x, y die beiden Definitionsgleichungen conjugirter Functionen erfüllen.

Man kann diesen Satz übrigens noch leichter aus der ursprünglichen Definition conjugirter Functionen ableiten, denn es ist

$$x'' + iy'' = f(x' + iy') = f[\varphi(x + iy)] = \psi(x + iy).$$

Als Zusatz ergiebt sich daraus:

VII. *Sind x' und y' conjugirte Functionen von x und y, so sind auch* umgekehrt *x und y conjugirte Functionen von x' und y'.*

Graphische Darstellung. Wir benutzen x' und y' als Coordinaten in einem rechtwinkligen Axensystem und ziehen parallel den Axen horizontal und vertical in gleichen Abständen gerade Linien, die wir durch die zugehörigen Werte der x' bezüglich y' markiren. In dem so liniirten Blatt zeichnen wir die als von x', y' abhängig aufgefassten Curven, welche Werten von x'' und y'' entsprechen, die eine arithmetische Reihe bilden. Dadurch erhalten wir zwei Systeme von Curven, die das Zeichenblatt in lauter kleine Quadrate zerlegen.

Auf einem andern Blatt benutzen wir x und y als Coordinaten in einem rechtwinkligen Axensystem, liniiren wieder dasselbe parallel den Axen und zeichnen darauf die als von x, y abhängig gedachten Curvensysteme x', y' in ganz derselben Weise wie früher die x'', y''.

Dieses so auf dem x, y Blatt erhaltene System krummliniger Coordinaten x', y' entspricht dann Punkt für Punkt dem früher auf dem x', y' Blatt gezeichneten System geradliniger Coordinaten x', y'.

Digitized by Google

Nehmen wir also eine Reihe von Punkten auf einer Curve x'' des ersten Blattes und suchen die zu diesen Punkten gehörigen Werte von x', y' auf dem zweiten Blatte auf, so gelangen wir zu einer Reihe von Punkten auf dem zweiten Blatt, die der Reihe von Punkten auf dem ersten entspricht, also auf der Transformation der Curve x'' von x', y' in x, y liegt. Führt man das für alle Curven x'', y'' des ersten Blattes aus, so erhält man auf dem zweiten Blatte zwei neue Systeme von sich rechtwinklig schneidenden Curven, die der Form nach von den frühern Curven x'', y'' verschieden sein können, aber alle Eigenschaften conjugirter Curvensysteme besitzen, die also namentlich das ganze zweite Blatt in kleine Quadrate zerteilen.

186. VIII. *Ist V eine Function von x' und y', die ihrerseits conjugirte Functionen von x und y sind, so besteht die Integralgleichung*

$$\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)dx'\,dy',$$

in der die Integrationen zu beiden Seiten zwischen denselben Grenzen auszuführen sind.

In der Tat ist zunächst

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+2\,\frac{\partial^2 V}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial x}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial^2 x'}{\partial x^2}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2+2\,\frac{\partial^2 V}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial y}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{\partial^2 x'}{\partial y^2}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{\partial^2 y'}{\partial y^2}.$$

Die Addition ergiebt also unter Beachtung der Gleichungen I) und II) des Art. 183

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\left[\left(\frac{\partial y'}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial y'}{\partial y}\right)^2\right]$$

oder zufolge der Gleichung III) in Art. 183

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}\right).$$

Digitized by Google

Also

$$\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)dx\,dy=\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial y'}{\partial y}-\frac{\partial x'}{\partial y}\frac{\partial y'}{\partial x}\right)dx\,dy$$

$$=\iint\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y'^2}\right)dx'\,dy',$$

nach einem bekannten Satz über Transformation vielfacher Integrale.

Ist V ein Potential, so dass

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+4\pi\rho=0$$

wird, so lautet der obige Satz auch

4) $$\iint\rho\,dx\,dy=\iint\rho'\,dx'\,dy',$$

oder:

In entsprechenden Teilen zweier Systeme befindet sich eine gleich grosse Electricitätsmenge, wenn die Coordinaten in einem System conjugirte Functionen der Coordinaten in dem andern System sind.

187 a. IX. *Die beiden Functionen*

$$X=x_1x_2-y_1y_2,\quad Y=x_1y_2+x_2y_1$$

sind einander conjugirt, wenn x_1, y_1 und x_2, y_2 conjugirte Paare ergeben.

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt unmittelbar aus der leicht zu verificirenden Gleichung

$$X+iY=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2).$$

187 b. X. *Ist φ eine Lösung der Laplaceschen Gleichung*

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0,$$

so sind die Grössen

$$R=\log\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\theta=-\operatorname{arctg}\frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

conjugirte Functionen von x und y.

Zunächst sind nämlich nach bekannten Sätzen aus der Theorie der complexen Grössen R und θ conjugirte Functionen von $\partial\varphi/\partial x$ und $\partial\varphi/\partial y$, diese Derivirten sind aber ihrerseits conjugirte Functionen von x, y.

Digitized by Google

Inversion in zweidimensionalen Gebieten.

188. Als erste Anwendung der angeführten Transformationsmethoden untersuche ich die Inversion in zweidimensionalen Gebieten.

Sei O ein in der Ebene der xy befindlicher fester Punkt, OA eine feste Richtung und P ein beliebig gelegener Punkt ebendaselbst.

Benutzen wir Polarcoordinaten, deren Pol in O liegt und deren Axe in Richtung von OA läuft, und setzen

$$r = OP,\ \vartheta = AOP,$$

so ist, wenn O zugleich den Ursprung eines rechtwinkligen Coordinatensystems bildet, dessen x Axe mit der Geraden OA zusammenfällt,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ,\quad \vartheta = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

Macht man aber

$$r = ae^{\rho},$$

so wird

$$\rho = \log\frac{1}{a}\sqrt{x^2+y^2}\ ,$$

$$x = ae^{\rho}\cos\vartheta\ ,\ y = ae^{\rho}\sin\vartheta\ ,$$

und ρ und ϑ sind nach dem unter X. gegebenen Satz conjugirte Functionen von x und y.

Weiter sind die Grössen $\rho' = n\rho$ und $\vartheta' = n\vartheta$ ebenfalls conjugirte Functionen, und da n irgend eine Zahl bedeuten kann, so werden auch $\rho' = -\rho$ und $\vartheta' = -\vartheta$ conjugirte Functionen von x, y sein. Wir haben dann

$$r' = \frac{a^2}{r},\ \vartheta' = -\vartheta.$$

Diese Transformirung von ρ und ϑ in $-\rho$ und $-\vartheta$ ist also gleichbedeutend mit einer Inversion unserer Figur verbunden mit einer Drehung derselben um die Axe OA durch 180^0.

Wie bei der früher behandelten Inversion in dreidimensionalen Gebieten, haben wir auch hier entsprechend den in Art. 162 gegebenen Formeln eine Reihe von Gleichungen zwischen den einzelnen auf die ursprüngliche und invertirte Figur sich beziehenden Grössen.

Es seien also r, r' Abstände entsprechender Punkte der beiden Figuren vom Inversionscentrum O; S, S' Flächenelemente; K, K' Raumelemente; σ, σ' Flächendichten; ρ, ρ' Raumdichten; e, e' Electricitätsmengen; φ, φ' Potentiale in entsprechenden Punkten der Figur und ihrer Inversion.

Die den Gleichungen 1) bis 4) Art. 162 entsprechenden Beziehungen sind dann

1) $$\frac{r'}{r} = \frac{S'}{S} = \frac{a^2}{r^2} = \frac{r'^2}{a^2},\quad \frac{K'}{K} = \frac{a^4}{r^4} = \frac{r'^4}{a^4},$$

Digitized by Google

2) $$\frac{\sigma'}{\sigma} = \frac{r^2}{a^2} = \frac{a^2}{r'^2}, \quad \frac{\rho'}{\rho} = \frac{r^4}{a^4} = \frac{a^4}{r'^4},$$

3) $$\frac{e'}{e} = 1,$$

4) $$\frac{\varphi'}{\varphi} = 1.$$

Electrische Bilder in zweidimensionalen Gebieten.

189. Die Fig. 17 stellt einen Durchschnitt durch einen leitenden Cylinder vom Radius $AQ = b$ dar, so dass A, der Mittelpunkt des gezeichneten Kreises, den Durchschnitt der Cylinderaxe mit der Ebene der Zeichnung markirt.

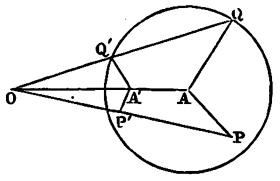


Fig. 17.

Wir nehmen an, dass der Cylinder zur Erde abgeleitet ist, also das Potentialniveau Null hat, und dass die Axe desselben gleichförmig mit Electricität, von der in der Längeneinheit die Menge E vorhanden sein soll, belegt ist. Wir haben dann einen speciellen Fall des Problems, das schon Art. 126 behandelt worden ist, und finden das Potential in einem innerhalb der Mantelfläche des Cylinders gelegenen Punkte P

$$\varphi = 2E \log \frac{b}{AP},$$

und die Flächendichte auf dem Mantel des Cylinders

$$\sigma = -\frac{E}{2\pi b}.$$

Die Aufgabe, die ich nunmehr mit Hilfe von electrischen Bildern lösen will, soll in der Bestimmung des Potentials für einen innerhalb des Cylinders gelegenen Punkt bestehen, wenn das Potentialniveau des Cylinders nach wie vor Null ist, die electrische Linie aber aus seiner Axe parallel mit sich selbst herausgerückt ist.

Bilden wir unsere Figur in einem um einen Punkt O geschlagenen Kreis ab, dessen Centrum O wir in die Entfernung $OA = mb$ von A verlegen, und dessen Radius a durch die Gleichung

$$a^2 = (m^2 - 1)\, b^2$$

gegeben sein soll, so haben wir

$$OA' = \frac{a^2}{OA} = \frac{(m^2 - 1)\, b}{m}, \quad \text{also } AA' = \frac{b}{m}.$$

Die Ladung in dem Bilde A' von A bleibt zufolge der Gleichung 3) des vorigen Artikels dieselbe, wie sie früher in A gewesen ist.

Digitized by Google

Ferner ist Q', der Schnittpunkt unseres Kreises mit der Secante OQ, gemäss der Wahl, die wir für a getroffen haben, das Bild des auf unserm Kreise gelegenen Punktes Q, und es folgt aus der Proportion

$$OQ' : OA = A'Q' : AQ,$$
$$OQ' = A'Q'm.$$

Aehnlich findet man, wenn P' das Bild des innerhalb des ursprünglichen Kreises gelegenen Punktes P ist,

$$AP = \frac{A'P'mb}{OP'}.$$

Die Flächendichte in dem Bilde Q' von Q ist zufolge der Gleichungen unter 2) des Art. 188

1) $$\sigma' = \sigma \frac{a^2}{OQ'^2}$$
$$= -\frac{E}{2\pi b} \frac{b^2 - AA'^2}{A'Q'^2}.$$

Das Potential φ' in dem innerhalb des Kreises gelegenen Punkte P' ist nach Gleichung 4) des citirten Art. ebenso gross wie das des Punktes P, dessen Bild P' ist, also haben wir

2a) $$\varphi' = \varphi = 2E(\log b - \log AP)$$
$$= 2E(\log OP' - \log A'P' - \log m).$$

Das entspricht aber der combinirten Wirkung einer Ladung E, die in A', und einer imaginären Ladung $-E$, die sich in dem Bilde O von A' in Bezug auf den ursprünglichen Kreis um A befindet, so dass die Wirkung dieser beiden durch A' bezüglich O gehenden electrischen Axen auf innerhalb der Mantelfläche gelegene Punkte ebenso gross ist, wie die der electrischen durch A' gehenden Axe und der durch diese Axe in der Mantelfläche des Cylinders um die Axe A inducirten Electricität.

Ich bestimme die Lage des Punktes P' durch Polarcoordinaten $AP' = r$, $OAP' = \vartheta$, deren Pol in A liegt, und setze zur Abkürzung

$$\rho = \log AP' - \log b, \quad \log \frac{1}{m} = \rho_0 = \log AA' - \log b.$$

Dann wird

$$AP' = be^{\rho}, \quad AA' = be^{\rho_0}, \quad AO = be^{-\rho_0},$$

und wir erhalten für das Potential in einem Punkte mit den Coordinaten ρ, ϑ

2b) $$\varphi = E \log(e^{-2\rho_0} - 2e^{-\rho_0}e^{\rho}\cos\vartheta + e^{2\rho})$$
$$- E \log(e^{2\rho_0} - 2e^{\rho_0}e^{\rho}\cos\vartheta + e^{2\rho}) + 2E\rho_0.$$

Digitized by Google

Das Potential verschwindet, wenn $\rho = 0$, das heisst, wenn $r = b$ ist, also in allen Punkten des Kreisquerschnitts des Cylinders um die Axe A. Es stellt also φ das Potential in den Punkten innerhalb eines inducirten Cylinders dar, dessen Mantelfläche das Potentialniveau Null hat, während parallel seiner Axe, innerhalb der Mantelfläche eine gleichförmig electrisirte Linie läuft, deren Schnittpunkt A' mit der Ebene unserer Zeichnung die Coordinaten $\rho = \rho_0$, $\vartheta = 0$ hat.

ρ und ϑ sind die in Art. 188 erwähnten conjugirten Functionen, ρ ist der Logarithmus des Verhältnisses des Radiusvectors eines Punktes zum Radius des Kreises, und ϑ ist ein Winkel.

In dem durch diese Grössen definirten Coordinatensystem ist das Centrum A der einzige singuläre Punkt. Ferner ist das Linienintegral $\int(\partial\vartheta/\partial s)\,ds$ längs einer geschlossenen Curve gleich Null oder gleich 2π, je nachdem das Centrum innerhalb oder ausserhalb der Integrationscurve liegt.

190. *Neumanns Transformation*).* Es seien α und β zwei conjugirte Functionen von x und y, und es mögen die Curven (α) äquipotentielle Linien und die Curven (β) Kraftlinien darstellen, die in Folge der Wirkung einer halben im Coordinatenursprung befindlichen Electricitätseinheit und eines in einem gewissen Abstande vom Ursprung irgendwie angeordneten electrischen Systems entstehen.

Wir denken uns das electrische System so verteilt, dass eine äquipotentielle Curve (α_0) in sich zurückläuft und abgesehen von der halben im Ursprung concentrirten Electricitätseinheit keine weitern electrischen Punkte einschliesst. Alle Curven (α), welche zwischen (α_0) und dem Ursprung liegen, sind dann geschlossene Linien, die diesen Ursprung umgeben. Die Curven (β) schneiden sich also alle im Ursprung und treffen die Curven (α) senkrecht.

Die Coordinaten irgend eines Punktes des von α_0 umfassten Gebietes sind durch die Werte der α und β, also durch die Curven (α) und (β), welche sich in ihm schneiden, bestimmt, wandert der Punkt auf derselben Curve (α) in positiver Richtung bis er an seine Ausgangsstelle zurückgekommen ist, so wächst der ihn charakterisirende Wert β für jeden vollen Umlauf um 2π.

Es sei nun α_0 der Schnitt der innern Fläche eines hohlen Cylinders mit der xy Ebene. Nehmen wir an, dass das Potential des Cylinders unter dem Einfluss einer electrischen Linie, von der der Ursprung die Projection auf unsere Ebene ist, den Wert Null hat, so können wir bei der Untersuchung des Potentialwertes in Punkten, die innerhalb der Curve α_0 liegen, von dem äussern electrischen System ganz absehen. Ist dann E die Liniendichte der Electricität auf der electrischen Axe, so ist in einem auf der Curve (α) innerhalb des Cylinders gelegenen Punkt das Potential

$$\varphi = 2E(\alpha - \alpha_0).$$

*) Crelle, *Journal für reine und angewandte Mathematik*, 1861.

Digitized by Google

Für die auf einem von den Kraftlinien β_1 und β_2 ausgeschnittenen Teile der Curve α_0 inducirte Electricitätsmenge finden wir nach Art. 183, 3)

$$Q = \frac{1}{2\pi}(\beta_1 - \beta_2).$$

Haben wir so den Verlauf des Potentials innerhalb einer bestimmten Querschnittscurve berechnet, wenn der electrische Punkt sich im Ursprung der Coordinaten befindet, so können wir durch die allgemeine Transformation diesen Verlauf auch noch bestimmen, wenn der electrische Punkt irgend eine andere Stelle innerhalb der Querschnittscurve einnimmt, (das heisst, wenn die electrische Linie parallel mit sich selbst aus dem Ursprung herausgeschoben ist) und das Potentialniveau auf der Curve gleich Null bleibt.

Denn wenn die Werte von α und β in dem electrischen Punkt durch α_1 und β_1 bezeichnet werden, so haben wir für das Potential in einem Punkte α, β nach dem vorhergehenden Artikel, wo ϑ wie man sieht, durch $\beta - \beta_1$ und ρ durch $\alpha - \alpha_0$ zu ersetzen ist,

$$\begin{aligned}\varphi = \quad & E \log\left(1 - 2e^{\alpha + \alpha_1 - 2\alpha_0}\cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha + \alpha_1 - 2\alpha_0)}\right) \\ & - E \log\left(1 - 2e^{\alpha - \alpha_1}\cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha - \alpha_1)}\right) - 2E(\alpha_1 - \alpha_0).\end{aligned}$$

Das Potential verschwindet für $\alpha = \alpha_0$ also auf der Grenzlinie und ist in den innerhalb α_0 gelegenen Punkten endlich und stetig. Nur im electrischen Punkte α_1, β_1 selbst wird das zweite Glied wie $-(2E \log r')_{r'=0}$ unendlich, falls r' den Abstand eines Punktes in der nächsten Nachbarschaft des electrischen Punktes bezeichnet.

Man kann also die Greensche Function für eine bestimmte Lage des electrischen Punktes berechnen, wenn sie bei einer andern Lage desselben schon bekannt ist.

Die in einem, zwischen den Curven β und $\beta + d\beta$ gelegenen Element ds_2 der Curve α_0 inducirte Electricitätsmenge ist, weil die Curve (β) die Curve α_0 senkrecht schneidet, gleich

$$de = -\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial s_1}ds_2\right)_{\alpha=\alpha_0},$$

wo ∂s_1 ein zwischen den Curven α und $\alpha + d\alpha$ gelegenes und nach innen als positiv gerechnetes Element der Curve β angiebt, also nach Gleichung IV) in Art. 183

$$de = -\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}d\beta\right)_{\alpha=\alpha_0}.$$

Mit Benutzung des Potentialausdruckes für φ wird daraus

$$de = -\frac{E}{2\pi}\frac{1 - e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}}{1 - 2e^{\alpha_1 - \alpha_0}\cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}}d\beta.$$

Digitized by Google

Damit können wir umgekehrt das Potential in einem Punkte α_1, β_1 innerhalb der geschlossenen Curve berechnen, wenn der Potentialwert in jedem Punkte der Curve als Function von β gegeben ist, und im Innern der Curve sich keinerlei electrische Punkte befinden.

Nach Art. 97, 8b) ist nämlich das Potential in α_1, β_1, herrührend von der Electricität des zum Potential V geladenen Elementes der Curve α gleich Vde, wenn de diejenige Electricitätsmenge angiebt, welche von einer in α_1, β_1 supponirten Electricitätseinheit in diesem Element inducirt werden würde.

Ist also V das Potential in einem Punkte einer geschlossenen Curve α als Function von β gegeben, und liegen innerhalb der Curve keine electrischen Punkte, so ist das Potential der ganzen Curve auf den innerhalb derselben befindlichen Punkt α_1, β_1, weil β um 2π wächst, wenn man die Curve α in positiver Richtung einmal durchläuft, gleich

$$\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1 - e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)})\, V d\beta}{1 - 2e^{\alpha_1 - \alpha_0}\cos(\beta - \beta_1) + e^{2(\alpha_1 - \alpha_0)}}.$$

Verteilung der Electricität in der Nähe der Kante eines von zwei Ebenen begrenzten Conductors.

191. Erstreckt sich zunächst der Conductor nach allen Seiten in die Unendlichkeit, so ist das Potential in einem von ihm um y abstehenden Punkte P

$$V = C - 4\pi\sigma_0 y,$$

wo C das Potentialniveau und σ_0 die gleichförmige Dichte der Ladung des Conductors angiebt.

Transformiren wir den obigen Ausdruck in Polarcoordinaten, deren Axe in der Ebene des Conductors liegt, und bezeichnen mit $r = ae^{\rho}$ das vom Punkt P auf die Axe gefällte Lot und mit ϑ den Winkel, den dieses Lot mit einer von seinem Fusspunkt zu dem Fusspunkt des von P auf die Ebene gefällten Lotes y gezogenen Linie bildet, so finden wir

$$V = C - 4\pi\sigma_0 ae^{\rho}\sin\vartheta.$$

Die in einem an die Axe anstossenden Parallelogramm von einer Breite gleich der Längeneinheit und von einer Länge gleich ae^{ρ} auf der Conductorebene ausgebreitete Electricitätsmenge ist

$$E = \sigma_0 ae^{\rho}.$$

Digitized by Google

Ich führe die Transformation $\rho = n\rho'$ und $\vartheta = n\vartheta'$ ein, wobei ρ' und ϑ' conjugirte Functionen von ρ und ϑ sein sollen. Die Ausdrücke

$$V = C - 4\pi\sigma_0 a e^{n\rho'} \sin n\vartheta',$$
$$E = \sigma_0 a e^{n\rho'},$$

bestimmen dann eine mögliche Verteilung der Electricität.

Ersetzt man $ae^{\rho'}$ durch r, wo also r den Abstand eines Punktes von der Axe bezeichnet, und schreibt für ϑ' wieder ϑ, so ist

$$V = C - 4\pi\sigma_0 \frac{r^n}{a^{n-1}} \sin n\vartheta$$

$$E = \sigma_0 \frac{r^n}{a^{n-1}},$$

V wird gleich C, wenn $n\vartheta$ einen vielfachen Wert von π ausmacht.

Die Grösse n ist noch willkürlich, wir können sie benutzen, um unsern bisherigen Conductor abzuändern.

Die folgenden Rechnungen lehren, dass n eindeutig bestimmt ist, wenn wir annehmen, dass der Conductor von zwei halben unendlichen Ebenen eingefasst wird, die an der unendlich langen geraden Grenze eine Kante vom Winkel α bilden.

Der Winkel des anstossenden Dielectricums ist $2\pi - \alpha$.

Das Potential muss auf einem solchen keilförmigen Conductor in entsprechenden Punkten zu beiden Seiten der Kante denselben Wert haben, und daraus bestimmt sich die Grösse n.

Wir haben also

$$n(2\pi - \alpha) = \pi,$$

und

$$n = \frac{\pi}{2\pi - \alpha}$$

zu setzen.

Weitere Bedingungen erfordert unser Conductor nicht, daher ist

$$V = C - 4\pi\sigma_0 a \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}} \sin \frac{\pi\vartheta}{2\pi - \alpha}$$

das Potential desselben in einem durch r, ϑ charakterisirten Punkt.

Die Electricitätsmenge E wird

$$E = \sigma_0 a \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\pi}{2\pi-\alpha}}.$$

Für die Flächendichte σ in einem von der Kante um r abstehenden Punkt des Conductors findet sich

$$\sigma = \frac{\partial E}{\partial r} = \frac{\pi}{2\pi - \alpha} \sigma_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{\alpha-\pi}{2\pi-\alpha}}.$$

Digitized by Google

Die Kante des Conductors kann verschieden geformt sein.

Ist α ein ausspringender Winkel, also kleiner als π, so ist $\alpha - \pi$ negativ, und demnach ändert sich die Dichte wie eine gewisse negative Potenz der Abstände der Punkte von der Kante des Conductors. In der Kante selbst wird die Dichte unendlich gross, trotzdem die gesammte auf einem von der Kante bis in gewisser Entfernung von derselben reichenden endlichen Flächenstück enthaltene Electricitätsmenge endlich ist.

Wenn speciell $\alpha = 0$ ist, das heisst, wenn die Kante unendlich scharf zuläuft, so ist die Dichte in einem Punkte umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus seinem Abstande von der Kante.

Bei $\alpha = \pi/3$, wo die Kante so aussieht, als ob sie einem gleichseitigen Prisma angehörte, ist die Dichte umgekehrt proportional der fünften Wurzel aus dem Quadrate des Abstandes.

Ist $\alpha = \pi/2$, so wird die Kante rechtwinklig und die Dichte umgekehrt proportional der Kubikwurzel aus der Entfernung.

Für $\alpha = 2\pi/3$ gehört die Kante einem regulären hexagonalen Prisma an, und die Dichte variirt umgekehrt wie die vierte Wurzel aus dem Abstande.

Erreicht α den Wert π, so ist die Kante verschwunden, der Conductor erstreckt sich überall in die Unendlichkeit und die Dichte ist überall dieselbe.

Für $\alpha = 4\pi/3$ sieht die Kante so aus wie die Innenseite der Kante eines hexagonalen Prisma, und die Dichte variirt direct wie die Quadratwurzel aus der Entfernung des Punktes, für den sie bestimmt wird, von der Kante.

Bei $\alpha = 3\pi/2$ bildet die Kante einen einspringenden rechten Winkel, und die Dichte ändert sich direct wie die Entfernung von derselben.

Endlich bildet die Kante für $\alpha = 5\pi/3$ einen einspringenden Winkel von 60°, die Dichte variirt wie das Quadrat des Abstandes.

In der Natur kommt es nicht vor, dass die Dichte in einer Kante unendlich wird, denn wir haben schon gesehen (Art. 55), dass, wenn die Electricität übermässig an einer Stelle aufgehäuft wird, eine Entladung in das Dielectricum eintritt.

Confocale Ellipsen und Hyperbeln als Niveau- und Kraftlinien.

192. Setzt man

$$x_1 = e^{\varphi} \cos\psi,\ y_1 = e^{\varphi} \sin\psi,$$

so sind, wegen $x_1 + iy_1 = e^{\varphi + i\psi}$ die x_1 und y_1 conjugirte Functionen von φ und ψ.

Digitized by Google

Ebenso sind unter der Annahme

$$x_2 = e^{-\varphi}\cos\psi\,,\quad y_2 = -e^{-\varphi}\sin\psi\,,$$

auch x_2 und y_2 conjugirte Functionen von φ und ψ. Daraus folgt nach Theorem V, dass wenn

$$2x = x_1 + x_2 = (e^{\varphi} + e^{-\varphi})\cos\psi\,,\quad 2y = y_1 + y_2 = (e^{\varphi} - e^{-\varphi})\sin\psi$$

gemacht wird, auch x und y conjugirte Functionen von φ und ψ sein müssen.

Die Punkte x, y, für welche φ constant ist, liegen auf einer Ellipse

$$\frac{x^2}{\left(\frac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2}\right)^2} = 1\,,$$

deren Axen $e^{+\varphi} + e^{-\varphi}$ und $e^{+\varphi} - e^{-\varphi}$ sind. Die Punkte x, y, für welche ψ constant ist, befinden sich auf einer Hyperbel

$$\frac{x^2}{\cos^2\psi} - \frac{y^2}{\sin^2\psi} = 1\,,$$

welche $2\cos\psi$ und $2\sin\psi$ zu Axen hat.

Auf der x Axe haben wir $y = 0$, also entweder $\varphi = 0$, oder $\psi = n\pi$. Wenn $\varphi = 0$, so ist $\psi = \arccos x$, also reell für alle zwischen -1 und $+1$ liegenden Abscissen x. Ist dagegen $\psi = n\pi$, so ergiebt sich für e^{φ} eine quadratische Gleichung, deren Lösung eine Wurzel $\sqrt{x^2 - 1}$ enthält. Man hat also zusammen

$$\varphi = 0,\quad \psi = \arccos x$$

von $x = -1$ bis $x = +1$,

$$\psi = 0,\quad \varphi = \log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

für $x > +1$,

$$\psi = \pi,\quad \varphi = \log\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right)$$

für $x < -1$.

Benutzen wir φ als Potentialfunction und ψ als Stromfunction, so haben wir den Fall vor uns, dass Electricität aus den Punkten der x Axe, welche zwischen $x = +1$ und $x = -1$ liegen, heraus die Ebene in Richtung von $+x$ nach $-x$ durchströmt, während die ausserhalb der Grenzpunkte befindlichen Teile der x Axe undurchgängig für Electricität sind.

Zu den Stromlinien, welche hier Hyperbeln sind, gehört auch die y Axe, man darf diese also ebenfalls als für Electricität undurchdringlich ansehen.

Man kann φ auch als die Potentialfunction, welche ein langer flacher Conductor von elliptischem Querschnitt, der bei einer Breite gleich 2 auf einer Einheit seiner Länge mit einer halben Electricitätseinheit geladen ist, hervorbringt, ansehen.

Digitized by Google

Macht man umgekehrt ψ zur Potential-, φ zur Stromfunction, so hat man die Lösung für den Fall, dass von zwei halben Ebenen, die derselben Ebene angehören und durch einen Zwischenraum von der Breite 2 von einander getrennt sind, die eine zum Potential π, die andere zu dem Potential Null geladen ist.

Die Lösung dieser behandelten Fälle lässt sich auch aus der schon in Cap. X. durchgeführten Theorie der electrischen Verteilung auf Flächen zweiten Grades ableiten.

Die Curven sind auf Tafel XI. abgebildet.

Strömung in zerteilten Streifen.

193. Eine weitere Transformation erhalten wir durch die Substitution

$$x' = b \log \sqrt{x^2 + y^2}, \quad y' = b \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

wo x und y in der im letzten Artikel angegebenen Weise als Functionen von φ und ψ definirt sind. x' und y' sind nach dem Theorem X. conjugirte Functionen von φ und ψ. Die früheren in der xy Ebene liegenden und auf Tafel XI. abgebildeten Curven φ und ψ werden in andere auf der $x'y'$ Ebene befindliche transformirt, deren Verlauf dem Leser durch die Tafel XII. vorgeführt wird.

Sind x', y' rechtwinklige Coordinaten, so gehen die Eigenschaften, die früher der x Axe zukamen, also für $y = 0$ stattfanden, jetzt auf Reihe von der x' Axe parallelen Geraden $y' = bn'\pi$ über, wo n' alle ganzen Zahlen durchläuft.

Den Punkten der x Axe, für welche $x > 1$ war, entsprechen die Punkte dieser Schaar von Geraden, für welche $x' > 0$ ist. Die diesen Punkten zugehörigen Werte von φ und ψ folgen aus den Gleichungen

$$1) \qquad \psi = n\pi, \quad \varphi = \log (\sqrt{x^2 - 1} + x) = \log \left(\sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} - 1} + e^{\frac{x'}{b}} \right).$$

Den Punkten der x Axe, für welche $x < 1$ war, entsprechen die Punkte der Schaar von Geraden, für welche $x' < 0$ ist, und man hat für diese Punkte

$$2) \qquad \varphi = 0, \quad \psi = \arccos x = \arccos e^{\frac{x'}{b}}.$$

Ferner gehen die Eigenschaften der y Axe, die also für $x = 0$ gelten, in unserer Transformation auf eine zweite Reihe von zur x' Axe parallelen Geraden $y' = b(n' + \frac{1}{2})\pi$ über.

Für alle Punkte dieser Geraden haben φ und ψ die Werte

$$3) \qquad \varphi = \log (y + \sqrt{y^2 + 1}) = \log \left(e^{\frac{x'}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} + 1} \right), \quad \psi = (n + \tfrac{1}{2})\pi.$$

Digitized by Google

Man kann*) die Curven, für welche φ bezüglich ψ constant ist, direct durch die Gleichungen

$$4) \qquad \begin{aligned} x' &= \tfrac{1}{2} b \log \tfrac{1}{4} (e^{2\varphi} + e^{-2\varphi} + 2\cos 2\psi), \\ y' &= b \operatorname{arctg}\left(\frac{e^{\varphi} - e^{-\varphi}}{e^{\varphi} + e^{-\varphi}} \operatorname{tg}\psi\right) \end{aligned}$$

construiren. Da aber die Figur sich in zur x' Axe parallelen Streifen von der Breite πb wiederholt, so genügt ihre Beschreibung für einen solchen Streifen.

y' wechselt sowohl mit φ als ψ sein Zeichen, und wir haben darum zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem φ oder ψ durch Null hindurch geht. Nehmen wir an, dass ψ keinen Zeichenwechsel erleidet, so zeigt die Gleichung für x', dass die Curve $\psi = \text{const}$, also

$$5) \qquad 4e^{\frac{2x'}{b}} = -\frac{\sin\left(\frac{y'}{b} + \psi\right)}{\sin\left(\frac{y'}{b} - \psi\right)} - \frac{\sin\left(\frac{y'}{b} - \psi\right)}{\sin\left(\frac{y'}{b} + \psi\right)} + 2\cos 2\psi$$

symmetrisch zur x' Axe liegt.

Sie schneidet die negative Hälfte der x' Axe in einem Punkte

$$6) \qquad x' = b \log \cos\psi,$$

wo $\varphi = 0$ ist, senkrecht und läuft schliesslich für grosse Werte des φ der x' Axe parallel. Die Werte des ψ liegen entsprechend den Grenzwerten 0 und $\pm \pi b/2$ von y' zwischen 0 und $\pi/2$.

Die positive x' Axe gehört mit zu den ψ Curven.

Die Curven $\varphi = \text{const}$ schneiden die eben behandelten $\psi = \text{const}$ senkrecht und liegen in dem Intervall $\varphi = +\infty$ bis $\varphi = -\infty$.

Ihre Gleichung ist

$$7) \qquad 2e^{\frac{2x'}{b}} = \cosh 2\varphi + \frac{\operatorname{tgh}^2\varphi - \operatorname{tg}^2\frac{y'}{b}}{\operatorname{tgh}^2\varphi + \operatorname{tg}^2\frac{y'}{b}}.$$

Nun haben wir gesehen, dass die ψ Curven symmetrisch zur positiven x' Axe liegen, eine Curve, welche alle ψ Curven orthogonal schneidet, läuft also ebenfalls symmetrisch zur x' Axe, wie das auch direct aus der gegebenen Formel für die φ Curven folgt. Bezeichnen wir eine solche Curve, die zu dem System der φ Curven gehört, durch PQR, wo P auf der Linie $y' = +\pi b/2$, Q auf der $y' = 0$, also auf der x' Axe und R auf der Linie $y' = -\pi b/2$ liegt, und setzen auf dem Stück PQ den Wert von φ gleich $+c$, so muss er auf dem Stück QR gleich $-c$ sein. Im Punkte Q erleidet

*) Das Folgende bis zum Schluss des Artikels ist mit geringen Abänderungen vom englischen Herausgeber, Herrn Dr. Niven, hinzugefügt. Anm. d. Uebers.

Digitized by Google

also φ einen Sprung von $+c$ auf $-c$. In Art. 195 wird sich zeigen, durch welche electrische Verteilung ein solcher Sprung verursacht wird.

Die Curven ψ und φ sind auf der Tafel XII. verzeichnet. Das oberste Drittel der Figur ist eine Wiederholung des untersten Drittels und fortzudenken, da schon die beiden ersten Drittel das Intervall $y' = -\pi b/2$ bis $y' = +\pi b/2$ enthalten.

Wir nehmen zweitens an, dass φ sein Zeichen stets beibehält und ψ mit y' sein Zeichen wechselt.

Dem Werte $\varphi = 0$ entspricht als φ Curve die negative x' Axe und dem Werte $\varphi = \infty$ eine zur x' Axe senkrechte, in der Unendlichkeit liegende Linie. Längs einer φ Curve PQR ist φ constant und positiv.

Aehnlich wie im vorigen Fall φ erleidet jetzt ψ auf einer ψ Curve beim Durchgang durch die negative x' Axe dadurch einen Sprung, dass der Wert von ψ plötzlich ins Entgegengesetzte umschlägt.

Die physikalische Bedeutung dieser Discontinuität wird aus den Erörterungen in Art. 197 erhellen.

194. Ich mache erst eine electrodynamische Anwendung dieser Ergebnisse. Benutzt man φ zur Bestimmung des Potentials und ψ zu der der Stromlinien, so haben wir den Fall eines unendlich langen Metallstreifens von der Breite πb, dessen in Richtung der positiven x' Axe laufender Teil durch einen vom Ursprung ausgehenden, parallel der x' Axe gerichteten, nicht leitenden Canal (etwa durch einen Schlitz in dem Streifen hervorgebracht) in zwei Hälften geteilt ist.

φ und ψ bestimmen dann Potential- und Stromlinien, wenn ein electrischer Strom in der Unendlichkeit in die eine Hälfte des positiven Teiles des Streifens ein- und durch die andere Hälfte dieses Teiles in der Unendlichkeit wieder austritt.

Ist umgekehrt ψ Niveau- und φ Stromfunction, so haben wir die Lösung für den Fall, dass ein Strom im Allgemeinen in Richtung der y' Axe durch eine Schicht fliesst, welche durch nichtleitende Canäle zerschnitten ist, die alle von der y' Axe ausgehen und parallel mit der negativen x' Axe in die Unendlichkeit verlaufen.

Eine einseitig begrenzte Platte zwischen zwei unendlichen Ebenen.

195. Wichtiger noch ist die Anwendung der obigen Formeln auf zwei electrostatische Fälle, die sich ergeben, je nachdem man ψ oder φ als Potentialfunction wählt. Es sei ein Conductor in Form einer ebenen Tafel gegeben, die sich nach einer Seite hin in die Unendlichkeit erstreckt und nach der andern Seite durch eine gerade Kante begrenzt ist.

Wir verlegen die Tafel in den positiven Teil der $x'z'$ Ebene, lassen die x' Axe senkrecht zur Kante stehen und bringen über und unter ihr in den

Digitized by Google

Abständen $\pi b/2$ zwei leitende, unendlich grosse Ebenen hin. Das Potential ψ ist dann auf der Tafel gleich Null und auf den beiden Ebenen gleich $\pi/2$.

Die in einem Streifen von der Breite 1 und der Länge $x'_2 - x'_1$ auf der Tafel enthaltene Electricitätsmenge, ist zunächst nach Art. 183, 3) gleich $(\varphi_2 - \varphi_1)/4\pi$. Machen wir also $x'_1 = 0$, $x'_2 = a$, so haben wir für diese Electricitätsmenge nach der Formel 1) des vorigen Artikel

1) $$E = \frac{1}{4\pi} \log \left(e^{\frac{a}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2a}{b}} - 1} \right).$$

Ist a, die Breite des Streifens, sehr gross im Verhältnis zu b, dem Quotienten aus dem Abstande der beiden die Tafel einfassenden Ebenen und aus π, so wird

1_1) $$E = \frac{1}{4\pi} \log 2 e^{\frac{a}{b}}$$

oder

1_2) $$E = \frac{a + b \log 2}{4 \pi b}.$$

Die Ladung unserer Tafel ist bei der tatsächlichen Verteilung grösser, als sie sein würde, wenn die Electricität sie gleichförmig mit der Dichte bedecken würde, welche auf der Tafel in einiger Entfernung von der Kante herrscht.

Ein Streifen von der angegebenen Art hat also bei der tatsächlichen Verteilung ebensoviel Electricität als ein um $b \log 2$ breiterer Streifen bei der gleichförmigen Verteilung.

In der Tafel XII. sind die Niveau- und Kraftlinien für den supponirten Fall einer gleichmässigen Verteilung der Electricität, wenn die beiden einfassenden Ebenen gleichförmig electrisirt sind und allseitig sich in die Unendlichkeit erstrecken, durch die punktirten Linien dargestellt. Man sieht, dass beide Liniensysteme aus Geraden bestehen. Die horizontalen geben die Durchschnitte der Niveauflächen mit der Platte, die verticalen die Kraftlinien.

196. *Condensator aus drei Platten.* Man wendet in der Praxis manchmal electrische Condensatoren an, die man sich in der oben angegebenen Weise dadurch herstellt, dass man eine Platte zwischen zwei andere bringt, welche sie weit überragen. Ist dabei der Krümmungsradius der Begrenzung der Mittelplatte gross im Verhältnis zu dem Abstande der einfassenden Platten, so darf man die Begrenzung als geradlinig auffassen und die obigen Formeln anwenden.

Man bestimmt also die Capacität der Mittelplatte des Condensators dadurch, dass man ihren Flächeninhalt durch einen um den Rand herumgelegten Streifen von der constanten Breite $b \log 2$ vergrössert, und dann unter Annahme, dass die Electricität mit der Dichte, die man auf der Platte

Digitized by Google

in einiger Entfernung von der Kante antrifft, verteilt ist, die gesammte auf der vergrösserten Platte enthaltene Electricitätsmenge berechnet.

Bezeichnen wir mit B den Abstand der umfassenden Platten, mit S den wahren Flächeninhalt der Mittelplatte und mit L die Länge ihrer wahren Begrenzung, so ist wegen der Beziehung $\pi b = B$ die Breite des hinzuzufügenden Streifens

a_1) $$\alpha = \frac{B}{\pi} \log 2,$$

der vergrösserte Flächeninhalt also

$$S' = S + \frac{BL}{\pi} \log 2,$$

woraus sich die Capacität der Mittelplatte ergiebt zu

2_1) $$\frac{S'}{2\pi B} = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{S}{B} + \frac{L}{\pi} \log 2\right\}.$$

Correction für die Dicke der Platte. Bei diesen Rechnungen ist von der Dicke der Mittelplatte ganz abgesehen worden, im allgemeinen wird man sie aber nicht gegen den Abstand der einfassenden Ebenen vernachlässigen dürfen. In einiger Entfernung von der Kante wird die Dicke überall dieselbe sein, an der Kante selbst aber, die wir uns als abgerundet vorzustellen haben, wird sie stark variiren.

Man gelangt daher zu genauern Resultaten, wenn man die Oberfläche der Platte nicht wie bisher mit der vermittelst der Curve $\psi = 0$ charakterisirten Niveaufläche, sondern mit der durch die Curve $\psi = \psi'$ bestimmten confundirt.

Ist β die Dicke der Platte, so haben wir $b\psi' = \beta/2$ zu setzen. Die Lage der Kante ergiebt sich aus der Bemerkung, dass für sie $y' = 0$ ist, die Kante geht also durch einen Punkt x' der x' Axe, der nach Art. 193, 6) durch die Gleichung

b) $$x' = b \log \cos\psi$$

bestimmt ist.

φ hat in dieser Kante den Wert Null und in einem Punkte $x' = a$ den Wert $(a + b \log 2)/b$. Daraus folgt, dass die Electricitätsmenge unserer Platte gefunden wird, wenn man ihr ausser dem frühern Streifen von der Breite $(B \log 2)/\pi$ noch einen von der Breite $(B \log \cos \pi\beta/2B)/\pi$ hinzufügt.

Im ganzen ist also die Platte um

a_2) $$\alpha_1 = \frac{B}{\pi}\left(\log 2 + \log \cos \frac{\pi\beta}{2B}\right) = \frac{B}{\pi} \log\left(2 \cos \frac{\pi\beta}{2B}\right)$$

zu verbreitern.

Die Electricität ist dann überall als gleichförmig mit einer Dichte, welche in einem in einiger Entfernung von der Kante der Platte befind-

Digitized by Google

lichen Punkt angetroffen wird, ausgebreitet zu denken, und man hat die Capacität

$$2) \qquad \frac{S'}{2\pi B} = \frac{1}{2B}\left\{\frac{S}{B} + \frac{L}{\pi}\log\left(2\cos\frac{\pi\beta}{2B}\right)\right\}.$$

Dichte der Electricität in der Nähe der Kante. Allgemein ist die Flächendichte in einem Punkte x' der Platte nach Art. 193, 1) gleich

$$3) \qquad \sigma = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x'}\log\left(e^{\frac{x'}{b}} + \sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} - 1}\right) = \frac{1}{4\pi b}\frac{e^{\frac{x'}{b}}}{\sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} - 1}},$$

$$= \frac{1}{4\pi b}\frac{1}{\sqrt{1 - e^{-\frac{2x'}{b}}}} = \frac{1}{4\pi b}\left(1 + \tfrac{1}{2}e^{-\frac{2x'}{b}} + \tfrac{3}{8}e^{-\frac{4x'}{b}} + \ldots\right).$$

Der Klammerausdruck nähert sich rasch mit wachsendem x', also mit wachsender Entfernung von der Kante, der 1.

Die bei der Berechnung der Electricitätsmenge anzunehmende Normaldichte ist also gleich $1/4\pi b$, und die wahre Dichte in einem Punkte, der sich in einer Entfernung $n\alpha = nb\log 2$ von der Kante befindet (dessen Entfernung von der Kante n mal so gross ist wie die Breite des ersten hinzuzufügenden Streifens), ist nur noch um den $1/2^{2n+1}$ten Teil der Normaldichte grösser als diese Normaldichte.

In ähnlicher Weise berechnet sich die in Punkten der einfassenden Ebenen herrschende Dichte der Electricität aus der Gleichung 3) in Art. 193 zu

$$4) \qquad \sigma' = \frac{1}{4\pi b}\frac{e^{\frac{x'}{b}}}{\sqrt{e^{\frac{2x'}{b}} + 1}}.$$

Für $x' = 0$ ist diese Dichte das $2^{-\frac{1}{2}}$fache der Normaldichte $1/4\pi b$.

Für $x' = n\alpha$ ist sie um den $1/2^{2n+1}$ten Teil der Normaldichte kleiner als diese.

Für $x' = -n\alpha$ ist sie das $1/2^n$fache der Normaldichte.

Man gewinnt durch diese speciellen Resultate ein Kriterium für die bei Platten von endlicher Ausdehnung oder bei Platten, welche in nicht zu grosser Entfernung von ihrer Grenze einige Unregelmässigkeiten aufweisen, durch die obige abgekürzte Berechnung erlangte Genauigkeit.

Ganz so wie in dem eben behandelten Fall verteilt sich die Electricität auch, wenn man eine unendlich grosse Anzahl von ähnlichen Platten, die sich in gleichen Abständen B auf einander folgen, hat, deren Potentialniveaus abwechselnd $+V$ und $-V$ sind.

Digitized by Google

Eine Reihe paralleler Halbebenen.

197. Wählen wir zweitens φ zur Potentialfunction, so gelangen wir zu der Lösung eines Problems, das sich auf eine unendliche Anzahl von leitenden Ebenen bezieht, welche einander in Intervallen $B = \pi b$ folgen, der $x'z'$ Ebene parallel in Richtung der negativen x' laufen und nur durch die Schnittlinien mit der $y'z'$ Ebene begrenzt sind, wenn das Potentialniveau aller dieser Halbebenen gleich Null ist.

Für eine im Abstande $y' = n\pi b$ von der $x'z'$ Ebene in der Verlängerung einer Ebene jener Schaar liegende Ebene haben wir

$$1) \qquad y' = n\pi b, \; x' = b \log \tfrac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}),$$

und für eine andere durch die Mitte zwischen dieser und der folgenden hindurchgehende Ebene

$$2) \qquad y' = b(n + \tfrac{1}{2})\pi, \; x' = b \log \tfrac{1}{2}(e^{\varphi} - e^{-\varphi}).$$

Die Curve $\varphi = \text{const}$ verläuft also wie eine in der $x'y'$ Ebene liegende Wellenlinie.

Ist φ sehr gross, so ist der mittlere Abstand der zugehörigen Wellenlinie von der y' Axe näherungsweise

$$3) \qquad x' = a = b(\varphi - \log 2).$$

Die Amplitude der Undulation zu einer Seite der Wellenaxe ist gleich

$$4) \qquad \tfrac{1}{2} D = \tfrac{1}{2} b \log \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{e^{\varphi} - e^{-\varphi}},$$

also für grosse Werte von φ gleich

$$4_1) \qquad D_1 = 2 b e^{-2\varphi}.$$

In der grossen positiven Entfernung a von der y' Axe nähert sich die Wellenlinie einer Geraden.

Denken wir uns durch $x' = a$ senkrecht zur $x'z'$ Ebene eine leitende Ebene gelegt, die ein bestimmtes Potentialniveau hat, das sich von dem Potentialniveau der Conductoren unterscheiden kann, so ist, weil allda $b\varphi = a + b \log 2$ ist, die Flächendichte der in dieser Ebene inducirten Electricität ebenso gross, wie wenn die Electricität durch eine der fraglichen Ebene parallele, im Abstand $\alpha = b \log 2$ von den Kanten der electrischen Ebenen auf der Seite der negativen x' befindliche und zu dem Potential dieser Ebenen geladene Ebene inducirt wäre.

Ist noch B der Abstand zweier auf einander folgender Ebenen, so haben wir

$$\alpha = \frac{B}{\pi} \log 2.$$

Digitized by Google

Die Flächendichte auf den zur $x'z'$ Ebene parallelen electrischen Ebenen findet sich aus der Gleichung

$$\sigma = \left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\psi}{\partial x'}\right)_{\varphi=0}$$

nach Art. 193, 2) zu

5) $$\sigma = \frac{1}{4\pi b}\frac{1}{\sqrt{e^{-\frac{2x'}{b}}-1}}.$$

Auf einer in beträchtlicher Entfernung von den Kanten unserer Reihe von Ebenen befindlichen Ebene ist die mittlere Dichte

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{4\pi b},$$

sie ist also das $\sqrt{2^{2n}-1}$ fache der auf einer der electrischen Ebenen in der n fachen Entfernung $n\alpha = nb\log 2$. von ihrer Kante herrschenden Dichte.

Eine plane und eine gewellte Ebene.

198. Wir betrachten nun den Raum zwischen zwei äquipotentiellen Flächen, deren eine durch parallele Berge und Thäler wellig gebogen ist, während die andere in der Entfernung $x' = a$ von den Kanten der electrischen Ebenen befindliche mit einer Ebene confundirt werden darf.

Bezeichnet D die Tiefe der Wellen einer bestimmten Niveaufläche von der Spitze bis zur Sohle gerechnet, so haben wir das zugehörige

1) $$\varphi = \tfrac{1}{2}\log\frac{e^{\frac{D}{b}}+1}{e^{\frac{D}{b}}-1}.$$

Ist Φ das Potential auf der Niveaufläche $x' = a$, die wie eine Ebene zu behandeln ist, und φ das Potential einer andern Niveaufläche, so ist, weil die Ladung der Flächeneinheit jener Ebene gleich $1/4\pi b$ ist, die Capacität derselben in Gegenwart der zweiten Niveaufläche

2) $$C = \frac{1}{4\pi b(\Phi-\varphi)}.$$

Wir setzen das gleich

2') $$C = \frac{1}{4\pi(A+\alpha')}$$

Digitized by Google

und erhalten

a) $$A + \alpha' = b\,(\Phi - \varphi).$$

Verstehen wir nunmehr unter A den Abstand der Wellenspitzen der zweiten Niveaufläche von der ersten als Ebene zu betrachtenden, dann ist nach den Gleichungen unter 1) und 2)

$$A + x' = A + b \log \tfrac{1}{2}\,(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) = a = b\,(\Phi - \log 2),$$

also haben wir

b) $$\begin{aligned} \alpha' &= -b\varphi + b\,[\log 2 + \log \tfrac{1}{2}\,(e^{\varphi} + e^{-\varphi})] \\ &= b \log (1 + e^{-2\varphi}) \\ &= b \log \frac{2}{1 + e^{-\frac{D}{b}}}, \end{aligned}$$

und das bedeutet, dass die Capacität des aus einer planen und einer gewellten Ebene bestehenden Systems von Niveauflächen ebenso gross wie die zweier paralleler von einander um $A + \alpha'$ abstehender Ebenen ist, wenn A die mittlere Entfernung unserer beiden Niveauflächen angiebt und

$$\alpha' = b \log \frac{2}{1 + e^{-\frac{D}{b}}}$$

gemacht wird.

Durchfurchte Flächen.

199. Dem obigen zufolge ist also die Capacität einer Ebene in Gegenwart einer andern grösser, als diejenige einer gewellten Ebene in Gegenwart einer andern Ebene. Bringt man also in einen durch eine Ebene begrenzten Conductor eine Furche an, so wird seine Capacität in Gegenwart eines andern ebenen Conductors verringert. Von je mehr Furchen einer der Conductoren durchzogen wird, desto kleiner ist seine Capacität im Verhältnis zu der Capacität, die er haben würde, wenn er ganz eben wäre. Die Verringerung der Capacität durch n Furchen ist aber kleiner als das $n$fache der Verringerung durch eine Furche, so dass die Capacität verhältnismässig um so weniger abnimmt, je mehr Furchen man zieht; denn da die durchschnittliche zwischen den Conductoren wirkende electrische Kraft bei mehrfacher Durchfurchung eines derselben kleiner als bei einfacher Durchfurchung ist, so wird die Induction in eine Furche durch die Existenz anderer Furchen verringert.

Bezeichnet man mit L die Länge, mit B die Breite und mit D die Tiefe einer Furche in einem der um A von einander abstehenden Conductoren,

Digitized by Google

so ist die Capacität eines Flächenstückes S des gegenüberstehenden Conductors

1) $$C = \frac{S - LB}{4\pi A} + \frac{LB}{4\pi(A+\alpha')} = \frac{S}{4\pi A} - \frac{LB}{4\pi A}\frac{\alpha'}{A+\alpha'}.$$

Das Glied $-LB\alpha'/4\pi A(A+\alpha')$ bezeichnet die Correction, welche nach der Durchfurchung an die ursprüngliche Capacität anzubringen ist, um die dem neuen Zustand entsprechende Capacität zu erhalten.

Ist A sehr gross gegen B oder α', so wird nach der Gleichung b) im vorigen Artikel

1_1) $$C = \frac{S}{4\pi A} - \frac{L}{4\pi^2}\frac{B^2}{A^2}\log\frac{2}{1+e^{-\pi\frac{D}{B}}}.$$

Wird $D = \infty$, so geht die Furche in einen durch den ganzen Conductor führenden Schlitz über, und die Capacität wird

1_2) $$C = \frac{S}{4\pi A} - \frac{L}{4\pi^2}\frac{B^2}{A^2}\log 2$$
$$= \frac{S}{4\pi A} - 0{,}0175576\,\frac{B^2}{A^2}L.$$

Abänderung der Conductoren durch Rotation.

200. *Cylindrisch gebogene Platten.* Wir suchen mit Hilfe der obigen Ergebnisse die electrische Verteilung in einer Configuration zu bestimmen, welche durch Rotation unserer Halbebenen um eine Axe $y' = -R$ entsteht. Die ebenen Platten gehen in cylindrisch gekrümmte über und die gewellten Niveauebenen bleiben gewellte Ebenen, ihre Canellirung wird aber kreisförmig.

Die Poissonsche Gleichung erhält für diesen Fall die Form

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y'^2} + \frac{1}{R+y'}\frac{\partial V}{\partial y'} + 4\pi\rho = 0.$$

Setzen wir V gleich unserer frühern Function φ (Art. 193), so wird

$$\rho = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{R+y'}\frac{\partial\varphi}{\partial y'}.$$

Nimmt man also an, dass neben der auf Flächen in der früher Art. 197, 5) bestimmten Weise verteilten Electricität von der Dichte σ noch eine Raumverteilung von der durch obige Gleichung angegebenen Raumdichte ρ existirt, so kann man alle frühern Rechnungen und Resultate beibehalten. Die Figur auf Tafel XII. repräsentirt also auch für diesen Fall den Verlauf der äquipotentiellen Linien.

Digitized by Google

Eine nähere Betrachtung dieser Figur lehrt aber, dass $\partial\varphi/\partial y$, abgesehen von den Kanten der Platten, verhältnissmässig klein ist, so dass die neu einzuführende Verteilung von Electricität als lediglich auf diese Kanten beschränkt angesehen werden darf, und näherungsweise als das erscheint, was wirklich vorhanden ist, nämlich als eine Flächenladung.

Das Integral $E = \iint \rho\, dx'\, dy'$ von $y' = 0$ bis $y' = \pi b/2$ und von $x' = -\infty$ bis $x' = +\infty$ giebt demnach die gesammte Ladung, die einer Seite der Platten wegen der eingeführten Krümmung hinzugefügt werden muss.

Man hat aber $\partial\varphi/\partial y' = -\partial\psi/\partial x'$ und $\pi b = B$, also

$$E = \int_0^{\frac{B}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\, dx'\, dy' = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{B}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{R+y'} \frac{\partial\psi}{\partial x'}\, dx'\, dy'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_0^{\frac{B}{2}} \frac{1}{R+y'} (\psi_{+\infty} - \psi_{-\infty})\, dy'$$

oder nach Art. 193, 4)

$$E = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{B}{2}} \frac{1}{R+y'} \left(2\frac{y'}{B} - 1\right) dy'$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \frac{2R+B}{B} \log \frac{2R+B}{2R}$$

$$= -\frac{1}{32}\frac{B}{R} + \frac{1}{192}\frac{B^2}{R^2} + \cdots$$

Das giebt die Hälfte der gesammten Electricitätsmenge, die man in dem Raume zwischen zwei aufeinanderfolgenden Cylinderflächen von den Radien R und $R + B/2$ für die Längeneinheit des Umfangs zu verteilen hat. Sie ist, wie ich bemerkt habe, fast nur an der Kante einer Fläche fühlbar und kann, ohne dass die Wirkung dieser Fläche auf die gegenüberstehende alterirt wird, gänzlich auf ihr condensirt gedacht werden. Man darf also auch die Abstossungskraft zwischen den Flächen unter Annahme einer solchen Flächenverteilung der hinzukommenden Electricität berechnen.

Vor der Rotation war die gesammte auf einem unendlich langen Streifen von der Breite $z = 1$ auf der positiven Seite einer Platte enthaltene Electricitätsmenge (Art. 193, 4)

$$E' = -\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{4\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\, dx' = \frac{1}{4\pi} (\psi_0 - \psi_{-\infty}) = -\frac{1}{8}.$$

Digitized by Google

Nach der Rotation wird also die entsprechende gesammte Ladung einer Cylinderfläche vom Radius R näherungsweise das $(1 + \frac{1}{2} B/R)$ fache der frühern.

Kreisscheibe zwischen zwei unendlichen Ebenen. Aehnlich erhält man für die Capacität einer Scheibe vom Radius R, die sich mitten zwischen zwei unendlichen Platten, deren Abstand von einander B beträgt, befindet,

$$C = \frac{R^2}{B} + \frac{2R}{\pi} \log 2 + \frac{B}{2}.$$

Theorie des Thomsonschen Schutzringes.

201. In einigen der von W. Thomson construirten Electrometer befindet sich gegenüber einer breiten ebenen, zu einem gewissen Potential geladenen Platte, in einer Entfernung A eine ebene Scheibe vom Radius R, welche von einem breiten Ring, dem Schutzring, mit dem innern Radius R' concentrisch umgeben wird. Scheibe und Ring werden beide auf dem Potential Null erhalten.

Bei der Entwickelung der Theorie dieses Systems von Conductoren kann man, Scheibe und Ring zusammen genommen, wie eine Ebene betrachten, welche von einer kreisförmigen Furche, deren Tiefe unendlich gross und deren Breite $B = R' - R$ ist. Diese gefurchte Ebene befindet sich dann einer andern Ebene gegenüber.

Setzt man voraus, dass die Electricität auf der Scheibe gleichmässig verteilt ist, so ist die Ladung derselben, welche von dem Potentialniveau 1 der Platte hervorgerufen wird, nach Art. 124 gleich $R^2/4A$.

Weiter kann man die Ladung an einem Rande einer geraden Furche von der Breite B, der Länge L und einer unendlich grossen Tiefe durch die Anzahl der Inductionslinien messen, welche von der Platte ausgehend, in diesem Rande ihr Ende finden. Unter Beachtung der in Art. 197 und 198 geführten Untersuchungen erhält man diese Ladung

$$E' = \tfrac{1}{2} LB \frac{1}{4\pi b}$$

oder, weil für $\Phi = 1$, $\varphi = 0$ das $b = A + \alpha'$ wird und $L = 2\pi R$ ist,

$$E' = \tfrac{1}{4} \frac{RB}{A + \alpha'}.$$

In unserm Fall ist die Furche kreisförmig, nach Art. 200 haben wir also den obigen Ausdruck noch mit $1 + B/2R$ zu multipliciren. Wir erhalten dann für die Gesammtladung der Scheibe

1a) $$E = \frac{R^2}{4A} + \frac{1}{4} \frac{RB}{A + \alpha'} \left(1 + \frac{B}{2R}\right),$$

Digitized by Google

oder zufolge des Wertes von B

1b) $$E = \frac{R^2 + R'^2}{8A} + \frac{R^2 - R'^2}{8A} \frac{\alpha'}{A + \alpha'}.$$

Die Grösse

2) $$\alpha' = \frac{B}{\pi} \log \frac{2}{1 + e^{-\frac{D}{B}\pi}}$$

ist nicht grösser als $(B \log 2)/\pi$, ist also näherungsweise gleich $0{,}22\,B$.

Wenn demnach B verhältnismässig klein gegen A oder R ist, so erhält man durch die obige Formel einen genügenden Ausdruck für die in Folge ihrer Potentialdifferenz gegen die Platte auf der Scheibe durch Induction hervorgerufene Electricitätsmenge.

Das Verhältnis von A zu R ist keiner Beschränkung unterworfen; dagegen muss der Radius der Platte sowohl wie der des Schutzringes den Radius der Scheibe um ein möglichst grosses Multiplum von A übersteigen.

Eine halbe Ebene gegenüber einer ganzen Ebene.

202. Ich schlage auch hier den entgegengesetzten Weg ein, indem ich erst einen gewissen Ausdruck für das Potential aufstelle, und dann die zugehörigen Conductoren bestimme. Dabei folge ich dem Gedankengange, der Helmholtz leitete, als er in seiner Abhandlung über discontinuirliche Flüssigkeitsbewegungen*) die Coordinaten als Functionen des Potentials und der diesem conjugirten Function darstellte.

Man überzeugt sich leicht, dass

$$x_1 = A\varphi, \qquad y_1 = A\psi$$
$$x_2 = Ae^{\varphi}\cos\psi, \qquad y_2 = Ae^{\varphi}\sin\psi$$

zwei Paare conjugirter Functionen von φ und ψ sind. Setzen wir also

1) $$x = A\varphi + Ae^{\varphi}\cos\psi,$$

2) $$y = A\psi + Ae^{\varphi}\sin\psi,$$

so sind x und y conjugirte Functionen von φ und ψ und umgekehrt auch φ und ψ conjugirte Functionen von x und y.

Wir verstehen nunmehr unter x, y rechtwinklige Coordinaten, unter k eine Constante und unter $k\psi$ ein Potential, dem $k\varphi$ conjugirt ist.

Machen wir, um zu erfahren, welchem System von Conductoren $k\psi$ als Potential zugehört, zuerst $\psi = 0$, so wird $y = 0$; die xz Ebene ist also eine äquipotentielle Fläche vom Potentialniveau Null.

Setzen wir ferner $\psi = \pi$, so wird $y = A\pi$, $x = A(\varphi - e^{\varphi})$.

*) Abh. d. Kgl. Acad. der Wissenschaften zu Berlin, 1868, April 23.

Digitized by Google

Durchläuft also φ alle Werte von $-\infty$ bis 0 und dann von 0 bis $+\infty$, so variirt x von $-\infty$ bis $-A$ und von $-A$ zurück bis $-\infty$.

Die äquipotentielle Fläche $k\psi = k\pi$ ist also eine der xzEbene parallele Ebene, welche vom Coordinatenursprung um die Strecke $b = A\pi$ entfernt ist und bei $x = -\infty$ und $x = -A$ von geraden Linien begrenzt wird.

An der Kante dieser Niveauebene, wo $x = -A$ ist, haben wir $\varphi = 0$, in einer Entfernung a von der Kante, wo x den Wert $-(A+a)$ besitzt, berechnet sich φ aus der Gleichung

$$-(A+a) = A(\varphi - e^{\varphi}).$$

Diese Gleichung giebt aber zwei reelle Werte für φ, einen negativen φ_1 und einen positiven φ_2, die entgegengesetzten Seiten der Niveauebene $k\psi = k\pi$ zugehören. Daher ist die Electricitätsmenge auf einem Streifen, der von den vier Linien $x = -A$, $x = -(A+a)$, $z = 0$, $z = c$ eingefasst wird, nach der hierher gehörigen Gleichung in Art. 183 gleich $-ck\varphi_1/4\pi$ auf der einen, und gleich $ck\varphi_2/4\pi$ auf der andern Seite. Weil φ_1 negativ und φ_2 positiv ist, sind beide Seiten des Streifens positiv geladen, und die ganze Electricitätsmenge des Streifens beträgt

$$3') \qquad \frac{ck(\varphi_2 - \varphi_1)}{4\pi}.$$

Die Gleichung für φ ist transcendent, als Näherungswerte ihrer Wurzeln erhält man

$$4) \quad \varphi_1 = -\frac{a}{A} - 1 + e^{\varphi_1} = -\frac{a}{A} - 1 + e^{-\frac{a}{A} - 1 + e^{-\frac{a}{A} - 1 + e^{\cdots}}},$$

$$5) \quad \varphi_2 = \log\left\{\frac{a}{A} + 1 + \varphi_2\right\} = \log\left\{\frac{a}{A} + 1 + \log\left(\frac{a}{A} + 1 + \log\left(\frac{a}{A} + 1 + \cdots\right\}\right.\right..$$

Ist a so gross gegen A, dass man $e^{-a/A}$ schon vernachlässigen darf, so wird

$$4_1) \qquad \varphi_1 = -\frac{a}{A} - 1.$$

Die Ladung auf der negativen Seite des Streifens ist dann ebenso gross, wie die Ladung, die der Streifen auf dieser Seite haben würde, wenn seine Breite um $A = b/\pi$ vergrössert und die Electricität auf ihm mit der Dichte, die sie in der Wirklichkeit erst in einiger Entfernung von der Kante hat, gleichförmig ausgebreitet wäre.

Die Capacität beider Seiten des Streifens der Niveauebene $k\psi = k\pi$ ist

$$6) \qquad C = \frac{c}{4\pi^2}\left(\varphi_2 - \varphi_1\right),$$

und da die gesammte Ladung gleich CV ist, wo V das Potentialniveau angiebt, so haben wir für die Attraction des Streifens gegen die ganze

Digitized by Google

Niveauebene $y = 0$, wo $\psi = 0$ ist, für verhältnisgrosse Werte von a/A den Ausdruck

$$7) \qquad -\tfrac{1}{2}V^2\frac{\partial C}{\partial b} = V^2\frac{ac}{8\pi b^2}\left(1+\frac{\frac{A}{a}}{1+\frac{A}{a}\log\frac{a}{A}}+e^{-\frac{a}{A}}+\cdots\right)$$

$$= V^2\frac{c}{8\pi b^2}\left(a+\frac{b}{\pi}-\frac{b^2}{\pi^2 a}\log\frac{\pi a}{b}+\cdots\right).$$

Die Figur auf Tafel XIII. enthält die auf diesen Fall bezüglichen Niveau- und Kraftlinien.

Theorie des Schutzgitters.

203. Das Problem der Electricitätsverteilung auf einem von parallelen Drähten gebildeten Gitter hat für die Praxis eine gewisse Bedeutung, weil solche Gitter häufig verwendet werden, um Körper gegen die Influenz anderer Körper zu schützen.

Am einfachsten hält man von einem Körper die Influenz ab, wenn man ihn in ein ihn vollständig einschliessendes und nirgend berührendes Metallgefäss bringt, das sich mit ihm auf demselben Potentialniveau befindet. Da aber der Körper dann für den aussenstehenden Experimentator unsichtbar wird, so ist man gezwungen, in das umhüllende Gefäss eine Oeffnung zu bohren, die man, um die schützende Wirkung des fortgefallenen Metallstückes zu ersetzen, mit einem Gitter von parallelen Drähten schliesst.

Wir haben nun zu untersuchen, inwiefern ein solches Gitter die schützende Wirkung eines Metallstückes wirklich zu ersetzen vermag.

Das Gitter soll aus einer Reihe feiner paralleler und in einer Ebene in gleichen Abständen angeordneter Drähte bestehen. Die Intervalle zwischen den Drähten sollen sehr gross gegen die Durchmesser der Drähte, aber verhältnismässig klein gegen die Entfernung des dem Gitter nächsten electrischen Körpers sein.

204. Das Potentialniveau eines geraden dünnen Drahtes von unendlicher Länge, der auf einer Längeneinheit die Electricitätsmenge λ enthält, ist nach Art. 126 in einer Entfernung r' von seiner Axe

$$V = -2\lambda\log r' + C.$$

Führen wir Polarcoordinaten (s. Art. 191) r, ϑ ein, deren Axe in der Einheit der Entfernung von der Axe des Drahtes parallel mit dieser läuft, so haben wir

$$r'^2 = 1 - 2r\cos\vartheta + r^2.$$

Laden wir die Coordinatenaxe selbst mit Electricität, so dass sich auf ihrer Längeneinheit die Menge λ' befindet, so geht das Potential im Punkte r, ϑ über in

$$V = -\lambda\log(1 - 2r\cos\vartheta + r^2) - 2\lambda'\log r + C.$$

Digitized by Google

Setzen wir endlich

a) $$r = e^{2\pi \frac{y}{a}}, \quad \vartheta = \frac{2\pi x}{a}$$

und verstehen unter x und y rechtwinklige Coordinaten, so giebt nach der Theorie der conjugirten Functionen der Ausdruck

1) $$V = -\lambda \log\left(1 - 2e^{\frac{2\pi y}{a}} \cos\frac{2\pi x}{a} + e^{\frac{4\pi y}{a}}\right) - 2\lambda' \log e^{\frac{2\pi y}{a}} + C$$

das Potential in dem Punkte x, y, herrührend von einer unendlichen Reihe feiner Drähte, die alle in der $x\,z$ Ebene parallel der z Axe laufen, die x Axe von Null angefangen in lauter gleiche Intervalle a zerschneiden, und die alle mit derselben Electricitätsmenge λ auf der Längeneinheit geladen sind.

Das Glied mit dem Factor λ' zeigt eine Electrisirung an, welche in Richtung der y Axe eine constante Kraft $4\pi\lambda'/a$ ausübt.

Die Figur auf Tafel XIV. zeigt die in einer zu den Drähten senkrechten Ebene liegenden Niveau- und Kraftlinien für den Fall, dass $\lambda' = 0$ ist.

In der Nähe der Drähte sind die Niveauflächen nahezu Cylinder, so dass die obige Lösung auch noch gilt, wenn die Drähte durch cylindrische Stäbe gebildet werden. Doch darf die Bedingung, dass ihre Abstände von einander sehr viel grösser als ihre Durchmesser sind, nicht verletzt werden.

In genügender Entfernung von den Drähten gehen die äquipotentiellen Flächen in Ebenen über, die sich parallel der Ebene des Drahtgitters erstrecken, also die y Axe senkrecht schneiden.

Auf einer Ebene $y = b_1$ ist also, wenn b_1 verhältnismässig gross gegen a, den Zwischenraum zwischen zwei Drähten, ist, näherungsweise

1_1) $$V_1 = -\frac{4\pi b_1}{a}(\lambda + \lambda') + C.$$

Aehnlich haben wir für $y = -b_2$, wo b_2 eine positive und gegen a beträchtliche Grösse bedeutet,

1_2) $$V_2 = \frac{4\pi b_2}{a}\lambda' + C.$$

Das Potentialniveau des Gitters erhalten wir durch die Annahme, dass die Oberfläche eines jeden Drahtes mit der Niveaufläche zusammenfällt, welche in einer dem Radius c der Drähte gleichen Entfernung von der z Axe die $x\,z$ Ebene schneidet.

Wir haben also in dem allgemeinen Ausdruck für das Potential $x = c$, $y = 0$ zu setzen, und erhalten für das Potentialniveau des Gitters, weil c gegen a sehr klein sein sollte,

1_3a) $$V = -2\lambda \log 2 \sin\frac{\pi c}{a} + C.$$

Digitized by Google

Der folgenden Untersuchungen wegen setze ich

b) $$\alpha = -\frac{a}{2\pi}\log 2\sin\frac{\pi c}{a}$$

und habe

1_3b) $$V = \frac{4\lambda\pi}{a}\alpha + C.$$

α ist eine Linie, die für ein sehr kleines c unendlich lang wird.

205. Die beiden Ebenen $y = b_1$, $y = -b_2$ sind zwar streng genommen keine Niveauebenen, nimmt man aber b_1 und b_2 möglichst gross an, so darf man sie durch Conductorebenen ersetzen. Bezeichnen wir die Dichte der auf der Ebene $y = b_1$ bezüglich $y = -b_2$ influencirten Electricität mit σ_1 bezüglich σ_2, so ist

2a) $$4\pi\sigma_1 = \frac{\partial V_1}{\partial b_1} = -\frac{4\pi}{a}(\lambda + \lambda'),$$

3a) $$4\pi\sigma_2 = \frac{\partial V_2}{\partial b_2} = +\frac{4\pi}{a}\lambda'.$$

Eliminirt man aus diesen beiden und den drei voraufgehenden Gleichungen für V, V_2, V_1 die drei Grössen λ, λ', C, so resultiren für die Dichten die beiden Gleichungen

2b) $$4\pi\sigma_1\left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}\right) = V_1\left(1 + \frac{b_2}{\alpha}\right) - V_2 - V\frac{b_2}{\alpha},$$

3b) $$4\pi\sigma_2\left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}\right) = V_2\left(1 + \frac{b_1}{\alpha}\right) - V_1 - V\frac{b_1}{\alpha}.$$

Sind die Drähte sehr dünn, so ist α unendlich gross, und man erhält für die Dichten σ_1, σ_2 auf den beiden Ebenen dieselben Ausdrücke, welche gelten würden, wenn zwischen den Ebenen überhaupt kein Gitter vorhanden wäre.

Verbindet man das Gitter leitend mit einer der Ebenen, etwa mit der Ebene $y = b_1$, so wird $V = V_1$ und

2_1) $$4\pi\sigma_1\left(b_1 + b_2 + \frac{b_1 b_2}{\alpha}\right) = V_1 - V_2.$$

Demnach verhält sich die Dichte der unter Anwesenheit des Gitters auf der ersten Ebene durch die zweite inducirten Electricität zu der Dichte, welche die Electricität dort erlangt, wenn das Gitter nicht vorhanden ist, während die zweite Ebene ihr Potential ungeändert beibehält, wie

4) $$1 \text{ zu } \left(1 + \frac{b_1 b_2}{\alpha(b_1 + b_2)}\right).$$

Digitized by Google

Dasselbe Resultat erhalten wir, wenn wir das Gitter mit der zweiten Ebene verbinden (es folgt das sowohl daraus, dass b_1 und b_2 in den Formeln in derselben Weise auftreten oder auch aus Art. 88).

Bringt man also ein Drahtgitter zwischen zwei Ebenen, so wird ihre Induction aufeinander ebenso stark verringert, wie wenn man den Abstand $b_1 + b_2$ der beiden Ebenen um $b_1 b_2/\alpha$ vergrössert hätte.

Erhält man beide Ebenen auf dem Potential Null und electrisirt das Gitter zu einem gewissen Potentialniveau, so steht seine Electricitätsmenge zu der, welche bei einer in seiner Lage befindlichen Ebene auftritt, in dem Verhältnis von

5) $$b_1 b_2 \text{ zu } b_1 b_2 + \alpha (b_1 + b_2).$$

Doch gilt das Alles nur, wenn b_1 und b_2 gegen a, und α gegen c genügend gross ist.

Wird der Radius c der Drähte gleich $a/2$, so berühren sich die Drähte gegenseitig und bilden eine geschlossene Wand.

Es dürfte also in diesem Falle durch das Gitter hindurch keine Induction der beiden Ebenen aufeinander auftreten, und man müsste haben

$$4\pi\sigma_1 = \frac{V_1 - V}{b_1}, \quad 4\pi\sigma_2 = \frac{V_2 - V}{b_2},$$

das heisst es müsste $\alpha = 0$ sein.

Aus der für α gegebenen Formel findet man dagegen

$$\alpha_{c=a/2} = -\frac{a}{2\pi}\log 2 = -0{,}11\,a.$$

Man darf aber nicht ausser Acht lassen, dass dann auch unsere Gleichungen, weil sie nur approximativ gelten, nicht mehr ausreichen. Ich werde deshalb, freilich ohne genaue Durchführung der einzelnen Rechnungen, zeigen, wie man zu noch weiter getriebenen Annäherungen gelangen kann.

206. Ich gehe bei dieser strengern Rechnung direct davon aus, dass ein Gitter und zu beiden Seiten desselben zwei ihm parallele ebene Conductoren gegeben sind, die aufeinander und auf das Gitter influencirend einwirken.

Nach der Theorie der electrischen Bilder hat man das Gitter in den beiden Ebenen abzubilden, und dann die Potentiale der einzelnen Bilder zu summiren. Für jedes Bild wird das Potential ähnlich construirt sein, wie das, was wir schon benutzt haben, es wird also namentlich von dem $\cos(2\pi x/a)$ und von der Grösse $2\pi y/a$ abhängen.

Setzen wir also

$$\vartheta = \measuredangle(r, y), \; \xi = \frac{2\pi x}{a}, \; \eta = \frac{2\pi y}{a}, \; \rho = \frac{2\pi r}{a}, \; \beta = \frac{2\pi b}{a},$$

Digitized by Google

und bilden eine Function

$$1a) \qquad F_\beta = \log(e^{\eta+\beta} + e^{-(\eta+\beta)} - 2\cos\xi),$$

so können wir, indem das Potential des Gitters

$$2) \qquad V = A_0 F + A_1 \frac{\partial F}{\partial \eta} + A_2 \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \ldots$$

gesetzt wird, die Constanten $A_0, A_1, \ldots$ so bestimmen, dass V ein Potential angiebt, welches von η und von $\cos\xi$ abhängt und nur für $\eta + \beta = 0$ und $\cos\xi = 1$ unendlich wird.

Entwickelt man die Function F_β nach ρ und ϑ, so ergiebt sich

für $\beta > 0$

$$1b) \quad F_\beta = \beta + 2\log(1-e^{-\beta}) + \frac{1+e^{-\beta}}{1-e^{-\beta}}\rho\cos\vartheta - \frac{e^{-\beta}}{(1-e^{-\beta})^2}\rho^2\cos 2\vartheta + \ldots,$$

für $\beta = 0$

$$1_1) \qquad F_0 = 2\log\rho + \frac{1}{12}\rho^2\cos 2\vartheta - \frac{1}{1440}\rho^4\cos 4\vartheta + \ldots,$$

und damit lässt sich dann V für jeden gitterförmigen Conductor berechnen.

Bei der Abbildung des Gitters in den Ebenen erhält man nun zwei unendliche Reihen von Bildern. Die erste Reihe besteht aus dem Gitter selbst und aus Bildern, die zu beiden Seiten desselben liegen und mit ihm gleich und gleichsinnig geladen sind.

Bezeichnet man die Gleichungen der beiden Ebenen durch $\eta_1 = \beta_1$, $\eta_2 = -\beta_2$ und fixirt die Lage des Gitters durch $\eta = 0$, so liegen die Axen dieser Bilder (also die Axen der abgebildeten Drähte) in Ebenen

$$\eta = \pm 2n(\beta_1 + \beta_2),$$

wo n eine ganze Zahl angiebt.

Für das Potential eines jeden dieser Bilder gilt dann eine Entwickelung, wie sie oben in ihrer Abhängigkeit von den Constanten A angegeben worden ist. Die Constanten A sind für diese Bilder dieselben, wie für das Gitter.

Die zweite Reihe umfasst wieder eine unendliche Anzahl von Bildern, in deren Potentialfunctionen die Constanten $A_0, A_2, A_4 \ldots$ gleich und entgegengesetzt, die Constanten A_1, A_3, A_5 gleich den entsprechenden in der Potentialfunction des Gitters vertretenen Constanten sind. Die Axen dieser Bilder liegen in Ebenen

$$\eta = 2\beta_2 \pm 2m(\beta_1 + \beta_2),$$

wo m eine ganze Zahl ist.

Digitized by Google

Das Gesammtpotential der Ebenen und des Gitters ist gleich der Summe der Potentiale aller Bilder.

Wenn man es mit einer endlichen Anzahl von Bildern zu tun hat, so hängt das Gesammtpotential davon ab, ob die Anzahl der Bilder eine gerade oder eine ungerade ist, bei einer unendlichen Anzahl von Bildern ist also die Summe der einzelnen Potentiale eine unbestimmte Grösse. Fügt man aber noch eine Function $B\eta + C$ hinzu, so erlangt man eine hinreichende Anzahl von Bedingungsgleichungen, um die electrische Verteilung auf den leitenden Ebenen bestimmen zu können.

Man entwickelt für jedes Bild das zugehörige Potential nach den Gleichungen 1) und 2), summirt alle Potentiale, fügt noch die Terme $B\rho\cos\vartheta + C$ hinzu und erhält so eine Reihe von Gliedern, die zum Teil nach Potenzen von ρ und Cosinussen von Vielfachen von ϑ fortschreiten. Betrachtet man dieses Aggregat von Gliedern als das gesuchte Potential, so hat man also

$$V' = V + \Sigma\, C_i \rho^i \cos i\vartheta.$$

V, das Potential des Gitters, hängt nur von r, dem Abstand des betrachteten Punktes von der Axe eines Drahtes, nicht von ϑ ab, die C sind Functionen von β, B und von den A.

Jeder Draht des Gitters ist aber ein Leiter, auf ihm muss also V' überall einen und denselben Wert haben, folglich müssen die Glieder, die nach Cosinussen von Vielfachen von ϑ fortschreiten, wenn r gleich dem Radius eines Drahtes wird, herausfallen, das giebt

$$C_i = 0,$$

eine Reihe von Gleichungen, aus denen man beliebig viele der Constanten A berechnen kann.

Es sind dann noch die Constanten A_0, B unbestimmt. Zu ihrer Berechnung bedient man sich der Kenntnis der Potentialniveaus V_1, V_2, V auf den beiden Ebenen und auf dem Gitter, indem man jedes derselben in der schon angegebenen Weise entwickelt, und die schon eruirten Werte der A benutzt.

Die Mittelwerte σ_1, σ_2 für die Flächendichten auf den beiden Ebenen ergeben sich zu

$$\sigma_1 = \frac{1}{2a}(A_0 - B),\quad \sigma_2 = \frac{1}{2a}(A_0 + B),$$

und man erhält nach Ausführung der angegebenen Operationen Gleichungen von der Form

3) $$V_1 - V = 4\pi\sigma_1(b_2 + \alpha - \gamma) + 4\pi\sigma_2(\alpha + \gamma),$$

4) $$V_2 - V = 4\pi\sigma_2(b_2 + \alpha - \gamma) + 4\pi\sigma_1(\alpha + \gamma).$$

Digitized by Google

Für α und γ ergiebt eine genauere Rechnung die Näherungswerte

a)
$$\alpha = \frac{a}{2\pi}\left\{\log\frac{a}{2\pi c} - \frac{5}{3}\,\frac{\pi^4 c^4}{15a^4+\pi^4c^4} + 2e^{-4\pi\frac{b_1+b_2}{a}}\left(1+e^{-4\pi\frac{b_1}{a}}+e^{-4\pi\frac{b_2}{a}}+\ldots\right)+\ldots\right\}$$

b)
$$\gamma = \frac{3\pi a c^2}{3a^2+\pi^2c^2}\left(\frac{e^{-4\pi\frac{b_1}{a}}}{1-e^{-4\pi\frac{b_1}{a}}}\cdot\frac{e^{-4\pi\frac{b_2}{a}}}{1-e^{-4\pi\frac{b_2}{a}}}\right)+\ldots$$

Ich hebe hervor, dass die Induction einer der Ebenen auf die andere durch Einschiebung eines Drahtgitters zwischen ihnen um ebensoviel geändert wird, wie durch Vergrösserung ihres Abstandes b_1+b_2 um den Betrag

5)
$$y = \frac{(\alpha-\gamma)(b_1+b_2)+b_1b_2-4\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}.$$

Digitized by Google

Cap. XIII.

Apparate für electrostatische Untersuchungen.

Man kann die Apparate, mit deren Einrichtung und Theorie wir uns zu beschäftigen haben, in die folgenden vier Klassen verteilen:

1) Electrisirmaschinen zur Erzeugung und Vermehrung der Electricität,

2) Condensatoren zur Vergrösserung der electrischen Erregung in einem vorgeschriebenen Verhältnis,

3) Electrometer zur Messung, Electroskope zur Constatirung von Electricitätsmengen und von Potentialen,

4) Accumulatoren zur Aufbewahrung beträchtlicher electrischer Ladungen.

Electrisirmaschinen.

207. In der gewöhnlichen *Electrisirmaschine* lässt man eine Glasplatte oder einen Glascylinder um eine Axe rotiren und dabei gegen ein Lederkissen, welches mit einem Amalgam von Zink und Quecksilber bestrichen ist, sich reiben.

Die Oberfläche des Glases wird positiv, die des Reibzeuges ebenso stark negativ electrisch. Durch die Rotation wird die an einer Stelle des Glases entstandene Electricität vom Reibzeug fort- und in die Nähe einer Reihe von Spitzen, welche mit dem Conductor der Maschine in Verbindung stehen, hingeführt. Je weiter die Ladung sich von dem Reibzeug entfernt, desto höher steigt ihr Potential und ihre Wirkung nach aussen an. Geht sie dann an den Spitzen vorbei, so werden diese durch Influenz negativ electrisch, und zwar um so stärker electrisch, je spitzer sie sind und je näher sie dem rotirenden Glaskörper stehen.

Dabei sieht man, wenn die Maschine in gehöriger Tätigkeit ist, zwischen dem Glaskörper und den Spitzen Entladungen Platz greifen, infolge deren jener einen Teil seiner positiven Electricität an die Spitzen abgiebt, von

Digitized by Google

denen er wieder auf den isolirten Conductor oder auf irgend einen andern mit diesem leitend verbundenen Körper übertragen wird.

Kommt dann der betreffende Teil des Glaskörpers wieder an das Reibzeug, so ist er mit weniger positiver Electricität geladen als der Teil des Glases, welcher gerade das Reibzeug verlässt, und infolge dessen werden Reibzeug und alle mit ihm in Verbindung stehenden Körper negativ electrisch.

Die das Reibzeug verlassende stark electrisirte Stelle des Glaskörpers wird von der negativen Ladung des Reibzeuges mit grösserer Kraft zurückgezogen, als die zum Reibzeug zurückkehrende und zum Teil entladene von diesem herangezogen wird. Die electrische Kraft wirkt also der Kraft, die man beim Drehen der Scheibe verwendet, entgegen, so dass man, um die Maschine in Gang zu erhalten, eine grössere Kraft aufwenden muss, als zur Ueberwindung der Reibung und anderer mechanischer Widerstände an sich erforderlich wäre.

Die gesammte Arbeit, die beim Drehen der Electrisirmaschine verbraucht wird, zerfällt also in zwei Teile, der eine dient zur Ueberwindung der mechanischen Widerstände und geht in Wärme über, der andere wird benutzt, um den Ueberschuss der electrischen Attraction des Reibzeuges auf sich von ihm entfernende Teile des Glaskörpers über die auf sich ihm nähernde zu paralysiren und findet sich in der Energie der durch die Reibung entstandenen Electricität wieder.

Die Energie der erregten Electricität ist diesem zweiten Teile der aufgewendeten Arbeit genau gleich, und kann rückwärts in eine Arbeit oder eine entsprechende Wärmemenge verwandelt werden.

Wenn die Maschine so construirt ist, dass sie die von der verwendeten Arbeit herrührende Energie nicht in sich aufhäuft, so wird die gesammte Energie in Wärme übergeführt; ein Unterschied zwischen der durch Ueberwindung der Reibung und der aus der electrischen Energie entstandenen Wärme findet nur darin statt, dass jene Wärme an Ort und Stelle, also da, wo die Reibung überwunden wird, entsteht, während diese in von dem Orte, wo die Electricität hervorgerufen wird, entfernten Leitern erst in Erscheinung treten kann.*)

Es kann vorkommen, dass die Attraction der Glaselectricität zu der auf dem Reibkissen vorhandenen Ladung so gross wird, dass zwischen Glaskörper und Reibzeug Entladungen auftreten, statt, wie es der Zweck der Maschine erheischt, zwischen dem Glaskörper und den Saugspitzen. Man bringt deshalb an das Reibzeug Seidenstreifen an, die sich mit ihm gleichnamig laden und infolge dessen an den Glaskörper anschmiegen.

---

*) Wahrscheinlich wird in vielen Fällen da, wo mechanische Energie durch Reibung in Wärme verwandelt wird, ein Teil der Energie zunächst in electrische Energie übergeführt, und geht dann erst, dadurch dass die electrische Energie zur Unterhaltung kurzer geschossener Ströme in der Nähe der reibenden Flächen verbraucht wird, in Wärme über. Vergl. W. Thomson, *On the Electrodynamic Qualities of Metals.* Phil. Trans. 1856, p. 650.

Digitized by Google

Unter dem Einfluss des Seidenstreifens steigt das Potential der positiven Electricität des Glaskörpers, während sie sich von der negativen Electricität des Reibzeuges entfernt, weniger rasch an, als es sonst der Fall sein würde; ihre Attraction gegen die negative Electricität ist also geringer und die Gefahr einer Entladung zwischen Glaskörper und Reibkissen vermindert.

Statt der Glaskörper verwendet man in manchen Electrisirmaschinen Ebonitplatten und benutzt als Reibkissen Wolle oder Pelzwerk. Die rotirende Scheibe, also auch der Conductor der Maschine, wird dann negativ, das Reibkissen positiv electrisch.

Der Voltasche Electrophor.

208. Der *Electrophor* besteht aus einem in ein flaches Metallgefäss gelegten Harz- oder Ebonitkuchen, welcher von einer ihm in der Grösse gleichen Metallscheibe überdeckt wird. Durch den Kuchen geht ein Metallstift, der den Deckel mit dem Boden des Metallgefässes leitend verbindet. Deckel und Gefäss sind mit isolirenden Handhaben versehen.

Reibt man den Kuchen mit Wolle oder einem Katzenfell, so wird er negativ electrisch und inducirt in den Metalldeckel, wenn man ihm diesen an der isolirenden Handhabe nahe bringt, ohne ihn zu berühren, ein negatives Potential. Zwischen dem Deckel und dem Kuchen tritt dabei keine Entladung ein, kommt aber der Deckel dem Metallstift, welcher den Kuchen durchsetzt, nahe, so springt von ihm ein Funke auf den Stift über, und man findet, nachdem man den Deckel wieder entfernt hat, diesen positiv, den Boden des Metallgefässes ebenso stark negativ geladen.

Will man mit dem Electrophor einen Condensator oder einen Accumulator positiv laden, so electrisirt man den Kuchen, legt den Deckel darauf und leitet ihn zur Erde ab. Wird dann der Deckel abgehoben, so zeigt er eine positive Ladung, die man durch Berührung auf den Condensator übertragen kann. Man wiederholt den Prozess so lange, bis man die genügende Electricitätsmenge hat.

Um einen Conductor mit dem Electrophor negativ zu laden, leitet man den Deckel zur Erde ab und bringt den Conductor mit dem Kuchen in Berührung.

Die Arbeit, welche der Arm bei der Trennung des Deckels vom Kuchen zu verrichten hat, ist grösser als die Arbeit, welche die electrischen Kräfte bei der Annäherung des Deckels an den Kuchen leisten. Das Laden eines Conductors mit Hilfe des Electrophors bedingt also immer einen Aufwand an Arbeit, die zum Teil in der Energie der dem Conductor mitgeteilten Electricität, zum Teil in dem Geräusch und in der Wärme der überspringenden Funken sich wiederfindet, zum Teil bei der Ueberwindung der der Bewegung sich entgegenstellenden Hindernisse verbraucht wird.

Digitized by Google

Influenzmaschinen.

209. Bei der gewöhnlichen Reibungselectrisirmaschine ist die Arbeit, welche zur Ueberwindung der Reibung verbraucht werden muss, weit grösser als diejenige, welche der Vermehrung der Electricität zu Gute kommt. Daher sind Apparate, in welchen die bei der Electrisirung verwendete mechanische Arbeit nur gegen electrische Kräfte geleistet wird, von hohem Interesse für die Wissenschaft nicht minder wie für die Praxis.

Ein solcher Apparat scheint der Nicholsonsche in den *Philosophical Transactions* vom Jahre 1788 beschriebene *Revolving Doubler* gewesen zu sein, welcher durch die Drehung einer Kurbel beide Electricitätsarten ohne Reibung und ohne Erdverbindungen hervorbrachte („*an instrument which by the turning of a Winch produces the two states of Electricity without friction or communication with the Earth*").

210. Mit Hilfe eines solchen *Revolving Doubler* ist es Volta gelungen unter Anwendung der an den Polen seiner Säule entstehenden Ladungen eine so grosse Electricitätsmenge hervorzubringen, dass sie von seinem Electrometer angezeigt werden konnte.

Später sind dann auf demselben Princip beruhende Apparate unabhängig von C. F. Varley*) und W. Thomson angegeben worden.

Sie bestehen der Hauptsache nach aus isolirten Conductoren, deren einige fest, andere beweglich sind. Die beweglichen Conductoren bezeichnet man als Carrier, die festen kann man je nach der Aufgabe, die sie zu erfüllen haben, Inductoren, Receptoren und Regeneratoren nennen. Die Inductoren und Receptoren sind so eingerichtet, dass die Carrier an gewissen Punkten ihrer Bahn gänzlich von Leitern umgeben sind. Da es nun ohne die complicirteste Einrichtung nicht möglich ist einen Carrier mit Inductoren und Receptoren vollständig einzuschliessen und ihm doch das freie Aus- und Eintreten in das System der Inductoren und Receptoren zu lassen, so ist die Maschine theoretisch unvollständig, wenn man ihr nicht noch zwei Regeneratoren hinzufügt, welche die Aufgabe haben, die geringe Electricitätsmenge, die der Carrier, nachdem er durch das System der Inductoren und Receptoren hindurchgegangen ist, noch zurückbehalten hat, in sich aufzunehmen.

Die Theorie des Apparates vereinfacht sich aber beträchtlich, wenn wir annehmen, dass der Carrier wirklich von den Inductoren und Receptoren beim Durchgang durch sie vollständig umhüllt wird.

Ich setze also zunächst voraus, dass die Maschine zwei Inductoren A und C, zwei Receptoren B und D und zwei Carrier F und G hat.

Der Inductor A sei positiv zum Potential A geladen, der Carrier F möge sich in dem Inductor befinden und das Potential F haben. Ist dann der

*) *Specification of Patent*, 1860 Jan. 27, N. 206.

Digitized by Google

Coefficient der Induction zwischen A und F als positive Grösse gedacht gleich Q, so hat die vom Carrier beherbergte Electricitätsmenge den Wert $Q(F-A)$.

Verbindet man den Carrier, während er sich in dem Inductor A befindet, mit der Erde, so wird $F=0$ und die Ladung des Carriers, $-QA$, negativ. Wir führen nun den Carrier aus dem Inductor A heraus bis er in den Receptor B eintritt und bringen ihn dort mit einer Feder in Berührung, die mit B in leitender Verbindung steht. Nach Art. 32 entladet sich dann der Carrier vollständig und giebt seine gesammte negative Electricitätsmenge an B ab.

Auf seiner weitern Bahn tritt dann der Carrier in den Inductor C ein, der negativ geladen sein soll, und erhält allda, wenn er zugleich mit der Erde in Verbindung steht, eine positive Ladung, die er mit sich nimmt und an den Receptor D abgiebt.

So geht es weiter, und wenn die Inductoren immer auf demselben Potential erhalten werden, bekommen die Receptoren B und D bei jedem Umlauf des Carriers frische Electricitätsmengen von immer derselben Stärke, so dass jeder Umlauf ihre bezüglichen Ladungen um dieselbe Grösse erhöht.

Verbindet man aber noch den Inductor A mit dem Receptor D und den Inductor C mit dem Receptor B, so wachsen die Potentiale der Inductoren fortwährend an, und infolge dessen werden auch die Electricitätsmengen, welche die Carrier den Receptoren übermitteln, fortdauernd grösser.

Den zweiten Carrier G richtet man so ein, dass er sich im Inductor C befindet, wenn der erste in A ist, und dass er sich im Receptor D aufhält, wenn der erste im Receptor B verweilt.

Ist nun das Potential von A und D gleich U und das von B und C gleich V, so ist die Ladung, die der Carrier innerhalb A, während er zur Erde abgeleitet ist, durch Influenz erhält, $z=-QU$.

Der Carrier giebt dann diese Electricitätsmenge an B ab und verwandelt dadurch das Potential V von B und C in $V-QU/B$, wo B die Capacität von B und C ist. In derselben Zeit hat der zweite Carrier eine Ladung $-Q'V$ von C nach D gebracht und dadurch das Potential U von A und D in $U-Q'V/A$ übergeführt, wo A die Capacität von A und D, Q' den Coefficienten der Induction zwischen G und C bezeichnet.

Es seien allgemein U_{n-1}, V_{n-1} die Potentiale der beiden Inductoren nach $n-1$ halben Revolutionen der Carrier und U_n, V_n die nach n halben Revolutionen, dann ist also

1'a) $$U_n = U_{n-1} - \frac{Q'}{A} V_{n-1},$$

2'a) $$V_n = V_{n-1} - \frac{Q}{B} U_{n-1}.$$

Digitized by Google

Setzt man zur Abkürzung

$$p^2 = \frac{Q}{B},\quad q^2 = \frac{Q'}{A},$$

so wird

1'b) $$p\,U_n + q\,V_n = (p\,U_{n-1} + q\,V_{n-1})(1 - pq)$$

2'b) $$p\,U_n - q\,V_n = (p\,U_{n-1} - q\,V_{n-1})(1 + pq)$$

und aus diesen Recursionsformeln folgt sofort

1'c) $$p\,U_n + q\,V_n = (p\,U_0 + q\,V_0)(1 - pq)^n,$$

2'c) $$p\,U_n - q\,V_n = (p\,U_0 - q\,V_0)(1 + pq)^n,$$

also

1) $$U_n = U_0\left\{(1 - pq)^n + (1 + pq)^n\right\} + \frac{q}{p}V_0\left\{(1 - pq)^n - (1 + pq)^n\right\},$$

2) $$V_n = V_0\left\{(1 - pq)^n + (1 + pq)^n\right\} + \frac{p}{q}U_0\left\{(1 - pq)^n - (1 + pq)^n\right\}.$$

Aus der Gleichung 1'c) ergiebt sich, dass die Grösse $pU + qV$ fortdauernd kleiner wird. Die beiden Receptoren erscheinen also schliesslich, wie auch ihr ursprünglicher electrischer Zustand beschaffen gewesen sein mag, einander entgegengesetzt electrisirt, und es stehen die Endwerte ihrer Potentiale ebenso wie die der bezüglichen Inductoren, mit denen sie verbunden sind, in dem Verhältnis von p zu $-q$.

Dagegen wächst nach der Gleichung 2'c) die Grösse $pU - qV$ fortdauernd an, so dass, wie klein auch ihr Anfangswert $pU_0 - qV_0$ gewesen sein mag, ihr Betrag doch im Laufe der Revolutionen der Carrier so hoch ansteigt, dass die electromotorische zwischen den Receptoren wirkende Kraft schliesslich alle Isolationen des Apparates überwindet.

Derartige Instrumente finden mannigfache Anwendung.

Die Varleysche grosse Maschine dient dazu, um eine bedeutende Verstärkung der Electricität bei hohem Potentiale zu erzielen.

Kleine Maschinen, sogenannte *Replenisher*, verwendet man, um, wie beim Thomsonschen Electrometer, mit wenigen Umdrehungen die Ladung eines Condensators auf eine bestimmte Stärke zu bringen und zu justiren. Weiter kann man mit ihrer Hilfe kleine Potentialdifferenzen, soweit es die Isolation zulässt, vergrössern und so electromotorische Kräfte, die sonst der Beobachtung entgehen würden, messen. Ladet man zum Beispiel die beiden Inductoren zu der so geringen Potentialdifferenz eines aus nur zwei Metallteilen bestehenden Thermoelements, setzt die Maschine in Gang, bis die Potentialdifferenz mit Hilfe eines Electrometers messbar geworden ist, und bestimmt das Verhältnis, in welchem die Potentialdifferenz bei jeder

Digitized by Google

Umdrehung zunimmt, so kann man nach den frühern Formeln auch die ursprüngliche Potentialdifferenz durch die Anzahl der ausgeführten Umdrehungen und den erreichten Endzustand berechnen.

Bei den meisten derartigen Instrumenten lässt man die Carrier um eine Axe rotiren und bringt sie durch Drehung einer Kurbel in die geeignete Lage zu den Inductoren.

Die ableitenden Verbindungen zur Erde und zu den Receptoren werden durch Federn hergestellt, mit denen die Carrier in geeigneten Momenten in Contact treten.

211. W. Thomson*) hat eine Maschine construirt, bei der die Carrier durch Wassertropfen gebildet werden, welche durch einen hohlen Inductor in einen isolirten Receptor fallen, so dass dieser fortwährend Electricität zugeführt erhält, deren Zeichen dem der Electricität des Inductors entgegengesetzt ist.

Aus dem Receptor läuft das Wasser in einen Trichter, dessen Röhre grösstenteils von dem Metall des Receptors umgeben ist, so dass das Wasser fast gänzlich entladen den Receptor verlässt. Der Apparat enthält noch einen zweiten Inductor und Receptor, von denen der erstere mit dem frühern Receptor, der zweite mit dem frühern Inductor leitend verbunden ist. Die Receptoren laden sich entgegengesetzt und ihre Electricitätsmengen, die ihnen durch die Wassertropfen zugeführt werden, wachsen nicht mehr wie früher in arithmetischer, sondern in geometrischer Progression mit der Zeit.

Die electrische Erregung der Receptoren nimmt so lange zu, bis die Tropfen durch die electrische Kraft entweder seitwärts vom Receptor abgelenkt oder gegen die Wände der Inductoren geschleudert werden.

Uebrigens schöpft die Ladung der Receptoren ihre Energie hier aus der kinetischen Energie der fallenden Tropfen.

212. Man hat noch eine Anzahl anderer Maschinen construirt, die auf der Benutzung der Influenz beruhen. Die bemerkenswerteste ist die *Influenzmaschine* von Holtz, in der der Carrier aus einer mit Schellack überstrichenen Glasplatte besteht, und wo die Inductoren durch Pappstücke gebildet sind. Um das Ueberspringen von Funken zwischen den Teilen des Apparates zu verhindern, befinden sich zu beiden Seiten der rotirenden Scheibe zwei andere Glasscheiben. Die Maschine hat sich als sehr wirksam und ziemlich unabhängig von dem Zustande der umgebenden Atmosphäre erwiesen. Das Princip, auf dem die Wirkung dieses Apparates beruht, ist ganz dasselbe, wie das im *Revolving Doubler* und den andern angeführten Maschinen dieser Art massgebende, der Carrier ist aber bei der Holtzschen Maschine ein Isolator und die Inductoren sind unvollkommene Leiter. Deshalb ist auch die Theorie dieser Maschine weit schwieriger zu entwickeln, als in dem Falle, wo der Carrier ein guter Leiter von bekannter Form ist, und die Entladungen immer an denselben bestimmten Stellen auftreten.

*) *Proc. R. S.*, 1867, Juni 20.

Digitized by Google

213. Bei den beschriebenen electrischen Maschinen treten immer Funken auf, so oft der Carrier mit einem Leiter in Verbindung kommt, der ein von dem seinigen verschiedenes Potential besitzt. Die Bildung solcher Funken ist aber, wie ich schon bemerkt habe, mit einem Energieaufwand, der sich in der Wärme und in dem Geräusch des Funkens wieder findet, verbunden, und dieser Energieaufwand geht für die Electrisirung verloren, so dass man nicht die ganze Arbeit, die zum Drehen der Maschine verwendet wird, für die Electrisirung nutzbar machen kann.

Ich habe daher geglaubt, dass es einem Bedürfnis entsprechen würde, wenn ich zeige, wie man Maschinen bauen kann, die gegen einen solchen Verlust von Energie geschützt sind. Doch will ich damit weniger praktische Formen für solche Maschinen empfehlen, als vielmehr ein Beispiel dafür geben, wie man die Vorrichtung, welche bei den thermodynamischen Maschinen unter dem Namen des *Regenerators* bekannt ist, auch bei den Electrisirmaschinen benutzen kann, um Energieverluste zu verhindern.

Es seien A, B, C, A', B', C' hohle festgelegte Conductoren, die so angeordnet sind, dass der Carrier P der Reihe nach durch jeden von ihnen hindurch gehen kann. A, A' und B, B' fassen den Carrier fast ganz ein, wenn er sich in der Mitte seiner betreffenden Bahn befindet, C, C' dagegen bedecken ihn weniger vollständig. Ich verbinde A, B, C mit einer Leydener Flasche von grosser Capacität und vom Potentiale V und A', B', C' mit einer andern Flasche von dem Potentiale $-V'$.

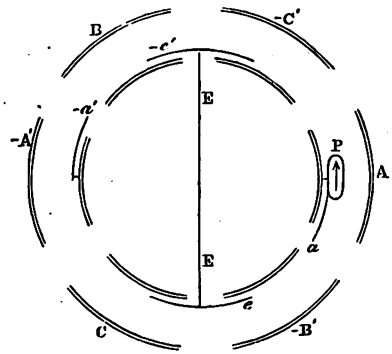


Fig. 18.

P soll in unserer Figur den Carrier vorstellen, der sich in einem Kreise von A nach $C'\ B\ A'\ C\ B'\ A$ bewegt und in gewissen Punkten a, a'; e, e' seiner Bahn durch Federn mit den Conductoren A, A' bezüglich mit der Erde in Verbindung tritt.

Es sei, während sich der Carrier in der Mitte von A befindet, $-A$ der Coefficient der Induction zwischen P und A und $A + a$ die Capacität von P in dieser Lage.

Da P von A nur zum Teil umfasst wird, so muss seine Capacität grösser sein als A, die Grösse a ist also positiv.

Die in P in der angegebenen Lage inducirte Ladung ist $(A + a)\ U - A\ V$, wenn U das Potential von P und V das von A bezeichnet. Ist aber P gleichzeitig durch die Feder a in leitender Verbindung mit A, so geht sein Potential in das von A, also in V über und seine Ladung wird gleich $a\ V$, die er beim Verlassen der Feder mit sich weiter führt.

Digitized by Google

Sowie P sich aus dem Inductor A entfernt, wird sein Potential kleiner und verringert sich um so beträchtlicher, je näher es an C', das negativ geladen sein sollte, kommt. Innerhalb C' sei das Potential von P auf eine Grösse U gesunken, ferner sei sein Inductionscoefficient gegen C' gleich $-C'$ und seine Capacität in Gegenwart von C' gleich $C'+c'$, dann haben wir

$$(C'+c')\,U+C'\,V'=aV,$$

und indem wir den Conductor C' so wählen, dass

$$C'\,V'=aV$$

wird, reducirt sich das Potential U des Carrier P auf Null. Tritt also P durch die Feder e', deren Potential ebenfalls Null ist, in Verbindung mit der Erde, so geschieht das ohne Funkenbildung.

Der Conductor C' hat also die Aufgabe, eine funkenlose Verbindung des Carrier P mit der Erde zu ermöglichen, und er entspricht bei den thermodynamischen Maschinen der Vorrichtung, die man als Regenerator bezeichnet. Ich werde ihm daher in der Tat den Namen Regenerator beilegen.

Bei seiner Weiterbewegung bleibt P immer noch durch die Feder e' in Verbindung mit der Erde, bis er in die Mitte des Inductors B kommt, dessen Potential V ist. Bezeichnet $-B$ den Coefficienten der Induction zwischen P und B in dieser Lage, so geht die Ladung von P, dessen Potential $U=0$ ist, in $-BV$ über.

Beim Verlassen der Feder e' nimmt P diese Ladung mit sich, und indem es sich gegen den negativen Receptor A' bewegt, wächst sein Potential stetig negativ an, in der Position gegenüber A' würde, falls P seine Ladung beibehält, sein Potential, wenn V' das von A' bezeichnet, gleich

$$-\frac{A'V'+BV}{A'+a'}$$

sein, wo $-A'$ der Inductionscoefficient zwischen A' und P ist, und $A'+a'$ die Capacität von P in Gegenwart von A' bezeichnet. Ist BV grösser als $a'V'$, so würde das Potential des Carrier numerisch das des Receptors noch übersteigen. P kommt dann, bevor es noch die Mitte von A' erreicht, in eine Lage, wo sein Potential gerade gleich $-V'$ ist, und in dieser Lage berührt es eine Feder a', die es leitend mit A' verbindet. Eine Funkenbildung findet nicht statt, weil P dasselbe Potential wie der Receptor und die mit ihm verbundene Feder hat. P bewegt sich dann weiter immer in Berührung mit der Feder und teilt dabei dem Receptor A' eine negative Ladung mit. Mit dem Rest seiner Electricität, $-a'V'$, verlässt es in der Mitte von A' die Feder und wandert zum positiven Regenerator C, welcher sein Potential reducirt und es gerade dann auf Null bringt, wenn P die Feder e, die es zur Erde ableitet, erreicht. P bleibt mit der Feder e in Berührung, bis es in die Mitte des negativen Inductors B' gelangt. Es

Digitized by Google

erhält dabei durch Induction eine positive Ladung $B' V'$, die es am Schlusse des Kreislaufes, der beliebig oft wiederholt werden kann, dem Receptor A mitteilt.

Während dieses Kreislaufs hat der positive Receptor eine Ladung aV verloren und eine Ladung $B' V'$ gewonnen, ebenso hat der negative Receptor eine Ladung $a' V'$ verloren und eine Ladung BV gewonnen.

Der Totalgewinn an positiver Electricität ist also

$$B' V' - aV$$

und der an negativer Electricität

$$BV - a' V'.$$

Man kann nun dadurch, dass man die Inductoren den Carrier so eng, als es nur irgend ohne Gefährdung der Isolation geschehen darf, einschliessen lässt, B und B' sehr gross, und indem man auch die Receptoren möglichst vollständig den Carrier einfassen lässt, a und a' ziemlich klein machen, so dass jede Revolution des Carrier den Receptoren, die man sich mit Leydener Flaschen verbunden denken kann, einen Gewinn an positiver bezüglich negativer Electricität bringt.

Die Regeneratoren müssen so geformt sein, dass sie den Bedingungen

$$C' V' = aV \text{ und } CV = a' V'$$

gehorchen. Sind a' und a' durch die Wahl der Receptoren sehr klein gemacht, so braucht man die Regeneratoren weder sehr eng noch sehr weit zu wählen.

Electrometer und Electroskope.

Classificirung der Instrumente.

214. Mit *Electrometer* bezeichnet man ein Instrument, das die Messung von Ladungen und von Potentialen ermöglicht.

Unter *Electroskop* versteht man dagegen ein Instrument, das die Existenz von Ladungen oder von Potentialdifferenzen anzeigt, ohne eine genügende numerische Bestimmung zu gestatten.

Doch vermag man auch Electroskope, wenn sie sehr empfindlich sind, zu Schätzungen zu verwenden, die sich auf die Anzeige der Abwesenheit von Electricität stützen. So kann man bei zwei electrischen Körpern A, B nach der im ersten Capitel auseinandergesetzten Methode entscheiden, welcher von ihnen der stärker geladene ist. Man bringt den Körper A an einer isolirenden Handhabe in ein leitendes Gefäss C, das ihn ganz einschliesst und nirgend berührt. Verbindet man C mit der Erde und isolirt es wieder, so bemerkt man auf seiner Aussenfläche keine Spur von freier

Digitized by Google

Electricität. Entfernt man nun A aus C und führt den Körper B ein, so wird das Electroskop an der Aussenseite von C immer noch keine Electricität nachweisen, wenn B ebenso stark geladen ist wie A. Beherbergt aber B eine grössere oder kleinere Electricitätsmenge als A, so zeigt das Electroskop an der Aussenfläche von C eine mit der von B gleichnamige bezüglich entgegengesetzte Ladung an.

Derartige Methoden, die auf Anzeigen von der Nichtexistenz einer Erscheinung sich stützen, kann man als Null- oder Zero-Methoden bezeichnen. Ihre Anwendung erfordert weiter nichts als ein Instrument, mit Hilfe dessen man die Existenz der Erscheinung zu entdecken vermag.

Eine andere Classe von Apparaten zur Registrirung von Erscheinungen wird so eingerichtet, dass man für dieselbe Erscheinung, wenn sie in derselben Stärke auftritt, stets dieselbe Anzeige erhält. Solche Instrumente sind mit Scalen versehen, deren Teilungen im allgemeinen nicht proportional der Quantität der zu messenden Grösse verlaufen. Die zu messende Quantität ist dann eine Function der betreffenden Scalenablesung, von der man meist weiter nichts weiss, als dass sie in continuirlicher Abhängigkeit von der betreffenden Quantität steht.

Dahin gehören einige Electrometer, bei denen die Messungen mit Hilfe der gegenseitigen Abstossung ähnlich electrisirter Teile des Instruments ausgeführt werden. Man erhält bei ihnen anstatt der wahren Werte der zu messenden Grösse eine Reihe von Zahlen, die nicht eher verwertet werden können, als bis man die Scala des betreffenden Instruments gehörig untersucht, und die ihren Angaben entsprechenden Werte der zu messenden Grösse in Tafeln gebracht hat.

Einer höhern Klasse von Instrumenten gehören dann endlich diejenigen an, bei denen gleichen Ablesungsdifferenzen gleiche Differenzen in den Werten der zu messenden Grösse entsprechen. Um solche Instrumente vollständig zum Gebrauch fertig zu machen, hat man weiter nichts zu tun, als den Proportionalitätsfactor des betreffenden Instruments zu bestimmen, also die constante Zahl zu eruiren, mit der man die Scalenablesungen zu multipliciren hat, um die entsprechenden Werte der zu messenden Grösse zu erhalten.

Man nennt Instrumente, die in sich selbst die Mittel besitzen, um in jedem Falle die wahren Werte der zu messenden Grössen bestimmen zu können, *Absolute Instrumente*.

Die Coulombsche Torsionswage.

215. Ein grosser Teil der Experimente, aus denen Coulomb seine Fundamentalgesetze für die Wirkung electrischer Körper aufeinander deducirt hat, basirt, wie wir in Art. 38 gesehen haben, auf der Messung der Kraftwirkung zwischen zwei electrisirten kleinen Kugeln, deren eine fixirt war, während die andere unter der Einwirkung der electrischen Kraft und der

Digitized by Google

Torsionselasticität eines Glasfadens oder Metalldrahtes in Gleichgewicht erhalten wurde.

Die *Torsionswage*, deren Coulomb sich dabei bediente, besteht aus einem mit Hilfe eines Drahtes oder Glasfadens horizontal aufgehängten Schellackstäbchen, an dessen einem Ende sich eine kleine, leicht vergoldete Hollundermarkkugel befindet. Der Aufhängedraht ist in einem verticalen Metallstück befestigt, der durch die Mitte eines horizontalen graduirten Kreises geht und durch einen horizontalen Arm um die Axe des Drahtes gedreht werden kann. Die Drehung bewerkstelligt eine Torsion des Drahtes um einen am horizontalen *Torsionskreis* abzulesenden Winkel.

Um den Apparat gegen Luftströmungen zu schützen, umgiebt man ihn mit einem Gehäuse, auf dem man zugleich eine Kreisteilung, die sich in der Schwingungsebene des Wagebalkens befindet, eingravirt. Das Gehäuse hat oben eine Oeffnung, durch welche an einem isolirenden Stabe eine andere kleine leitende Kugel, die *Standkugel*, eingeführt und bis in die Ebene des Schwingungskreises des Wagebalkens versenkt werden kann.

Die eingravirte Teilung gestattet dann die Lage dieser Kugel zu der am Wagebalken befestigten und in derselben Entfernung vom Aufhängedraht befindlichen zu bestimmen.

Wenn zunächst beide Kugeln unelectrisch sind, so möge der Winkel, den der Wagebalken mit einem durch die Standkugel gehenden Radius bildet, gleich φ sein. Sind beide Kugeln geladen und befindet sich die aufgehängte Kugel im Gleichgewicht, wenn der Wagebalken gegen den bezeichneten Radius um einen Winkel ϑ geneigt ist, so ist die Entfernung der Centren beider Kugeln gleich $2a\sin(\vartheta/2)$, wo a die Entfernung jeder der Kugeln von der Axe des Drahtes angiebt. Bezeichnet man mit F die directe electrische Kraftwirkung zwischen den beiden Kugeln in dieser Enfernung $2a\sin(\vartheta/2)$, so ist das electrische Drehungsmoment um die Axe der Torsion (d. h. des Drahtes) gleich $Fa\cos(\vartheta/2)$, und da dieses Moment den Draht um den Winkel $\vartheta-\varphi$ tordirt, so haben wir, falls M den Torsionscoefficienten des Drahtes angiebt,

$$1_1) \qquad Fa\cos\frac{\vartheta}{2} = M(\vartheta-\varphi),$$

eine Gleichung, welche F, die electrische Kraftwirkung, zwischen den beiden Kugeln, wenn sie von einander um $2a\sin(\vartheta/2)$ abstehen, zu berechnen gestattet, wenn M bekannt ist.

M bestimmt man aber durch die Beziehung

$$2) \qquad M = 4\pi^2\frac{K}{T^2},$$

wo K das Trägheitsmoment des Balkens samnt der Kugel in Bezug auf die Axe des Drahtes angiebt, und T die Zeit eines Hin- und Herganges desselben, wenn er lediglich unter Einwirkung der Torsionselasticität um diese Axe schwingt, bezeichnet.

Digitized by Google

Im allgemeinen ist freilich die so berechnete Grösse F nicht der Grösse der Kraftwirkung zwischen den Kugeln gleich zu setzen, denn die bewegliche Kugel wird nicht blos von der Ladung der Standkugel angegriffen, sondern auch von der in den Wänden des Gehäuses etwa influencirten Electricität.

Besteht das Gehäuse aus Glas, so kann man seine electrische Erregung nicht anders bestimmen als durch mühsame Messungen, die für jeden Punkt desselben ausgeführt werden müssen. Wenn aber das Gehäuse aus Metall gearbeitet ist, oder wenn zwischen dem Glasgehäuse und dem eigentlichen Apparat ein letzteren fast ganz einschliessender Metallschirm angebracht ist, so hängt die electrische Erregung auf den inneren Wänden desselben gänzlich von der der Kugeln ab, und jede Unbestimmtheit in der Bedeutung der Kraft F verschwindet.

Ich führe ein Beispiel an, in welchem man die fremden Einwirkungen auf die bewegliche Kugel berechnen kann.

Das Gehäuse habe die Form einer Metallkugel, deren Centrum im Bewegungsmittelpunkt des Wagebalkens sich befindet und deren Radius gleich b ist. Die Ladungen der kleinen Kugeln seien E_1 und E und der Winkel zwischen den ihnen entsprechenden Radien werde durch ϑ gegeben. Den Abstand der Standkugel von der Axe des Drahtes bezeichne ich durch a_1 und den der beweglichen Kugel durch a. Endlich soll r die Entfernung der beiden Kugeln von einander bedeuten.

Vernachlässigt man die von den Kugeln durch die gegenseitige Influenz in ihnen hervorgebrachte Störung in der gleichmässigen Verteilung ihrer bezüglichen Electricitäten, so wird die zwischen den beiden Kugeln wirkende Abstossungskraft gleich EE_1/r^2, somit das Drehungsmoment in Bezug auf die Axe des Drahtes

$$\frac{EE_1 aa_1 \sin\vartheta}{r^3}.$$

Den Einfluss der von der Standkugel in dem Kugelgehäuse influencirten Electricität auf die bewegliche Kugel können wir durch den des Bildes der Standkugel mit Bezug auf das Kugelgehäuse ersetzen. Ist die Standkugel sehr klein gegen das Kugelgehäuse, so liegt ihr Bild in dem durch die Standkugel gezogenen Radius in einer Entfernung b^2/a_1 von dem Bewegungsmittelpunkte und hat die Ladung $-E_1 b/a_1$. Da der Abstand dieses Bildes von der beweglichen Kugel gleich

$$\left(a^2 - 2\frac{ab^2}{a_1}\cos\vartheta + \frac{b^4}{a_1^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ist, so haben wir für das von dem Bilde der Standkugel auf die bewegliche Kugel um die Drahtaxe ausgeübte Drehungsmoment

Digitized by Google

$$D' = -EE_1 \frac{b}{a_1} \cdot \frac{a \frac{b^2}{a_1} \sin\vartheta}{\left\{a^2 - 2\frac{ab^2}{a_1}\cos\vartheta + \frac{b^4}{a_1^2}\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -EE_1 \frac{aa_1 \sin\vartheta}{b^3\left\{1 - 2\frac{aa_1}{b^2}\cos\vartheta + \frac{a^2a_1^2}{b^4}\right\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir haben also die Gleichung

$$1) \quad EE_1 aa_1 \sin\vartheta \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3\left\{1 - 2\frac{aa_1}{b^2}\cos\vartheta + \frac{a^2a_1^2}{b^4}\right\}^{\frac{3}{2}}}\right) = M(\vartheta - \varphi).$$

Ist der Radius des Kugelgehäuses sehr beträchtlich gegen die Entfernung der beiden Kugeln von der Drehungsaxe, so geht der obige Ausdruck über in

$$1_2) \quad EE_1 aa_1 \sin\vartheta \left(\frac{1}{r^3} - \frac{1}{b^3}\right) = M(\vartheta - \varphi).$$

Electrometer zur Messung von Potentialen.

216. Bei allen Electrometern besteht der bewegliche Teil aus einem Körper, der mit Electricität zu einem Potential geladen ist, welches von den Potentialen anderer in seiner Nähe befindlicher fixirter Körper abweicht.

Isolirt man mit Coulomb den beweglichen Körper von allen andern, so ist seine Ladung das directe Object der Messung. Wenn man die Kugeln des Coulombschen Electrometers durch feine Drähte mit andern Conductoren verbindet, so laden sie sich mit Electricitätsmengen, welche von den Potentialen der betreffenden Conductoren und von dem Potential des Gehäuses abhängen. Näherungsweise ist dann die Ladung jeder Kugel gleich dem Producte ihres Radius in die Differenz ihres Potentials gegen das Potential des Gehäuses, vorausgesetzt dass die Radien der Kugeln verhältnismässig klein sind gegen den Abstand sowohl der Kugeln von einander als von der nächsten Wand oder Begrenzung des Gehäuses. Die letzte Bedingung bringt es mit sich, dass die Coulombsche Form der Torsionswage sich für genaue Messungen geringer Potentialdifferenzen nicht eignet, weil die Kraft, mit der die beiden Kugeln in der durch die Bedingung geforderten Entfernung aufeinander einwirken, bei kleiner Potentialdifferenz zu unbeträchtlich ausfällt.

Absolutes Scheibenelectrometer mit Schutzring von Thomson. Weit geeigneter zu Messungen kleiner Potentialdifferenzen sind die Electrometer, in denen die Kugeln durch Scheiben ersetzt sind.

Digitized by Google

Solche Electrometer sind zuerst von W. Snow Harris construirt worden.*) Ihre grösste Vervollkommnung in theoretischer wie in constructiver Hinsicht verdankt man aber W. Thomson.**)

Wenn zwei Scheiben von verschiedenem Potential einander bis auf einen geringen Abstand gegenüber gebracht werden, so verteilen sich die Electricitäten auf den einander zugewendeten Flächen derselben fast ganz gleichförmig und verlassen fast vollständig die von einander abgewendeten Scheibenflächen, so dass man dort, falls keine fremden Körper in der Nähe sind, nur Spuren von Electricität vorfindet.

Die Ladung einer der Scheiben, der positiven etwa, ist dann direct proportional dem Producte aus dem Flächeninhalt dieser Scheibe in ihre Potentialdifferenz gegen die andere Scheibe und umgekehrt proportional dem Abstande der beiden Scheiben von einander. Nimmt man also grosse Scheiben und nähert sie einander so weit, als man nur, ohne die Isolation aufzuheben, vermag, so wird auch eine nur geringe Potentialdifferenz zu einer messbaren Attractionswirkung Veranlassung geben.

Ich habe schon in Art. 202 die mathematische Theorie der Verteilung der Electricität auf zwei Scheiben gegeben, dort ist aber angenommen worden, dass die Scheiben in der Unendlichkeit von einander isolirt sind, und das ist natürlich in der Praxis unstatthaft. Es ist daher auch nicht leicht, aus den numerischen Angaben so construirter Apparate die zu messenden Grössen abzuleiten.

217. Thomson hat darum, um den theoretischen Bedingungen möglichst nahe zu kommen, die bewegliche Scheibe noch mit einem Schutzring umgeben und damit die wichtigste Verbesserung seines Apparates zuwege gebracht.

Er nahm zunächst beide Scheiben gleich gross und schnitt aus der beweglichen einen kleinen centralen Teil heraus, den er zur eigentlichen beweglichen Scheibe machte, während er den übrig gebliebenen Ring fest mit der fixirten Scheibe verband. Dadurch erreichte er zweierlei, einmal wird die Kraftwirkung nur an dem Teile der Scheibe gemessen, wo sie noch am regelmässigsten gestaltet ist, dann aber fällt auch der Einfluss, den sonst die nicht ganz gleichförmige Verteilung der Electricität ausüben würde, fast ganz heraus, weil gerade der Teil der Scheibe, wo die Ungleichförmigkeit in der electrischen Verteilung am meisten hervortritt, also der an der Kante, auf dem Schutzring fixirt bleibt.

Ausserdem kann man auf dem Schutzring ein Metallgehäuse anbringen, durch welches die Rückseite der beweglichen Scheibe und alle mit dieser in Verbindung stehenden Teile des Apparates gegen fremde Influenzeinwirkungen geschützt werden.

---

*) *Phil. Trans.* 1834.

**) Man sehe Thomsons vorzüglichen Bericht über Electrometer. *Report of the British Association.* Dundee 1867.

Digitized by Google

Das absolute Electrometer von Thomson besteht also der Hauptsache nach aus zwei parallelen Platten, die zu verschiedenen Potentialen geladen sind, und von denen die eine so eingerichtet ist, dass nur ihr centraler Teil, der als solcher frei von der an der Kante herrschenden ungleichförmigen Verteilung der Electricität ist, unter dem Einfluss der electrischen Kräfte sich bewegen kann.

Die feste Scheibe ist horizontal auf einem isolirenden Fuss befestigt, der durch eine Micrometerschraube vertical auf und ab bewegt werden kann. Der Schutzring muss möglichst eben gestaltet und parallel der festen Scheibe befestigt sein. Sein Rand muss mindestens über dem Rande der Scheibe

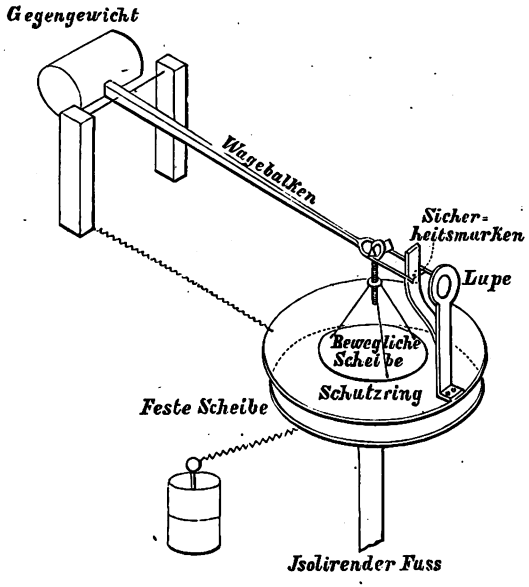


Fig. 19.

sich befinden, es ist aber gut, wenn er diesen noch überragt. Die bewegliche Scheibe ist an einem Wagebalken, der eine sehr delicate Bewegung gestattet, an drei Fäden so aufgehängt, dass sie gerade durch die Oeffnung des Ringes ohne Reibung hindurchgehen kann. Ihre untere der festen Scheibe zugewandte Fläche muss möglichst eben sein, und die Aufhängung ist so einzurichten, dass diese untere Fläche in einer gewissen Lage mit der untern Fläche des Ringes vollständig zu einer Ebene zusammenfällt, die nur durch den schmalen kreisförmigen Zwischenraum, der Ring und Scheibe trennt, unterbrochen ist.

Digitized by Google

Zu dem Behufe schraubt man die fixirte Scheibe so lange in die Höhe, bis sie den Schutzring berührt, lässt die bewegliche Scheibe, indem man sie eventuell mit Gewichten belastet herunter und justirt die Aufhängung so lange, bis die Scheibe gerade noch, aber vollständig auf der festen Scheibe aufliegt. Die untere Fläche der beweglichen Scheibe befindet sich dann mit der untern Fläche des Ringes in einer Ebene. Wenn auch die obern Flächen von Scheibe und Ring möglichst eben sind, so erkennt man das daran, dass das Bild eines Gegenstandes, welches zum Teil von der Scheibe, zum Teil vom Ring entworfen wird, keine Discontinuität zeigt. Die Lage der beweglichen Scheibe gegen den Ring wird durch Sicherheitsmarken fixirt. Thomson verwendet dazu ein horizontal in einer Gabelöffnung des Wagebalkens ausgespanntes dunkles Haar, das bei der Schwingung des Balkens zwischen zwei auf weissem Grunde gezeichneten schwarzen Punkten sich hin und her bewegt. Die Punkte befinden sich auf einem auf dem Ring befestigten Halter, der auch eine Lage trägt, durch die man die Lage des Haares zu den Punkten näher beobachten kann. Man bringt nun die Punkte so an, dass das Haar, wenn die untere Seite der Scheibe in der Ebene der untern Fläche des Ringes schwebt, und alle Teile des Apparates durch Herstellung von Verbindungen zwischen ihnen vollständig von Electricität befreit sind, durch die Lupe gesehen als gerade Linie erscheint, welche das Intervall zwischen den beiden Punkten bisecirt. Diese Lage bezeichnet man als *Visirlage*.

Auf den Ring setzt man noch ein Metallgehäuse, das die Scheibe und ihre Aufhängungsvorrichtung umgiebt, und Oeffnungen zur Beobachtung der Visirmarken enthält.

Bei einigen Electrometern schwingt der Wagebalken nicht auf einer Schneide, sondern um einen gespannten Platindraht, der durch seinen Schwerpunkt hindurchgeht (die Figur 19 stellt ein solches Electrometer dar). Man kann sie dann im allgemeinen nicht zu absoluten Messungen verwenden, doch sind ihre Angaben constant dieselben, wenn die Torsionselasticität des Drahtes sich mit der Zeit nicht ändert.

Ring, Gehäuse und bewegliche Scheibe stehen mit einander in leitender Verbindung, sind aber von allen andern Teilen des Apparates isolirt.

218a. Hat man mit Hilfe dieses Electrometers die Potentialdifferenz zweier Conductoren zu bestimmen, so verbindet man sie durch Drähte mit den bezüglichen Scheiben, nimmt von der beweglichen Scheibe das Gewicht, welches sie in der Visirlage erhält, herunter und schraubt die feste Scheibe mit der Micrometerschraube so lange in die Höhe, bis die bewegliche Scheibe durch die electrische Attraction wieder in die Visirlage gebracht wird. Die electrische Anziehungskraft der Scheiben in ihrer neuen Lage gegeneinander wird dann durch das Gewicht gemessen, welches die bewegliche Scheibe früher in der Visirlage erhalten hat.

Es sei also W der numerische Betrag des Gewichts, g die Constante der Schwerkraft; die dem Gewicht entsprechende Kraft ist gleich gW. Ist

Digitized by Google

dann A der Flächeninhalt der beweglichen Scheibe, D ihr Abstand von der festen Scheibe und V die Potentialdifferenz der beiden Scheiben gegeneinander, so haben wir

$$Wg = \frac{V^2 A}{8\pi D^2},$$

also

1) $$V = D\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}.$$

A ist eigentlich nicht genau gleich dem Flächeninhalt der beweglichen Scheibe, sondern hat einen etwas grössern Wert.

Bezeichnet man nämlich mit R den Radius der beweglichen Scheibe, mit R' den der Oeffnung im Schutzring, so dass $B = R' - R$ die Breite der zwischen Scheibe und Schutzring vorhandenen Furche ist, so haben wir nach Art. 201 für die Electricitätsmenge der beweglichen Scheibe

2_1) $$Q = V\left\{\frac{R^2 + R^2}{8D} + \frac{R^2 - R'^2}{8D}\cdot\frac{\alpha}{D+\alpha}\right\},$$

wo

a) $$\alpha = \frac{B}{\pi}\log 2 = 0{,}220635(R' - R)$$

ist. Befindet sich die Ebene des Schutzringes nicht in derselben Höhe über der festen Scheibe wie die Ebene der beweglichen Scheibe, sondern ist sie um z von derselben weiter entfernt als die bewegliche Scheibe, so tritt der Charakter des Randes der beweglichen Scheibe als Kante etwas hervor, und man hat zu der frühern Electricitätsmenge noch eine Correction hinzuzufügen, deren Wert nach einer Berechnung, die erst im Art. 225 angeführt werden soll, gleich

$$\frac{V}{D}(R + R')\, z \log\frac{4\pi(R + R')}{z}$$

ist.

Man hat also

2) $$Q = V\left\{\frac{R^2 + R'^2}{8D} + \frac{R^2 - R'^2}{8D}\frac{\alpha}{D+\alpha} + \frac{R + R'}{D} z \log\frac{4\pi(R + R')}{z}\right\}$$

und hieraus folgt allgemeiner*)

b) $$A = \frac{\pi}{2}\left\{R^2 + R'^2 + (R^2 - R'^2)\frac{\alpha}{D+\alpha} + 8(R + R')z\log\frac{4\pi(R + R')}{z}\right\}.$$

*) Eine strenge Theorie des Thomsonschen Schutzring-Condensators hat Kirchhoff geliefert. Der Leser findet sie in den *Gesammelten Abhandlungen* dieses Physikers auf Seite 113 ff.

Digitized by Google

Ist B, das Intervall zwischen der beweglichen Scheibe und dem Ring, sehr klein, so fällt das zweite Glied fort, ist z die Höhendifferenz zwischen der beweglichen Scheibe und dem Schutzring gegen α von unbedeutender Grösse, so ist das dritte Glied zu vernachlässigen.

Im allgemeinen wird man den Apparat so justiren, dass B sowohl als z nicht berücksichtigt zu werden brauchen, und dann hat man

b_1) $$A = \frac{\pi}{2}(R^2 + R'^2)$$

und

1_1) $$V = 4D\sqrt{\frac{gW}{R^2 + R'^2}},$$

So kann man selbst eine schwache electromotorische Kraft mit dem Electrometer bestimmen, wenn seine Scheiben in sicher messbarer Entfernung von einander sich befinden. Ist der Abstand der Scheiben von einander bei einer solchen Bestimmung verhältnismässig klein, so bringt schon eine ganz geringe Aenderung desselben, eine beträchtliche Aenderung in der zwischen den Scheiben wirkenden Kraft hervor, da die Kraft umgekehrt proportional dem Quadrate des Abstandes variirt. Ein geringer Fehler in der Ablesung der Micrometerschraube verfälscht also das Resultat sehr beträchtlich, wenn nicht der Abstand der Scheiben von einander noch verhältnismässig gross gegen die Fehler der micrometrischen Einstellungen ist.

Die Einwirkungen geringer Unregelmässigkeiten in der Form der Scheibenflächen auf die Messungsresultate nehmen, ebenso wie die einer fehlerhaften Bestimmung des Intervalls zwischen den Scheiben, ab wie der reciproke Wert der dritten und höhern Potenz der Entfernung der Scheiben von einander. Ist der Abstand der Scheiben verhältnismässig gross gegen die Dimensionen der auf ihren Flächen etwa befindlichen Hervorragungen, so wirken die Scheiben aufeinander ebenso wie zwei Ebenen, die in sehr geringen Entfernungen von den Spitzen der bezüglichen Hervorragungen gelegen sind. Wegen näherer Ausführung verweise ich auf die Art. 197, 198, wo von den Kräften, die zwischen gewellten Flächen spielen, die Rede ist.

218b. Der Abstand D der Scheiben von einander bestimmt sich aus der Differenz der Micrometerablesungen, wenn die bewegliche Scheibe auf der festen aufliegt und wenn sie sich in der Visirlage befindet. Da aber einerseits die Bestimmung des Moments des vollen Berührens beider Scheiben mit grosser Unsicherheit behaftet ist, und andererseits selbst ein kleiner Irrtum in der Bestimmung von D bei der Messung geringer Potentialdifferenzen von grosser Bedeutung ist, so zieht Thomson es vor, nicht direct die Potentialdifferenzen der beiden Scheiben zu bestimmen, sondern Differenzen von Potentialdifferenzen zu beobachten.

Digitized by Google

Sind nämlich D und D' die den Potentialdifferenzen V, V' entsprechenden Scheibenabstände, so hat man

3) $$V - V' = (D - D')\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}},$$

und $D - D'$ ist von der Lage des Nullpunkts der Micrometerschraube, also von der Ablesung bei der Berührung der beiden Scheiben, unabhängig.

Hat man zum Beispiel die electromotorische Kraft einer galvanischen Batterie zu bestimmen, so ladet man erst die untere Scheibe mit Hilfe eines Condensators, der, wenn nötig, durch einen *Replenisher* auf derselben Höhe seiner Ladung erhalten wird, zu einem Potential V und leitet die obere bewegliche Scheibe zur Erde ab, so dass die Potentialdifferenz zwischen beiden Scheiben V beträgt. Ist D die Entfernung, bis zu der man die feste Scheibe der beweglichen nähern muss, damit diese wieder in die Visirlage gelangt, so haben wir

$$V = D\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}.$$

Dann setzt man die negative Electrode der Batterie mit der beweglichen Scheibe, deren Verbindung zur Erde man vorher unterbrochen hat, in Contact und leitet ihre positive Electrode zur Erde ab. Ist v die electromotorische Kraft der Batterie, so ist jetzt die Potentialdifferenz zwischen den beiden Scheiben $V + v$. Verschiebt man wieder die untere Scheibe bis zum Abstand D' von der obern, bis letztere sich in die Visirlage einstellt, so hat man

$$V + v = D'\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}},$$

also

$$v = (D' - D)\sqrt{\frac{8\pi g W}{A}}.$$

Man kann sich also mit Hilfe einer zweiten Electricitätsmenge immer ein geeignetes Intervall verschaffen.

Es ist aber dabei notwendig, dass während des Experiments das Potential V, zu welchem die untere Scheibe durch den Condensator geladen ist, constant bleibt. Um sich von dieser Constanz zu versichern, verbindet man die untere Scheibe des Electrometers mit der untern Scheibe eines andern Electrometers, dessen obere Scheibe zur Erde abgeleitet und durch Heraufschrauben der untern Scheibe in die Visirlage gebracht ist. Jede Veränderung in dem Werte von V manifestirt sich dann an dem zweiten Electrometer durch ein Herausgehen des Haares aus der Mitte des Intervalls zwischen den beiden schwarzen Visirpunkten.

Digitized by Google

Das Hilfselectrometer braucht nicht so sorgfältig gearbeitet zu sein wie das erste zur eigentlichen Messung verwendete, da es nicht zu absoluten Bestimmungen dienen soll, sondern nur um zu constatiren, dass die Hilfsladung vom Potential V sich im Laufe des Versuchs nicht verändert. Man kann es deshalb Prüfelectrometer nennen.

Man bezeichnet die oben auseinandergesetzte Methode, eine electromotorische Kraft unter Zuhilfenahme einer fremden Electricitätsmenge zu messen, als die *Heterostatische Methode* der Electrometrie, im Gegensatz zu der *Idiostatischen*, bei der die ganze Einwirkung lediglich durch die zu messende Electricitätsmenge hervorgebracht wird.

Wenn der Apparat genügend bequem eingerichtet ist, so setzt man ihn in ein Leydener Gefäss, dessen innere geladene Belegung mit der beweglichen Scheibe und dem Schutzring leitend verbunden ist. Die feste Scheibe wird erst zur Erde abgeleitet und dann mit dem Conductor, dessen Potential bestimmt werden soll, verbunden.

219. *Thomsons Quadrantenelectrometer.* Das eben beschriebene Electrometer ist nicht selbstwirkend, sondern ergiebt seine Resultate jedesmal nur unter Beihilfe des Experimentators, der die untere Scheibe durch die Micrometerschraube zu verschieben hat. Es gehört also nicht zu den selbstregistrirenden Instrumenten, deren Eigenschaft eben darin besteht, dass sie von selbst die geeigneten Angaben machen. Das im Folgenden zu beschreibende Thomsonsche *Quadrantenelectrometer* ist dagegen dieser Classe der selbstregistrirenden Instrumente einzureihen.

Der Hauptbestandtheil des Apparates besteht in einer zu einem hohen Potential geladenen beweglichen Scheibe C, welche innerhalb zweier in noch anzugebender Weise geformter Conductoren A, B von gleichem oder verschiedenem Potential so schwingt, dass bald in dem einen, bald in dem andern Conductor sich ein grösseres Stück von ihr befindet.

Dazu benutzt man für A, B, C am besten Teile von Rotationsflächen, die dieselbe Axe haben, und lässt C sich um diese Axe bewegen.

Bei einer solchen Configuration bleibt der Abstand der Flächen von C gegen die Flächen der Conductoren A und B während einer positiven Rotation von C um die Axe der Configuration immer derselbe, während das Flächenstück, das B gegenübersteht, sich zum Beispiel vergrössert und das dem Leiter A zugewandte kleiner wird.

Sind die Potentiale von A und B einander gleich, so existirt keine Kraft, welche C von A nach B oder umgekehrt von B nach A drängen könnte. Ist aber die Potentialdifferenz von C gegen B grösser als die von C gegen A, so hat C das Bestreben, sich so zu bewegen, dass den Flächen des Conductors B ein grösseres Stück seiner Fläche gegenübersteht, als denen des Conductors A.

Man kann nun durch geeignete Anordnung des Apparates bewirken, dass die Kraft, welche eine bestimmte Vergrösserung des einem der Con-

Digitized by Google

ductoren A oder B gegenüberstehenden Flächenteiles von C hervorbringt, in gewissen Grenzen unabhängig von der Lage ist, die C gegen die festen Conductoren schon einnimmt. Ist dann C an einem Faden aufgehängt, so werden seine Ablenkungen aus der Gleichgewichtslage näherungsweise proportional dem Producte aus den entsprechenden Potentialdifferenzen zwischen A und B in die Differenz des Potentials von C gegen das Mittel der Potentiale von A und B sein.

Die Methode, deren man sich bei der Messung von Potentialdifferenzen mit diesem Electrometer bedient, ist die heterostatische. Man erhält die Platte C mit Hilfe eines Condensators, der mit einem *Replenisher**) verbunden ist, und durch ein Prüfelectrometer**) controlirt wird, auf einem hohen Potential, während man A und B mit den Conductoren verbindet, deren Potentialdifferenz gemessen werden soll. Der Apparat ist um so empfindlicher, je höher das Potential von C gegen die Potentialdifferenz von A und B ist, so dass er sich ganz besonders zur Bestimmung kleiner Potentialdifferenzen eignet.

Die Theorie dieses Electrometers ergiebt sich aus der in den Art. 93, 127 auseinandergesetzten allgemeinen Theorie eines Systems von Leitern.

Es seien also A, B, C die bezüglichen Potentiale dreier Conductoren, deren Capacitäten bei ihrer gleichzeitigen Existenz durch a, b, c gegeben sind. p bezeichne den Coefficienten der Induction zwischen B und C, q den zwischen C und A, r den zwischen A und B. Da die Capacitäten und Inductionscoefficienten von der Configuration und Lage der Systeme, für welche sie gelten sollen, abhängen, so werden sie im allgemeinen Functionen der Lage von C gegen A und B sein, und man kann auch die Form dieser Functionen eruiren, wenn man die Bewegung von C so einschränkt, dass seine Kanten nirgends denen von A bezüglich B zu nahe kommen. Bezeichnet ϑ die Ablenkung des Conductors C von A nach B hin, so wird der dem Conductor A gegenüberstehende Flächenteil von C um so kleiner, je grösser ϑ ist. Hat also das Potentialniveau auf A den Wert 1 und auf B und C den Wert Null, so wird die Ladung von A, also die Capacität dieses Conductors bei der betreffenden Lage von C, gleich $a = a_0 - \alpha\vartheta$ sein, wo a_0 die Capacität von A in der Gleichgewichtslage von C bezeichnet, und α eine Constante angiebt. Liegen A und B symmetrisch zu C, wenn dieses sich in der Ruhelage aufhält, so ist gleichzeitig die Capacität von B, also $b = b_0 + \alpha\vartheta$. Die Capacität von C ändert sich natürlich nicht durch seine Bewegung, weil der einzige Effect der Bewegung von C darin besteht, dass die Intervalle zwischen A und B durch immer andere Teile von C ausgefüllt werden. Wir haben also $c = c_0$. Ferner ist die Electricitätsmenge, welche in C in seiner abgelenkten Lage durch eine Steigerung des Potentialniveaus auf B

*) Wiedemann benutzt dafür die Bezeichnung Füllapparat. S. dessen *Lehre von der Electricität* 1882 Bd. I. pag. 168. Andere nennen es Restitutor.

**) So nennt Wiedemann l. c. dieses Controlinstrument, sonst heisst es auch Ladungsmesser (*gauge electrometer.*)

Digitized by Google

von 0 bis 1 inducirt wird, also der Coefficient der Induction zwischen B und C gleich $p = p_0 - \alpha\vartheta$, wo p_0 den Inductionscoefficienten in der ursprünglichen Lage des C bezeichnet. Entsprechend haben wir $q = q_0 + \alpha\vartheta$ und, weil A und B ihre Lage gegen einander nicht verändern, $r = r_0$.

Die electrische Energie des Systems ist aber

$$1) \qquad W = \frac{1}{2}A^2a + \frac{1}{2}B^2b + \frac{1}{2}C^2c + BCp + CAq + ABr,$$

also das Moment Θ der Kraft, welches ϑ zu vergrössern strebt,

$$2a) \quad \Theta = \frac{\partial W}{\partial \vartheta} = \frac{1}{2}A^2\frac{\partial a}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2}B^2\frac{\partial b}{\partial \vartheta} + \frac{1}{2}C^2\frac{\partial c}{\partial \vartheta} + BC\frac{\partial p}{\partial \vartheta} + CA\frac{\partial q}{\partial \vartheta} + AB\frac{\partial r}{\partial \vartheta}$$

$$= -\frac{1}{2}A^2\alpha + \frac{1}{2}B^2\alpha - BC\alpha + CA\alpha,$$

woraus sich das schon früher ausgesprochene Gesetz

$$2b) \qquad \Theta = \alpha(A - B)\left(C - \frac{1}{2}(A + B)\right)$$

ergiebt.

Gegenwärtig bildet man die Conductoren A, B des Thomsonschen Quadrantenelectrometers dadurch, dass man eine cylindrische Büchse durch zwei zu einander und zu den Grundflächen senkrechte Schnitte in vier von einander vollständig getrennte und isolirte Quadranten zerschneidet. Je zwei diagonal gegenüberstehende Quadranten durch einen Draht verbunden bilden dann den Conductor A bezüglich B.

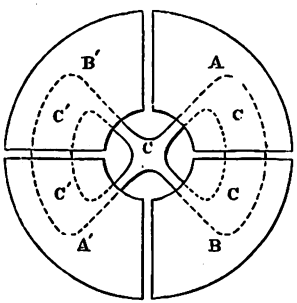


Fig. 20.

Der Conductor C besteht aus zwei flachen Bogenstücken, welche durch die zugehörigen Durchmesser mit einander verbunden sind. Er befindet sich innerhalb der Büchse, aus der die Conductoren A und B gebildet sind, und kann sich um eine zur Büchse senkrechte Axe drehen. In der Gleichgewichtslage von C liegen die Bogenstücke von C zu gleichen Teilen in A und B, so dass die beiden Durchschnitte durch die Büchse den Winkel zwischen den Durchmessern von C halbiren. Ausserdem hängt C genau in der Mitte zwischen den Bodenflächen der Büchse, sodass die Entfernungen zwischen den Kanten der Conductoren möglichst gross sind.

Der Conductor C wird mit der innern Belegung einer Leydener Flasche verbunden, die gleichzeitig als Gehäuse für den Apparat benutzt wird und so zu einem hohen Potential geladen.

Digitized by Google

Die Conductoren B und A werden mit den Körpern verbunden, deren Potentialdifferenz gemessen werden soll; handelt es sich also um Bestimmung des Potentials eines Körpers, so verbindet man B mit der Erde und A mit jenem Körper.

Ist das Potential des Körpers, also auch das des Conductors A, gleich Null und der Apparat sonst in Ordnung, so darf keine Kraft auftreten, die C zu bewegen strebt. Ist das Potential auf A von demselben Zeichen wie das auf C, so dreht sich C mit nahezu gleichförmiger Kraft so lange von A nach B hin, bis die Torsionselasticität des Fadens, an dem C hängt, ein dem electrischen Moment gleiches Torsionsmoment wachruft. Die Ablenkung D von C aus der ursprünglichen Lage ist dann, wie wir gesehen haben, innerhalb gewisser Grenzen proportional dem Product

3) $$D = (A - B)\,[C - \tfrac{1}{2}(A + B)].$$

Indem man C beträchtlich anwachsen lässt, kann man die Empfindlichkeit des Instruments so lange, als es die Bedingungen, welche den Ausschlag des Conductors C einschränken, gestatten, beliebig steigern. Ist das Potential von C sehr gross gegen das mittlere Potential von A und B, so wird die Ablenkung von C proportional der Grösse

3_1) $$D = C(A - B)$$

sein, oder, wenn B zur Erde abgeleitet ist, proportional

3_2) $$D = CA.$$

Da die Electricität des Körpers, dessen Potential bestimmt werden soll, bei seiner Verbindung mit dem Conductor A sich auf diesem mit verbreitet, so ist A als das Potential von A nicht direct das zu messende Potential des Körpers, sondern sein Potential nach seiner Verbindung mit A. Ist aber K die Capacität des betreffenden Körpers, K' die des Conductors A, V das Potential des Körpers vor seiner Verbindung mit A und V' das Potential von A vor der Verbindung mit dem Körper, so ist das Potential A nach Herstellung der Verbindung

$$A = \frac{KV + K'V'}{K + K'},$$

also das zu messende Potential des Körpers

4) $$V = A + \frac{K'}{K}(A - V').$$

Man sieht, dass $V = A$ ist, wenn der Körper sehr gross gegen den Conductor A ist, so dass auch K sehr gross gegen K' wird, oder wenn der Betrag von A sich nur wenig von dem von V' unterscheidet.

Da eine directe Bestimmung der Capacitäten sich nur schwer bewerkstelligen lässt, so tut man gut, den letztern Fall möglichst zu realisiren.

Digitized by Google

Man misst daher zunächst das Potential des Körpers näherungsweise und ladet die Electrode A durch einen *Replenisher* möglichst zu dem Potential A, welches A nach seiner Verbindung mit dem Körper annehmen wird, so dass $A - V'$ nur einen geringen Betrag erreicht und das von K'/K abhängige Glied in der Formel 4) fortgelassen werden darf. Damit bekommt man einen zweiten Näherungswert für das Potential, mit dessen Hilfe man die Ladung der Electrode A corrigirt, um einen dritten Näherungswert zu erlangen. So kann man selbst ohne Kenntnis der Capacitäten mit dem Quadrantenelectrometer das Potential auch für Körper, deren Capacität klein gegen die der benutzten Electrode A des Electrometers ist, bestimmen.

220. Zur Graduirung des Quadrantenelectrometers verwendet man am besten ein Scheibenelectrometer, welches Potentiale in absolutem Maasse zu bestimmen gestattet, indem man Potentiale von Conductoren, die sich auf dem Scheibenelectrometer mit genügender Sicherheit messen lassen, die also nicht zu klein sind, erst mit diesem und dann mit dem Quadrantenelectrometer bestimmt. Man erhält so eine Reihe von Scalenablesungen, welche bestimmten Potentialen entsprechen, und durch deren Ausgleichung sich die Proportionalitätsconstante des betreffenden Electrometers berechnen lässt. Der Wert, welchen das Quadrantenelectrometer dann für ein Potential ergiebt, hängt noch von dem Torsionscoefficienten des Drahtes, an dem C aufgehängt ist, und von dem als constant betrachteten Potential dieses Conductors ab.

Messung des Potentials an einem frei gelegenen Punkt.

221. *Erste Methode.* Man bringt eine Kugel, deren Radius klein gegen ihren Abstand von dem nächsten electrischen Körper ist, in den Punkt, wo das Potential gemessen werden soll, verbindet sie zunächst mit der Erde, isolirt sie dann und bestimmt ihr Potential an einem genügend weit entfernten Electrometer.

Ist V das Potential in dem betreffenden Punkte, a der Radius der benutzten Kugel, V' das Potential der Kugel, gemessen an einem durch ein Metallgehäuse, das zur Erde abgeleitet ist, gegen alle Influenzeinwirkungen geschützten Electrometer und Q die Electricitätsmenge der Kugel, so haben wir einerseits

$$Q = -Va$$

und andererseits auch

$$Q = +V'a,$$

demnach

$$V = -V'.$$

Das gesuchte Potential in dem betreffenden Punkte ist also entgegengesetzt gleich dem der kleinen Kugel, wenn letztere an den Ort des Punktes

Digitized by Google

gebracht, dort zur Erde abgeleitet, dann isolirt und ihr Potential in einem gegen Influenzeinwirkungen geschützten Raum gemessen wird.

Es ist dies die Methode, deren sich Dellmann aus Kreuznach bei seinen Bestimmungen des Potentials in gewissen Höhen über der Erdoberfläche bedient hat.

Zweite Methode. Man befreit zunächst die Kugel vollständig von aller Electricität, indem man sie in ein rings geschlossenes Metallgefäss einsenkt und mit der Innenfläche des Gefässes in Berührung bringt. Dann legt man sie an den Ort, wo das Potential bestimmt werden soll, und verbindet sie durch einen feinen Draht mit einer Electrode eines entfernt aufgestellten Electrometers. Das Potential dieser Electrode wird sich dann in seiner Grösse etwas dem an der Stelle, wo die Kugel sich befindet, herrschenden Potential nähern. Man löst die Verbindung der Kugel mit der Electrode, entladet sie möglichst vollständig und stellt jene Verbindung wieder her, das Potential der Electrode nähert sich dann noch mehr dem zu messenden. So fährt man mit Lösen, Entladen und Verbinden fort, bis das Potential der Electrode sich nicht mehr merklich ändert, und erhält in diesem schliesslichen Wert des Potentials der Electrode das Potential an der Stelle, wo die Kugel sich befindet.

Dritte Methode. Diese Methode ist im Princip dieselbe, wie die zweite, sie beruht darauf, dass man eine Reihe von kleinen Körperchen zwingt, sich in dem betreffenden Punkte, wo das Potential gemessen werden soll, von der Electrode des Electrometers abzulösen. Man verbindet zu dem Behufe die Electrode mit einem Trichter oder einer Röhre, durch die man Schrotkörner oder Feilspäne oder Wasser fliessen lässt und regulirt die ganze Einrichtung so, dass der Strom von Körperchen in dem Punkte, wo das Potential gemessen werden soll, discontinuirlich wird. Das Potential der Electrode wird dann mit der Zeit gleich dem an der betreffenden Stelle herrschenden Potential.

Man kann auch an die Electrode einen feinen Schwefelfaden binden, den man an dem freien Ende anzündet, das Electrometer giebt dann sehr bald das Potential an der jeweilig brennenden Stelle.

Ist die Potentialdifferenz zwischen der Electrode des Electrometers und dem Punkte, wo das Potential gemessen werden soll, sehr beträchtlich, so kann man auch so verfahren, dass man in diesen Punkt eine feine Spitze anbringt, die mit der Electrode verbunden ist. Es tritt dann mit Hilfe der umgebenden Luftpartikel eine Entladung ein. Wo die Potentialdifferenz nicht genügend gross ist, da muss man schon von den andern Methoden Gebrauch machen.

Will man nur das Zeichen der Differenz der an zwei verschiedenen Stellen herrschenden Potentiale, nicht ihren numerischen Betrag kennen, so führt man von dem einen Orte zu dem andern eine Metallröhre und lässt durch diese Wasser oder Feilicht in ein isolirtes Metallgefäss laufen. Jeder

Digitized by Google

Tropfen, der in das Gefäss gelangt, bringt dann eine gewisse Electricitätsmenge mit sich, die er dem Gefäss abgiebt, so dass die Ladung des letztern sich fortdauernd vergrössert und schliesslich selbst durch rohe Methoden bestimmt werden kann. Das Potential des Gefässes ist positiv, wenn das der Röhre gegen die umgebende Luft positiv ist.

222. Man kann eine der angegebenen Methoden zur Bestimmung des Potentials in Punkten eines electrischen Feldes auch dazu verwenden, um das Potential auf Conductoren zu messen, ohne sie dabei zu berühren. Man bestimmt dazu das Potential in Punkten in der Nachbarschaft des Conductors, aus dem sich dann das Potential des Conductors leicht berechnen lässt. Jene Methoden sind namentlich dann, wenn der betreffende Körper einen nahezu abgeschlossenen Hohlraum enthält, anwendbar, denn da in einem solchen Hohlraum das Potential fast constant und beinahe genau gleich dem Potential des Conductors ist, so hat man nur das Potential in einem Punkte der Höhlung, der möglichst entfernt von der Oeffnung derselben sich befindet, zu messen.

In dieser Weise hat W. Thomson die Tatsache constatirt, dass das Potential in den Punkten eines von einem Zinkconductor umgebenen Hohlraumes positiv ist gegen das Potential in den Punkten eines von einem Kupferconductor umgebenen Hohlraumes, wenn beide Conductoren miteinander leitend verbunden sind.

Messung der electrischen Flächendichte.

Theorie der Prüfungskörper.

223. Will man die mathematische Theorie der electrischen Verteilung auf Conductoren verificiren, so muss man ein Mittel besitzen, die Flächendichte der Electricität in den verschiedenen Punkten der Oberfläche eines Conductors zu messen. Coulomb bediente sich zu solchen Dichtebestimmungen einer Scheibe von Rauschgold, welche an einem isolirenden Schellackstäbchen befestigt war. Er legte die Scheibe so eng als möglich an die betreffende Stelle des Conductors an, entfernte sie mit der isolirenden Handhabe und bestimmte dann ihre Ladung an seinem Electrometer.

Da die Oberfläche der Scheibe möglichst der Conductorfläche angeschmiegt wurde, so schloss er, dass die Flächendichte der Electricität auf der Aussenseite dieser Scheibe sehr nahe der auf der betreffenden Stelle der Conductorfläche herrschenden gleich sei, und dass die Ladung der Scheibe, nach ihrer Entfernung vom Conductor, sehr nahe dieselbe Grösse habe, wie das von der Scheibe bedeckte und ihr an Flächeninhalt gleiche Stück der Conductorfläche.

Digitized by Google

Man nennt seither eine zu derartigen Messungen verwendete Scheibe eine *Probe-* oder *Prüfungsscheibe*. Da aber gegen Coulombs Art der Verwendung der Probescheibe Einwürfe erhoben worden sind, so lasse ich einige Bemerkungen über die Theorie derartiger Untersuchungen folgen.

Das Charakteristische an derartigen Experimenten ist, dass man einen kleinen leitenden Körper in Berührung mit der Stelle eines Conductors bringt, wo die Dichte gemessen werden soll, ihn dann entfernt und aus seiner Ladung auf die Flächendichte der Electricität an der betreffenden Stelle des Conductors schliesst.

Ich habe daher zunächst zu zeigen, dass der kleine Körper bei seiner Berührung mit dem Conductor sich mit einer Electricitätsmenge ladet, welche der an der Berührungsstelle vor der Berührung herrschenden Flächendichte der Electricität wirklich proportional ist.

Ich setze voraus, dass alle Dimensionen des Prüfungskörpers, und namentlich die in Richtung der Normale zur Conductorfläche fallende, verhältnismässig klein gegen die Krümmungsradien der Conductorfläche an der Berührungsstelle sind. Erfüllt der kleine Körper diese Bedingung, so kann man von der Variation der electrischen Kraft vom Conductor bis zu seinem am weitesten abgelegenen Punkt abstrahiren, und den kleinen Körper als kleine plane Fläche betrachten.

Die Ladung, welche eine solche kleine Fläche bei der Berührung mit einem Conductor in sich aufnimmt, ist aber proportional der an der Berührungsstelle, in Richtung der Normale wirkenden Kraft, also auch proportional der dort herrschenden Flächendichte.

Es könnten noch Zweifel bestehen, ob der kleine Körper auch seine Ladung bei seiner Entfernung von dem Conductor mit sich zu nehmen im Stande ist, ob er sie nicht dem Conductor durch Funkenentladung zurückgiebt. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass in der Tat keine solche Funken von ihm zum Conductor überspringen können.

Wenn der Prüfungskörper sich mit dem Conductor in Berührung befindet, so ist sein Potential ebenso gross und von demselben Zeichen, wie das des Conductors, also die Dichte in den der Prüfungsstelle nächsten Stellen sehr gering. Wird dann der kleine Körper eine kurze Strecke vom Conductor, den wir uns als positiv geladen vorstellen, entfernt, so ist zwar die an der ihm gegenüberstehenden Stelle des Conductors herrschende Dichte nicht mehr gleich Null, sondern positiv, da aber die Ladung des kleinen Körpers ebenfalls positiv ist, so wird die Flächendichte der Electricität in diesem dem kleinen Körper gegenüberstehenden Punkt kleiner als in den benachbarten Punkten sein. Nun hängt der Uebergang eines Funkens im allgemeinen von der Grösse der electrischen Kraft, also von der der Dichte ab, und da wir uns den Conductor nicht so stark electrisirt denken, dass etwa Entladungen an einzelnen Stellen desselben Platz greifen könnten, so wird auch von ihm kein Funke auf den kleinen Körper von

Digitized by Google

einer Stelle überzuspringen vermögen, die, wie wir gesehen haben, weniger Electricität als die benachbarten Stellen enthält.

224. *Eine Kugel als Prüfungskörper.* Ich werde jetzt die Ladung des kleinen Körpers unter der Annahme bestimmter Formen für ihn und für den Conductor berechnen. Der Conductor soll eine verhältnismässig grosse Kugel sein, und der kleine Körper von der Conductorfläche aus einer kleinen Kugel ausgeschnitten werden, deren Mittelpunkt auf dem Conductor liegt, die also den Conductor orthogonal schneidet. Wir haben dann ein Problem vor uns, dessen exacte Lösung wir in Art. 166, 168 schon kennen gelernt haben.

Sind also A und B die Centren zweier Kugeln, die sich senkrecht schneiden, α und β ihre Radien, DD' der Durchmesser und C der Mittelpunkt ihres Schnittkreises, endlich V das Potential eines Conductors, der von den beiden Stücken der Kugelflächen begrenzt ist, so haben wir für die Ladung auf dem Teile der Kugel (A)

1′) $$(A) = \tfrac{1}{2} V (AD + BD + AC - CD - BC)$$

oder

1) $$(A) = \tfrac{1}{2} V \left(\alpha + \beta + \frac{\alpha^2 - \beta^2 - \alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right),$$

und für die Ladung auf dem Teile der Kugel (B)

2′) $$(B) = \tfrac{1}{2} V (AD + BD + BC - CD - AC)$$

oder

2) $$(B) = \tfrac{1}{2} V \left(\alpha + \beta + \frac{\beta^2 - \alpha^2 - \alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \right).$$

Die gesammte Ladung beider Segmente wird

3′) $$(A) + (B) = V (AD + BD - CD)$$

oder

3) $$(A) + (B) = V \left(\alpha + \beta - \frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right).$$

Das Verhältnis der Ladung von (B) zu der von (A) ist also, wenn α relativ gross gegen β ist,

$$\frac{3}{4}\frac{\beta^2}{\alpha^2}\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{6}\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \cdots\right) : 1.$$

Bezeichnet weiter σ die gleichförmige Flächendichte, mit der die Electricität sich auf (A) ausbreiten würde, wenn (B) entfernt wäre, so ist die Ladung, die die Vollkugel (A) dann besitzen würde, gleich

$$(A) = 4\pi\alpha^2\sigma$$

Digitized by Google

und wir haben für die Ladung auf (B)

2a) $$(B) = 3\pi\beta^2\sigma\left(1 + \frac{1}{3}\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{6}\frac{\beta^2}{\alpha^2} + \cdots\right).$$

Ist also β sehr klein gegen α, so wird die Ladung von (B)

$2_1)$ $$(B)_1 = 3\pi\beta^2\sigma,$$

also dreimal so gross, wie die Ladung ihres Aequators, wenn dieser gleichförmig mit Electricität von der Dichte σ belegt wäre.

Wenn die Prüfungskugel voll ist, so wird die mittlere Dichte der Electricität, welche sie nach ihrer Berührung mit der Conductorkugel und Entfernung von derselben behalten hat, wie man aus Art. 175, 7) ersieht, gleich $\pi^2/6$, d. h. das 1,645fache von der im Berührungspunkte auf der Conductorkugel herrschenden Dichte der Electricität.

225. *Ein Scheibchen als Prüfungskörper.* Die geeignetste Form für den Prüfungskörper ist die einer ebenen, kreisförmigen Scheibe. Ich zeige daher auch noch, wie man die Electricitätsmenge, die eine solche Scheibe enthält, nachdem man sie auf einen Conductor gelegt und von ihm wieder entfernt hat, berechnen kann.

Die Lösung wird so durchgeführt, dass ein Potential aufgesucht wird, welches eine äquipotentielle Fläche aufweist, auf der sich eine kreisförmige breitgeschlagene Protuberanz befindet, die in der allgemeinen Form einer einer Ebene aufliegenden Scheibe ähnelt.

Bezeichnet σ die Flächendichte auf einer gleichförmig electrisirten Ebene, die wir zur Ebene der xy machen, so ist das Potential auf einen um z von dieser Ebene entfernten Punkt

$$V = -4\pi\sigma z.$$

Wir electrisiren zwei Scheiben von gleichem Radius a mit gleichen und entgegengesetzten Electricitätsmengen, deren Dichten $-\sigma'$ bezüglich $+\sigma'$ sind, derartig, dass sich die Electricitäten auf ihnen nicht bewegen können, und legen die erste auf die Ebene der xy, so dass ihr Mittelpunkt mit dem Coordinatenursprung zusammenfällt, und die zweite parallel zu ihr in einem sehr kleinen Abstand c.

Das Potential einer solchen Scheibencombination ist, wie wir noch in der Theorie des Magnetismus zu sehen Gelegenheit haben werden, in einem Punkte, dessen zu dem Rande einer der Scheiben führende Vectoren eine Kegelecke ω einhüllen, gleich $\sigma' c\omega$. Daher haben wir für das Gesammt-Potential der Ebene und der beiden Scheiben den Wert

1) $$V = -4\pi\sigma z + \sigma' c\omega.$$

Die Figur auf der linken Seite der Tafel XX. am Ende des zweiten Bandes giebt eine Vorstellung von den diesem Falle entsprechenden Niveauflächen und Kraftlinien.

Digitized by Google

Die Kegelecke ω wird durch den Inhalt des von dem Kegelmantel auf einer um die Kegelspitze mit dem Radius 1 gelegten Kugel ausgeschnittenen Flächenstückes gemessen. Zu ihrer Berechnung setzen wir den Abstand des Punktes, in dem V das Potential sein soll, von der z Axe gleich r und haben dann, wenn r sowohl als z klein gegen den Radius a der Scheibchen sind,

$$\omega = 2\pi - 2\pi\frac{z}{a} + \cdots,$$

also

$$1_1) \qquad V = -4\pi\sigma z + \sigma' c\left(2\pi - 2\pi\frac{z}{a} + \cdots\right).$$

Daher ist $V = 0$ für

$$2) \qquad z_0 = \frac{\sigma' c}{2\sigma + \sigma'\frac{c}{a}},$$

und hieraus ergiebt sich, dass die äquipotentielle Fläche $V = 0$ in der Nähe der z Axe nahezu flach verläuft.

Für Punkte, die ausserhalb der Scheibenränder, wo also $r > a$ ist, gelegen sind, verschwindet ω nur, wenn z verschwindet, es gehört also die xy Ebene bis auf das von den Kreisscheiben geschützte Stück mit zur äquipotentiellen Fläche $V = 0$; die ganze äquipotentielle Fläche

$$-4\pi\sigma z + \sigma' c\omega = 0$$

sieht also so aus wie eine Ebene, die an einer Stelle eine Protuberanz von der nahezu gleichförmigen Dicke

$$z_0 = \frac{\sigma' c}{2\sigma + \sigma'\frac{c}{a}}.$$

besitzt.

Die Breite dieser Protuberanz finden wir, indem wir die Stellen aufsuchen, wo der zuerst behandelte Teil der äquipotentiellen Fläche $V = 0$ die xy Ebene schneidet, das heisst, wo $\partial V/\partial z = 0$ wird.

Wenn r nahezu gleich a ist, so wird das von dem Kegelmantel auf der Einheitskugel ausgeschnittene Flächenstück

$$\omega = 2\,\mathrm{arctg}\frac{z}{r-a},$$

also

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -4\pi\sigma + \frac{2\sigma' c}{r-a}$$

Digitized by Google

$\partial V/\partial z$ ist demnach gleich Null, wenn

3) $$r_0 = a + \frac{\sigma' c}{2\pi\sigma}$$

oder näherungsweise

3_1) $$r_0 = a + \frac{z_0}{\pi}$$

wird. Die Protuberanz der Ebene xy hat also einen Durchmesser von der Grösse $2\ (a + z_0/\pi)$.

Das Flächenintegral über die Protuberanz giebt die auf ihr ausgebreitete Electricitätsmenge Q, und lässt sich wie im Falle eines Kreisstromes, Art. 704, auswerten. Man erhält

4) $$Q = 4\pi a\sigma' c\left(\log\frac{8a}{r_0 - a} - 2\right) + \pi\sigma r_0^2$$

oder näherungsweise

4_1) $$Q = \pi\sigma r_0^2\left\{8\frac{z_0}{r_0}\left(\log\frac{8\pi r_0}{z_0} - 2\right) + 1\right\},$$

4_2) $$Q = \pi\sigma r_0^2\left\{8\frac{z_0}{r_0}\log\frac{8\pi r_0}{z_0} + 1\right\}.$$

Wäre die Dicke der Protuberanz gleich Null, gehörte sie also der xy Ebene selbst an, so würde ihre Ladung $\pi\sigma r_0^2$ sein, das erste Glied in Q entspricht demnach der Correction, die man für die Dicke der Protuberanz anzubringen hat.

Denkt man sich die Protuberanz von der Dicke z und dem Radius r von der xy Ebene losgelöst und als Probescheibchen verwendet, so nimmt sie von der auf dem Berührungsteil der xy Ebene und in der Nähe desselben vorhandenen Electricität sehr näherungsweise das

$$1 + 8\frac{z}{r}\log\frac{8\pi r}{z}\text{fache}$$

mit sich.

Electrische Accumulatoren.

226. Ein electrischer *Accumulator* oder *Condensator* besteht aus zwei durch ein isolirendes dielectrisches Medium getrennten leitenden Flächen.

So ist die Leydener Flasche in ihrer jetzigen Gestalt ein Accumulator, der dadurch gebildet wird, dass eine Glasflasche innen und aussen bis zu einer gewissen Entfernung von der Flaschenmündung mit Zinnfolie belegt wird. Früher goss man in die Flasche Wasser hinein und hielt sie bei Experi-

Digitized by Google

menten in der Hand. Das Wasser war dann der eine, die Hand der andere Conductor.

Allgemein kann man die äussere Fläche irgend eines Conductors als einem Accumulator angehörig betrachten, dessen andere Conductorfläche durch die Erde oder die Wände des Raumes, in dem der Conductor sich befindet, gebildet wird, während die Luft das isolirende Zwischenmedium darstellt.

Die Capacität eines Accumulators ist diejenige Electricitätsmenge, mit der man die innere Conductorfläche laden muss, bis die Differenz ihres Potentials gegen das Potential der andern, äussern, Conductorfläche gleich der Einheit wird. Sie ist, wie schon in Art. 88 auseinandergesetzt ist, electrostatisch gemessen von den Dimensionen einer Linie, so dass die für sie in speciellen Fällen gemachten Zahlenangaben sich auf die in dem betreffenden Lande übliche Längeneinheit beziehen. Die Accumulatoren werden in electrischen Untersuchungen hauptsächlich nach zwei Richtungen hin verwendet.

Einmal sollen sie eine grosse Menge von Electricität in sich aufnehmen und auch zurückhalten, dann aber dienen sie zur Messung von Electricitätsmengen, indem man das Potential bestimmt, zu dem sie durch diese erhoben werden.

Für den ersten Zweck hat sich bis jetzt noch keine Einrichtung so gut bewährt, wie die in der Leydener Flasche getroffene, wenngleich auch in dieser die Electricität sich nicht dauernd aufbewahren lässt. Der grösste Teil des Verlustes an Electricität, den eine Leydener Flasche erleidet, rührt davon her, dass die Electricitäten beider Belegungen längs den, meist feuchten, unbelegten Teilen der Flasche einander entgegen kriechen und sich dann neutralisiren. Man trocknet deshalb die Flasche im Innern möglichst sorgfältig und überzieht die nicht belegten Teile derselben mit einem Firnis. Dadurch wird der Verlust ziemlich stark reducirt. In W. Thomsons Electroskopen ist denn auch der tägliche procentische Verlust an Electricität äusserst gering, und ich glaube, dass selbst dieser Verlust weder der Leitung durch die Luft noch der durch das Glas zugeschrieben werden darf, sondern dass er durch die Leitung längs den Flächen der isolirenden Stäbe und freien Glasteile jener Apparate verursacht wird.

In der Tat hat auch Thomson, als er Schwefelsäure in einen Kolben mit langem Halse einfüllte, mit Electricität lud und dann hermetisch durch Zuschmelzen des Kolbenhalses absperrte, noch nach Jahren die Ladung in ihrer Stärke unverändert gefunden.

Doch isolirt Glas nur bei niederen Temperaturen, in höheren wird es leitend und lässt schon bei weniger als 100° die ganze Electricitätsmenge entschlüpfen.

Digitized by Google

Will man Accumulatoren von grosser Capacität und verhältnismässig kleinem Umfang construiren, so verwendet man als isolirendes Zwischenmedium Kautschuk, Glimmer oder mit Paraffin getränktes Papier.

227. Bei Accumulatoren, die zur Messung von Electricitätsmengen dienen sollen, kann man feste Dielectrica wegen ihrer als electrische Absorption bezeichneten Eigenschaft nur unter grossen Vorsichtsmassregeln als Zwischenmedien verwenden.

Für solche Accumulatoren ist die Luft das einzig geeignete Dielectricum. Doch bietet auch sie wegen der Leichtigkeit, mit der sich fremde leitende Körper durch sie verbreiten, manche Unzuträglichkeiten. So können zum Beispiel Feuchtigkeits- und Staubteilchen in den engen Raum zwischen den beiden Conductoren, wo nur Luft vorhanden sein sollte, gelangen, wodurch nicht blos die Dicke der trennenden Luftschicht alterirt wird, sondern auch Leitungsbrücken zwischen beiden Conductoren hergestellt werden können, durch die sich ihre Electricitäten ausgleichen.

Die Capacität eines Accumulators wird in absolutem Maasse, das heisst in Einheiten der Länge, entweder durch Rechnung bestimmt, indem man seine Form und die Lage seiner einzelnen Teile gegen einander mathematisch fixirt und dann für ihn das Problem der Verteilung der Electricität löst, oder durch Vergleichung mit der Capacität eines andern Accumulators, für den alle Daten schon vorliegen, gemessen.

Die erste Methode ist meist äusserst schwierig durchzuführen, man benutzt daher am besten die zweite, indem man sich als Standard einen Accumulator verschafft, für den sich das Problem der Verteilung der Electricität exact lösen lässt. Dazu kann man zum Beispiel eine isolirte, in einem sehr ausgedehnten electrischen Felde befindliche, leitende Kugel verwenden, deren Capacität bekanntlich gleich ihrem Radius ist.

In der Tat haben auch Kohlrausch und Weber mit einer solchen Kugel, die in ihrem Laboratorium aufgehängt war, als absolutem Standard, die Capacitäten anderer Conductoren bestimmt.

Inzwischen ist die Capacität einer Kugel von mässiger Grösse so klein im Verhältnis zu der Capacität der gebräuchlichen Accumulatoren, dass eine Kugel sich nicht wohl zu solchen Vergleichungen eignen dürfte.

Eine beträchtliche Vergrösserung erfährt die Capacität einer Kugel, wenn man sie mit einer ihr concentrischen Kugelschale von etwas grösserem Radius umgiebt. Die Capacität der Kugel wird dann die vierte Proportionale zur Dicke der Luftschicht, welche die Kugel von der Schale trennt, und zu den Radien der Kugel und der innern Schalenfläche.

Ein so construirter Accumulator ist beispielsweise von W. Thomson als Standard benutzt worden, doch ist es sehr schwer, die Conductoren vollkommen kugelförmig herzustellen, sie concentrisch anzuordnen und ihre Radien zu bestimmen.

Digitized by Google

Man wird daher am besten zur absoluten Messung von Capacitäten einen Accumulator verwenden, dessen Conductoren durch parallel sich gegenüberstehende Ebenen gebildet werden.

Die Planität der Flächen kann ziemlich leicht untersucht werden und ihr Abstand lässt sich mit genügender Genauigkeit durch eine Micrometerschraube messen. Ausserdem kann dieser Abstand beliebig verändert werden. Jede Messung lässt sich also mehrmals unter verschiedenen Umständen ausführen.

Eine Schwierigkeit bleibt aber auch bei einem so construirten Accumulator bestehen, die nämlich, dass man die ebenen Conductoren notwendig begrenzen muss, während man die Verteilung der Electricität in der Nähe der Kanten nicht streng zu berechnen vermag. Nimmt man zu Conductoren Kreisscheiben, deren Radien gross gegen ihren Abstand von einander sind, so kann man zwar nach der in Art. 202 auseinandergesetzten Helmholtzschen Methode, indem man die Kanten der Scheiben als gerade Linien betrachtet, die Verteilung der Electricität auf ihnen berechnen. Man darf aber nicht ausser Acht lassen, dass bei jenen Rechnungen vorausgesetzt ist, dass ausser den beiden einander zugewandten ebenen Flächen weiter keine electrischen Körper mehr vorhanden sind, während in unserm Falle, wie das bei begrenzten Instrumenten nicht zu umgehen ist, sicher ein Teil der Electricität auch auf den von einander abgewandten Seiten der Scheiben sich verteilen wird.*)

228. Ich ziehe deshalb das folgende, als Accumulator mit Schutzring zu bezeichnende und von W. Thomson angegebene Arrangement vor, welches die Electricitätsmenge auf einer isolirten Scheibe durch ihr Potentialniveau exact zu bestimmen gestaltet.

Accumulator mit Schutzring. *Bb* ist ein cylindrisches Gefäss aus leitendem Material, dessen obere Fläche möglichst eben geschliffen ist und aus zwei Teilen, einer Scheibe *A* und einem diese umgebenden breiten Ring *BB* besteht. Scheibe und Ring hängen nirgend zusammen und das Intervall zwischen ihnen ist gerade so breit, dass kein Funke unter gewöhnlichen Verhältnissen es zu überspringen vermag. Die Scheibe wird von zwei isolirenden Füssen *GG* getragen, und ihre obere Ebene muss möglichst genau in die Ebene des Ringes fallen. Weiter ist *C* eine Metallscheibe, deren untere Fläche eben ge-

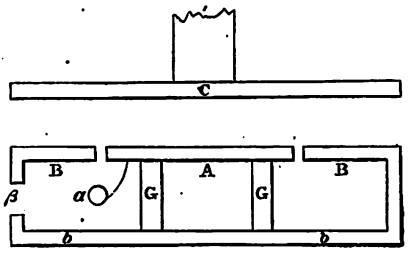


Fig. 21.

*) Die allgemeine Theorie des Condensators (auch die des im Folgenden beschriebenen Thomsonschen) nebst den Literaturnachweisen findet der Leser in Kirchhoff, *Gesammelte Abhandlungen* pag. 101 ff.

Digitized by Google

schliffen ist und parallel BB verläuft. Sie ist beträchtlich grösser gehalten als die Scheibe A und kann durch eine Micrometerschraube, die in der Figur nicht weiter angegeben ist, gegen BB um sicher zu messende Intervalle, verstellt werden.

Die Messungen werden mit diesem Accumulator so ausgeführt.

Hat die Scheibe C das Potential Null, während die Scheibe A und das ganze Gefäss Bb das Potential V besitzen, so kann auf der Rückseite von A keine Electricität vorhanden sein, weil A einem nahezu überall geschlossenen leitenden Gefässe angehört und mit diesem Gefäss sich auf demselben Potential befindet. Ferner wird auch auf der Kante der Scheibe A, weil die ihr gegenüberstehende Kante dasselbe Potential hat, nur wenig Electricität existiren. Auf der Fläche der Scheibe A wird die Electricität nahezu gleichförmig verteilt sein, und deshalb wird ihre Electricitätsmenge sehr genähert durch das Product aus ihrem Flächeninhalt in die nach Art. 124 für eine Ebene zu bestimmende Flächendichte sein.

Nach den Untersuchungen in Art. 201 ist tatsächlich die Ladung der Scheibe

$$Q = V\left\{\frac{R^2 + R'^2}{8A} + \frac{R^2 - R'^2}{8A}\frac{\alpha}{A+\alpha}\right\},$$

wo R den Radius der Scheibe, R' den der Oeffnung im Schutzring, A den Abstand zwischen A und C und α eine Grösse bezeichnet, die an der angeführten Stelle definirt ist und den Betrag $(R' - R)(\log 2)/\pi$ nicht überschreitet.

Wenn die Grösse $R' - R$, die Breite der Furche, welche die Scheibe von dem Schutzring trennt, klein gegen den Abstand der Scheibe A von der Scheibe C ist, so wird diese Ladung der Scheibe A einfacher

$$Q = V\frac{R^2 + R'^2}{8A}.$$

Verbindet man nunmehr das Gefäss Bb mit der Erde, so sinkt sein Potential auf Null und da das Potential von A nicht mehr gleich dem des Gefässes ist, so wird die Electricität auf A sich in anderer, nicht mehr gleichförmiger Weise anordnen. Die auf A befindliche Electricitätsmenge wird dadurch aber nicht alterirt; entladet man also A, so bekommt man eine Electricitätsmenge, die sich durch die ursprüngliche, gemessene Potentialdifferenz zwischen A und C und durch die Constanten R, R' und A des Apparates berechnen lässt.

Vergleichung der Capacitäten von Accumulatoren.

229. Die Form des Accumulators, die aus der Gestalt und den Dimensionen seiner Teile die sicherste Bestimmung seiner Capacität gestattet, eignet sich im allgemeinen nicht sehr zu experimentellen Untersuchungen. Für praktische Arbeiten ist es wünschenswert, möglichst einfach construirte Instrumente

Digitized by Google

zu verwenden, also solche, die nicht mehr als die nötigen zwei Conductoren besitzen, deren einer den andern so vollständig als möglich umgiebt. Der eben beschriebene Accumulator mit Schutzring hat aber drei von einander unabhängige Conductoren, die in bestimmter Ordnung zu laden und zu entladen sind. Man wird ihn daher nur als Standard zur Herstellung secundärer Vergleichsapparate von einfacherer Gestalt und Handhabung benutzen. Ich werde deshalb noch darlegen, wie man Accumulatoren mit einander vergleicht, und als typisches Beispiel zeigen, in welcher Weise zwei Accumulatoren mit Schutzring auf die Gleichheit ihrer Capacitäten geprüft werden können.

Es sei also A die Scheibe, B der Schutzring zusammen mit den übrigen Teilen des Gefässes und C die grosse verschiebbare Scheibe eines Accumulators, während A', B', C' die entsprechenden Stücke in einem zweiten Accumulator bezeichnen.

Ist einer der beiden Accumulatoren von einfacherer Construction, so hat man B oder B' zu unterdrücken und unter A die innere, unter C die äussere A umgebende Leiterfläche zu verstehen.

Bei einer Vergleichung der beiden Accumulatoren erhält man die Schutzringe derselben in steter Verbindung mit den gegenseitigen grossen Scheiben, man zieht also Drähte von B nach C' und von B' nach C. Alsdann führt man die folgenden Operationen aus.

1) Man verbindet A mit B, mit C' und mit einer Electrode J einer Leydener Flasche, deren andere Electrode zur Erde abgeleitet ist, ferner A' mit B', mit C und mit der Erde.

2) Man trennt A, B und C' von der Electrode J der Leydener Flasche.

3) Man hebt die Verbindung von A mit B und C' und die von A' mit B' und C auf.

4) Man verbindet B und C' mit B' und C und mit der Erde.

5) Man verbindet A mit A'.

6) Man verbindet A und A' mit einem Electroskop E.

Die folgende symbolische Zusammenstellung gewährt einen Ueberblick über den Zustand, in dem sich die einzelnen Teile der beiden Apparate bei jeder Operation befinden. Dabei soll ein Gleichheitszeichen zwischen zwei Buchstaben bezeichnen, dass die durch sie gekennzeichneten Teile mit einander verbunden sind, während ein senkrechter Strich angiebt, dass die Teile von einander isolirt sind.

Darnach haben wir

$$
\begin{array}{lll}
1) & 0 = C = B' = A' & | \quad A = B = C' = J. \\
2) & 0 = C = B' = A' & | \quad A = B = C' \mid J. \\
3) & 0 = C = B' \mid A' & | \quad A \mid B = C'. \\
4) & 0 = C = B' \mid A' & | \quad A \mid B = C' = 0. \\
5) & 0 = C = B' \mid A' & = \quad A \mid B = C' = 0. \\
6) & 0 = C = B' \mid A' = E = A & \mid B = C' = 0.
\end{array}
$$

unter 0 die Erde verstanden.

Digitized by Google

Bei der Operation 1) sind beide Accumulatoren entgegengesetzt geladen, A positiv und A' negativ. Dabei sind die Electricitäten auf den obern Flächen dieser Scheiben nahezu gleichförmig verteilt.

Die Operation 2) bewirkt nur die Entfernung der ladenden Flasche, während die unter 3) die Ladungen der Scheiben A, A' isolirt.

Bei der Operation 4) werden die Schutzringe mit den zugehörigen grossen Scheiben C, C' verbunden, so dass die Ladungen der Scheiben A, A', ohne ihre Grössen zu ändern, sich auf diesen Scheiben ungleichförmig verteilen.

Bei der Operation 5) ist A mit A' verbunden. Sind die Capacitäten beider Accumulatoren einander gleich, so bewirkt diese Operation eine vollständige Vernichtung der freien Electricitäten auf den Scheiben A und A'. Ob eine solche vollständige Vernichtung wirklich stattgefunden hat, also ob die Accumulatoren wirklich gleiche Capacität besitzen, lehrt dann die Operation unter 6), wo die Scheiben mit einem Electroskop verbunden werden, welches, je nachdem A oder A' die grössere Capacität besitzt, eine positive oder negative Electricitätsmenge zur Anzeige bringt.

So weitläufig auch diese ganze Prüfungsmethode erscheint, so können doch alle Operationen mit Hilfe eines geeigneten Stromschlüssels in wenigen Augenblicken ausgeführt werden.

Ergiebt die Vergleichung der beiden Accumulatoren eine Verschiedenheit ihrer Capacitäten, so kann man sie durch die Verschiebung ihrer grossen Scheiben so lange justiren, bis sie dieselbe Capacität besitzen. Man kann auch in derselben Weise die Capacität eines Accumulators gleich der Capacität einer ganzen Reihe mit einander verbundener Accumulatoren machen. Ueberhaupt vermag man so mit Hilfe eines Standard-Accumulators die Capacitäten irgendwie gestalteter, aber für experimentelle Untersuchungen geeigneterer Accumulatoren in absolutem Maass, das heisst in Längeneinheiten, zu bestimmen, so dass sie nunmehr ihrerseits zu weiteren Vergleichungen dienen können.

In dieser Weise kann man sich für Accumulatoren ebenso Normale herstellen, wie für Gewichte, Längen und die andern in der Metronomie gebräuchlichen Maasse.

Die oben auseinandergesetzte Vergleichsmethode dürfte auch sehr geeignet sein zur Bestimmung der specifischen inductiven Capacität von Dielectricis. Bringt man nämlich eine Scheibe eines Dielectricums, dessen specifische inductive Capacität K verschieden von der der Luft ist, welche sich zwischen den Scheiben A und C eines Accumulators befindet, und sorgt dafür, dass sie die Scheibe A überall beträchtlich überragt, so ändert sich die Capacität des Accumulators, wie wenn die Scheibe C der Scheibe A genähert worden wäre.

Verschiebt man die Scheibe C so lange bis die Capacität des Accumulators nach Zwischenbringung der dielectrischen Platte gleich der ohne diese Platte ist, bezeichnet mit c den Abstand zwischen C und A, wenn die

Digitized by Google

Platte eingeführt ist, und mit x' den, wenn sie fehlt, so hat man die specifische inductive Capacität

$$K = \frac{a}{a + x' - x},$$

wo a die Dicke der dielectrischen Platte angiebt.

W. Thomson hat noch einen andern Accumulator aus den drei in Art. 127 beschriebenen Cylindern construirt, dessen Capacität messbar verändert werden kann.

Eine Verwendung hat dieser Accumulator in den Untersuchungen von Gibson und Barclay (*Proc. R. S.* 1871, Febr. 2 und *Phil. Trans.* 1871 p. 573) gefunden, aus denen die genannten Physiker geschlossen haben, dass die specifische inductive Capacität des Paraffins 1.975 mal so gross als die der Luft ist.

Digitized by Google

ZWEITER TEIL.

Electrokinematik.

Digitized by Google

Digitized by Google

Cap. I.

Der electrische Strom.

Bedeutung des electrischen Stromes.

230. Wir haben in Art. 45 gesehen, dass, wenn Electricität auf einem Conductor sich in Gleichgewicht befindet, das Potential in jedem Punkte des Conductors einen und denselben Wert hat.

Sind also zwei Conductoren A und B mit Electricität so geladen, dass das Potentialniveau auf A höher ist als das auf B, so muss, wenn sie durch einen Draht C miteinander verbunden werden, Electricität von A nach B so lange übergehen, bis ihre Potentiale — was übrigens in sehr kurzer Zeit geschieht — sich ausgeglichen haben.

231. Während nun die Electricität durch den Draht C von A nach B übergeht, beobachtet man an demselben Erscheinungen, die man in ihrer Gesammtheit als *Electrischen Strom* bezeichnet.

Zunächst findet eine Uebertragung von positiver Electricität von A nach B und von negativer von B nach A statt.

Durch diesen Process, den man als den der *Electrischen Convection* bezeichnen kann, werden successive kleine Teilchen Electricität von jedem der Körper zu dem andern übergeführt, so dass eine gewisse Electricitätsmenge oder auch, wie wir sagen können, eine gewisse electrische Erregung längs einer bestimmten Bahn von einem Körper zu einem andern übergeht.

Man kann also nicht umhin, den eben beschriebenen Vorgang als eine Strömung von Electricität zu betrachten, was man sich auch sonst unter Electricität vorstellen mag.

Der electrische Strom kann entweder in einer Fortbewegung positiver Electricität von A nach B, oder negativer von B nach A, oder in einer Fortbewegung positiver Electricität von A nach B, verbunden mit einer gleichzeitigen in entgegengesetzter Richtung vor sich gehenden Fortbewegung negativer Electricität von B nach A bestehen

Fechner und Weber sind von der letztern Annahme ausgegangen, die sie noch dadurch specialisirten, dass die entgegengesetzt gerichteten

Digitized by Google

Ströme positiver und negativer Electricität, welche den electrischen Strom constituiren, einander völlig gleich sein sollten. Man muss sich dieser sehr künstlichen Hypothese über die Natur des electrischen Stromes wol erinnern, wenn man die Fassung der wichtigsten experimentellen Resultate, zu denen Weber gelangt ist, verstehen will.

Nehmen wir wie in Art. 36 an, dass in der Zeiteinheit P Einheiten positiver Electricität von A nach B und gleichzeitig N Einheiten negativer Electricität von B nach A übergehen, so ist also nach Webers Hypothese $P = N$, und man kann P oder N als den numerischen Betrag der Stromstärke betrachten.

Ich werde hier keine Beziehung zwischen P und N aufstellen, sondern lediglich das Resultat des electrischen Stromes, nämlich die Ueberführung von $P + N$ Einheiten positiver Electricität von A nach B, ins Auge fassen.

Daher werde ich auch $P + N$ als das wirkliche Maass für die Intensität des electrischen Stromes betrachten. Eine Stromstärke, die nach Weber gleich 1 ist, wird also hier gleich 2 zu setzen sein.

Stationäre Ströme.

232. In dem bisher betrachteten Fall, wo ein Strom zwischen zwei zu verschiedenen Potentialen geladenen Conductoren fliesst, nimmt der ganze Bewegungsprocess sehr bald, weil die Potentiale der beiden Conductoren sich ausgleichen, ein Ende, so dass der Strom der Hauptsache nach in einer Translation von Electricität besteht und als *Uebergangsstrom* bezeichnet werden kann.

Es giebt aber Methoden, durch die man die Potentialdifferenz zweier Conductoren auf unveränderter Höhe erhalten kann, und dann muss die Electricität unablässig mit sich gleich bleibender Stärke zwischen den Conductoren strömen und so einen *Stationären Strom* bilden.

Die Voltasche Batterie.

Man bringt einen stationären electrischen Strom am besten mit Hilfe einer *Voltaschen Batterie* oder *Kette* hervor.

Um das Charakteristische einer solchen Batterie klar hervortreten zu lassen, will ich das von Daniell angegebene constante Volta sche Element beschreiben.

Man tut eine Lösung von Zinkvitriol in eine poröse Tonzelle und setzt diese Zelle in ein anderes Gefäss, welches eine gesättigte Lösung von Kupfervitriol enthält. Dann taucht man einen Zinkstab in die Zinkvitriollösung und einen Kupferstab in die Kupfervitriollösung. Befestigt man noch an die Enden der beiden Stäbe, die aus den Flüssigkeiten herausragen, Drähte, so hat man eine Vorrichtung, die man als ein *Daniellsches Element* oder

Digitized by Google

eine *Daniellsche Zelle* bezeichnet. Mehrere solcher Elemente bilden eine *Daniellsche Kette* oder *Batterie*. Wegen der nähern Einrichtung sehe man Art. 272.

233. Isolirt man ein solches Element, indem man es auf einen Isolirschemel setzt und verbindet den Draht, der vom Kupferstab abgeht, mit einem isolirten Conductor A und den Draht, der vom Zinkstab abgeht, mit einem isolirten Conductor B, der von demselben Metall wie A hergestellt ist, so findet man mit einem feinen Electrometer, dass das Potential auf A das auf B herrschende um eine gewisse Grösse übersteigt.

Diese Potentialdifferenz heisst die *Electromotorische Kraft* des Daniellschen Elements.

Trennt man A und B von dem Element und verbindet sie durch einen Draht, so findet ein vorübergehender Strom von A nach B statt, und die Potentiale der beiden Conductoren gleichen sich aus. Man kann dann die Conductoren von neuem durch die Zelle laden und die Operation so lange wiederholen, als die Zelle überhaupt in Tätigkeit ist. Lässt man aber die Conductoren, während sie mit einander durch einen Draht C verbunden sind, auch noch in ihrer angegebenen frühern Verbindung mit dem Element, so unterhält die Zelle einen Strom, der stationär durch den Draht C fliesst und die Potentialdifferenz zwischen den beiden Conductoren constant auf derselben Höhe erhält. Es ist aber diese Potentialdifferenz, wie wir noch später sehen werden, nicht gleich der ganzen electromotorischen Kraft des Elements, weil ein Teil dieser letztern Kraft dazu verwendet wird, um den Strom, der durch das Element selbst geht, zu unterhalten.

Combinirt man eine Anzahl von Elementen so, dass man immer den Zinkstab eines Elements mit dem Kupferstab eines andern metallisch verbindet, so erhält man eine *Voltasche Batterie* oder *Kette*. Die electromotorische Kraft einer solchen Batterie ist gleich der Summe der electromotorischen Kräfte der einzelnen die Batterie zusammensetzenden Zellen.

Ist die Batterie isolirt, so kann man sie als Ganzes laden, zu welchem Potential man sie aber auch laden mag, immer wird das Potential am Kupferende um den Betrag der electromotorischen Kraft grösser als die am Zinkende sein. Die einzelnen Zellen können dabei sehr verschiedenartig construirt sein, indem sie entweder andere chemische Agentien oder andere Metalle enthalten als die beschriebenen, falls nur keine chemischen Actionen vor sich gehen, wenn kein Strom sie durchsetzt.

234. Sind die beiden Enden einer Voltaschen Batterie von einander isolirt, so findet man immer das Kupferende positiv, also mit Glaselectricität, das Zinkende negativ, also mit Harzelectricität geladen. Verbindet man die beiden Enden durch einen Draht, so beginnt ein electrischer Strom ihn zu durchfliessen. Der Strom steigt sehr rasch an, wird schnell constant und bildet dann einen *Stationären electrischen Strom*.

Digitized by Google

Eigenschaften des electrischen Stromes.

Bahn und Dauer des Stromes.

235. Der electrische Strom bewegt sich in geschlossener Bahn, er geht in den Drähten des Elements vom Kupfer zum Zink, in den Lösungen vom Zink zum Kupfer.

Unterbricht man die Bahn des Stromes, indem man den vom Kupfer zum Zinkstabe führenden Draht durchschneidet, so hört der Strom auf, und man findet, dass das Potential am Kupferende um die Grösse der electromotorischen Kraft des Elements das am Zinkende überragt.

Electrolytische Wirkung des Stromes.

236. So lange der Strom unterbrochen ist, finden in den Elementen einer Daniellschen Batterie keine chemischen Vorgänge statt, sobald er aber geschlossen wird, geht am Zinkstab eines jeden Elements eine Auflösung des Zinks vor sich, während am Kupferstabe Kupfer niedergeschlagen wird. Das Zinkvitriol nimmt an Menge zu, das Kupfervitriol dagegen ab, wenn man nicht frisches Vitriol nachfüllt. In allen Zellen der Batterie, die der Strom durchfliesst, wird dieselbe Quantität Zink gelöst und dieselbe Quantität Kupfer niedergeschlagen, von welcher Grösse auch die einzelnen Metallstäbe sein mögen. Ist eines der Elemente der Batterie anders construirt als die Daniellsche Zelle, so steht die in ihr stattfindende chemische Action in constanter Proportion zu der in einem Daniellschen Element vor sich gehenden. Besteht zum Beispiel eine der Zellen aus einem Becherglas voll verdünnter Schwefelsäure, in welches zwei Platinstreifen tauchen, so wird an dem Streifen, wo der Strom in die Zelle eintritt, also an dem mit einem Kupferstab eines Daniellschen Elements verbundenen, Sauerstoff, und an dem Streifen, wo er sie verlässt, also an dem mit einem Zinkstab eines Daniellschen Elements verbundenen, Wasserstoff entwickelt. Das Volumen des entwickelten Wasserstoffs ist zweimal so gross wie das des in derselben Zeit entwickelten Sauerstoffs, dagegen ist das Gewicht dieses Gases achtmal so gross wie das jenes.

In jeder Zelle ist das Gewicht einer jeden, in einer bestimmten Zeit gelösten, oder zersetzten, oder niedergeschlagenen Substanz gleich dem Producte einer gewissen Grösse, die man als das *Electrochemische Aequivalent* der Substanz bezeichnet, in die Intensität des Stromes und in die Zeit, während deren der Strom geflossen ist.

Die Experimente, durch welche dieses *Princip der Electrolytischen Aequivalente* bewiesen wird, findet der Leser in der siebenten und achten Serie der Faradayschen *Experimental Researches**) eine Untersuchung der

*) Auch in *Pogg. Ann.* Bd. 33, 35.

Digitized by Google

scheinbaren Widersprüche gegen dasselbe in Millers *Chemical Physics* und Wiedemanns *Galvanismus*.

237. Die Zersetzung durch den electrischen Strom wird als *Electrolyse* bezeichnet. Die Substanzen, welche vom electrischen Strom zersetzt werden, heissen *Electrolyte*. Die Stellen, an denen der Strom in das Electrolyt eintritt, bezüglich aus ihm austritt, nennt man *Electroden*. Speciell heisst die Electrode, wo der Strom in das Electrolyt eintritt, die *Anode* und die, wo er aus demselben austritt, die *Kathode*. Die Componenten, in welche ein Electrolyt durch den Strom zerlegt wird, werden als *Ionen* bezeichnet, und zwar heisst das Ion, welches sich an der Anode abscheidet, das *Anion*, und dasjenige, welches sich an der Kathode abscheidet, das *Kation*. Endlich bezeichnet man die Art, wie der Strom, unter dessen Einwirkung ein Electrolyt zerlegt und die Componenten an ihre bezüglichen Plätze geführt werden, durch das Electrolyt geleitet wird, als *Electrolytische Leitung* oder *Leitung durch Electrolyse*.

Ich glaube, dass Faraday diese Bezeichnungen unter Beihülfe Whewells erfunden hat. Sie sind übrigens ziemlich allgemein adoptirt.

Bringt man ein Electrolyt in eine Röhre von variabelem Querschnitt, an deren Enden Electroden befestigt sind, so scheiden sich an diesen Electroden electrochemische Aequivalente der Ionen, an der Anode des Anions, an der Kathode des Kations, in solchen Quantitäten ab, dass sie zusammen einer gewissen Menge des Electrolytes äquivalent sind. Dabei ändert sich in den übrigen Teilen der Röhre, gleichgiltig ob sie dort eng oder weit oder von variabelem Querschnitt ist, die Zusammensetzung des Electrolytes nicht.

Der Betrag an Electrolyse ist also in allen Querschnitten der Röhre gleich gross, der electrolytische Prozess demzufolge an den engen Stellen der Röhre intensiver als an den weiten. Die Menge des durch einen Querschnitt in bestimmter Zeit hindurchgehenden Ions ist aber unabhängig von der Grösse dieses Querschnitts.

Man kann also die Geschwindigkeit, mit der die Electrolyse vor sich geht, indem man sie durch die in der Zeiteinheit zerlegte Menge eines Electrolytes definirt, als ein Maass für die Intensität des electrischen Stromes benutzen. Die Menge der abgeschiedenen Electrolyte wird durch ein *Voltameter* bestimmt.

In dieser Weise gemessen ist die Intensität eines Stromes in allen Punkten seiner Bahn gleich gross.

Die gesammte während einer gegebenen Zeit durch einen Querschnitt des Stromkreises hindurchgegangene Electricitätsmenge ist proportional der in derselben Zeit im Voltameter abgeschiedenen Menge der Producte der Electrolytes, welches als Füllung des Voltameters dient.

238. Man kann die Vergleichung der durch einen Querschnitt des Stromes hindurchgegangenen Electricitätsmengen mit den in derselben Zeit gelösten Mengen von Electrolyten in folgender Weise durchführen.

Digitized by Google

Man führt ein Voltameter in einen Teil des Stromkreises einer Voltaschen Batterie ein und unterbricht den Kreis in einem andern Teil. Es seien A und B die Enden des geöffneten Kreises, und zwar A die Anode und B die Kathode. Lässt man eine kleine isolirte Kugel abwechselnd A und B berühren, so wird sie bei jedem Hin- und Hergang eine gewisse Electricitätsmenge von A nach B überführen. Gleichzeitig geht im Voltameter und in jedem der Elemente der Batterie eine Electrolyse vor sich. Bestimmt man also die von A nach B durch die Kugel durch Convection übergeführte Electricitätsmenge entweder direct mit dem Electrometer oder rechnerisch durch Multiplication der electromotorischen Kraft des Stromes mit der electrostatischen Capacität der Kugel, und misst die in den Zellen der Batterie und des Voltameters zersetzten Mengen der Electrolyte, so hat man alle Daten zur Vergleichung dieser mit der in electrostatischen Einheiten gemessenen, während der Zeit von A nach B übergegangenen Electricitätsmenge.

Die Quantität einer Substanz, welche gelöst wird, während eine Electricitätseinheit einen Querschnitt des Stromkreises passirt, heisst das *Electrochemische Aequivalent* der betreffenden Substanz.

Das oben angegebene Experiment würde also die electrochemischen Aequivalente der Substanzen bestimmen lehren. Es ist aber in der angegebenen Weise mit gewöhnlichen Batterieen nicht gut durchführbar, weil man die Kugel ausserordentlich oft hin- und herführen müsste, ehe sich in den Zellen eine messbare Menge zersetzter Substanzen zeigen würde. Man kann aber jenes Experiment benutzen, um sich eine Anschauung von dem Vorgang bei der Electrolyse zu verschaffen. Betrachtet man nämlich die electrolytische Leitung als eine Art Convection, so kann man sich vorstellen, dass ein electrochemisches Aequivalent des Anion eine Menge N negativer Electricität nach der Anode, und dass gleichzeitig ein Aequivalent des Kation eine Menge P positiver Electricität nach der Kathode mit sich führt, so dass der gesammte Betrag $P+N$ an übergeführter Electricität gleich einer Electricitätseinheit wird. Soweit ich sehen kann, ist diese Hypothese über den Vorgang bei der Electrolyse nicht unvereinbar mit der Erfahrung, wenn sie auch bei der Unkenntnis, in der wir uns noch über die Natur der Electricität und die Structur chemischer Verbindungen befinden, nur sehr unvollkommen die wirklichen Vorgänge beschreiben dürfte.

Magnetische Wirkungen des electrischen Stromes.

239. Oerstedt entdeckte, dass ein Magnet in der Nähe eines geradlinigen electrischen Stromes, wie ich später in Art. 475 noch näher ausführen werde, sich senkrecht zu der durch ihn und durch den Strom gehenden Ebene zu stellen sucht.

Digitized by Google

Genauer lässt sich die Lage, die eine bewegliche Magnetnadel unter dem Einfluss eines Stromes einzunehmen strebt, durch folgende Regel bestimmen.

Befindet sich ein Mensch in der Strombahn in einer derartigen Lage, dass der durch den Draht vom Kupfer zum Zink fliessende Strom durch seinen Kopf zu seinen Füssen geht, und richtet er sein Gesicht dem Centrum der Magnetnadel zu, so bewegt sich der Nordpol der Nadel nach seiner rechten Hand hin.

Später im vierten Teil dieses Werkes werden wir uns genauer mit den Gesetzen dieser electromagnetischen Wirkung eines Stromes zu beschäftigen haben. Worauf es uns aber hier namentlich ankommt, das ist, darauf aufmerksam zu machen, dass ein electrischer Strom magnetische Wirkungen ausserhalb seiner eigentlichen Bahn auszuüben vermag, durch die man nicht blos seine Existenz nachweisen kann, sondern auch seine Stärke zu messen vermag, ohne ihn unterbrechen und ohne etwas in seinen Kreis einschalten zu müssen.

Der Betrag der magnetischen Wirkung eines Stromes ist, wie durch zahlreiche Versuche bewiesen worden ist, streng proportional seiner Stromstärke, wie sie durch die Zersetzungsproducte im Voltameter gemessen wird. Er ist ferner unabhängig von der Natur des Körpers, den der Strom durchfliesst, also derselbe, sei es dass der Strom durch ein Metall oder durch ein Electrolyt geht.

240. Man nennt ein Instrument, das die Stärke eines Stromes durch die von ihm ausgeübte magnetische Wirkung zu messen gestattet, ein *Galvanometer.*

Ein Galvanometer besteht im allgemeinen aus einer oder aus mehreren parallelen Windungen eines mit Seide besponnenen Drahtes, in deren Mitte eine Magnetnadel sich in einer Horizontalebene um eine Axe, die durch ihren Schwerpunkt geht, bewegen kann. Wird der Draht von einem Strom durchflossen, so sucht sich die Nadel senkrecht zur Ebene der Windungen des Drahtes zu stellen. Richtet man die Ebene der Windungen parallel zur Ebene des Aequators und lässt den Strom sie von Osten nach Westen in Richtung der scheinbaren Bewegung der Sonne durchfliessen, so sucht sich die Magnetnadel genau so zu stellen wie die Erde, wenn man sie als einen grossen Magneten betrachtet, dessen Nordpol da liegt, wo der Südpol unserer Nadeln hinweist.

Das Galvanometer ist das bequemste Instrument für die Messung von Stromintensitäten, und obgleich ich erst im vierten Teil dieses Werkes seine Theorie werde auseinandersetzen können, muss ich doch im Folgenden voraussetzen, dass ein solches Instrument construirt und angewendet werden kann. In der Tat werde ich auch überall, wo von der Intensität eines Stromes die Rede sein wird, diese als durch ein Galvanometer gemessen annehmen.

Digitized by Google

Cap. II.

Leitung und Widerstand.

—x—

241. Die Potentialdifferenz zweier Punkte einer Leitung, die von einem stationären Strom durchflossen wird, hängt im allgemeinen von der Stärke des Stromes, von der Beschaffenheit, den Dimensionen und dem Zustande, in dem sich die Leitung zwischen den beiden Punkten befindet, ab. Ist das Leiterstück homogen und überall gleich temperirt, so heisst jene Potentialdifferenz seine *Aeussere Electromotorische Kraft.*

Besteht das Stück der Leitung aus mehreren mit einander verbundenen Substanzen, etwa aus Metallen, oder aus Electrolyten, oder aus Metallen und Electrolyten, oder ist es an verschiedenen Stellen verschieden temperirt, so wirken auch an den Uebergangsstellen electromotorische Kräfte, und man muss dann neben der äussern electromotorischen Kraft auch *Innere Electromotorische Kräfte* in Rechnung ziehen.

Die Abhängigkeit der electromotorischen Kraft von der Natur und den Dimensionen der Leitung heisst die Abhängigkeit von dem *Widerstande der Leitung.* Die ersten Untersuchungen über die Beziehungen zwischen electromotorischer Kraft, Stromstärke und Widerstand sind von Ohm angestellt und 1827 in seinem Werke *Die Galvanische Kette mathematisch bearbeitet* veröffentlicht worden. Nach ihm nennt man auch das Ergebnis jener Untersuchungen in seiner Anwendung auf homogene Leiter das *Ohmsche Gesetz.*

Das Ohmsche Gesetz.

Die zwischen den Enden eines Teiles eines Stromkreises wirkende electromotorische Kraft ist gleich dem Product aus der Stromstärke in den Widerstand des betreffenden Teiles des Stromkreises.

Man kann dieses Gesetz auch als zur Definition des neu eingeführten Begriffs des electrischen Widerstandes dienend betrachten. Demnach würde der electrische *Widerstand* eines Leiters gleich sein dem Verhältnis der

Digitized by Google

Electromotorischen Kraft zu der Intensität des Stromes, den diese hervorbringt.

Die Einführung eines solchen Begriffs würde weiter von keiner wissenschaftlichen Bedeutung gewesen sein, wenn Ohm nicht experimentell bewiesen hätte, dass der Widerstand eine wirkliche physikalische Grösse ist, das heisst eine Grösse, die sich in jedem Falle bestimmt messen lässt, und die sich nur dann ändert, wenn die Beschaffenheit des Conductors geändert wird.

Zunächst ist also der Widerstand eines Conductors unabhängig von der Stärke des Stromes, der ihn durchfliesst.

Er ist weiter unabhängig von der Grösse des electrischen Potentials, auf welchem der Conductor erhalten wird, sowie von der Dichte der auf dem Conductor verteilten Electricität.

Er wird allein durch die Natur des Materials, aus welchem der Conductor besteht, dem Aggregatzustande desselben, seiner Configuration und seiner Temperatur bestimmt.

Man kann den Widerstand eines Leiters bis auf ein Zehntausendteil oder sogar bis auf Hunderttausendteil seines Wertes messen, und man hat daraufhin schon so viele Körper untersucht, dass man das Ohmsche Gesetz mit grosser Sicherheit als wahr annehmen darf. Die Anwendungen und Consequenzen dieses Gesetzes werden wir im sechsten Capitel kennen lernen.

Wärmeentwickelung durch den electrischen Strom.

242. Wenn ein Strom unter dem Einfluss einer electromotorischen Kraft einen Leiter durchsetzt, so wird, wie wir gesehen haben, Electricität von Orten höhern zu Orten niederern Potentials übergeführt. Würde man diese Ueberführung von Electricität von einem Platze zu einem andern mit Hilfe einer hin und her schwingenden Kugel in der früher angegebenen Weise bewirken, so müssten die electrischen Kräfte an der Kugel Arbeit verrichten, die man dann weiter benutzen könnte. In der Tat wird auch diese Arbeit in dem sogenannten electrischen Glockenspiel, wo die Electroden einer trocknen (Zambonischen) Säule in Glöckchen enden, zwischen denen ein isolirter Klöppel hin und her geht, zum Teil gewinnbringend verwendet. Die electrischen Kräfte erhalten hier die Schwingungen des Klöppels, also auch seine Anschläge gegen die Glöckchen, und bringen so Töne hervor, die sie in die Ferne fortpflanzen. Da wir nun in einem Stromkreise einerseits dieselbe Art der Ueberführung von Electricität von Orten höhern zu solchen niederern Potentials vor uns haben, und andererseits eine dadurch ins Leben tretende äussere Arbeit nicht bemerkbar wird, so treibt uns das Princip der Erhaltung der Energie nach innerer Arbeit, die der Strom in seiner Bahn leistet, zu suchen. Sind im Stromkreis Electrolyte eingeschaltet, so manifestirt sich ein Teil dieser Arbeit in der Zer-

Digitized by Google

setzung der Electrolyte. In andern Leitern aber geht die innere Arbeit des Stromes vollständig in Wärme über.

Die in einer bestimmten Zeit in Wärme verwandelte Energie des Stromes ist gleich dem Producte aus seiner electromotorischen Kraft in die während dieser Zeit übergeführte Electricitätsmenge. Die electromotorische Kraft ist aber nach dem Ohmschen Gesetz gleich dem Product aus der Stromstärke in den Widerstand, und die Electricitätsmenge ist gleich dem Product aus der Stromstärke in die Zeit. Daher ist die Menge der in einer bestimmten Zeit in einem bestimmten Leiter entwickelten Wärmemenge multiplicirt mit dem mechanischen Wärmeäquivalent gleich dem Quadrate der Stromstärke multiplicirt mit dem Widerstande des Leiters und mit der Zeit.

Diese von einem Strom bei der Ueberwindung des Widerstandes in seiner Bahn entwickelte Wärmemenge ist von Joule auch experimentell bestimmt worden. Seine ersten Untersuchungen lehrten, dass diese Wärmemenge proportional dem Quadrate der Stromintensität ist. Später aber verificirte er durch äusserst sorgfältige absolute Messungen der einzelnen Grössen das oben ausgesprochene Gesetz, das in mathematischen Symbolen ausgedrückt so lautet

$$JH = C^2Rt = CEt.$$

J ist das mechanische Wärmeäquivalent, H die Anzahl der entwickelten Wärmeeinheiten, C die Stromstärke, R der Widerstand des Leiters, t die Zeit, während der der Strom geflossen ist, und E die electromotorische Kraft.

Ihre theoretische Deutung und Entwickelung erhielten die obigen Relationen in einer Abhandlung von Thomson über die Anwendung des Princips der mechanischen Wirkung zur Messung electromotorischer Kräfte.*)

Analogieen und Unterschiede zwischen Wärme und Electricität.

243. Auf den ersten Blick scheint zwischen der Theorie der Leitung von Electricität und der von Wärme eine grosse Analogie zu bestehen, die sich durch den folgenden Satz ausdrücken lässt. Sind zwei Systeme geometrisch ähnlicher Körper so beschaffen, dass die Leitungsfähigkeit für Wärme in einem Teile des ersten Systems proportional ist der Leitungsfähigkeit für Electricität in dem entsprechenden Teile des andern Systems, und machen wir die Temperatur an einer Stelle des ersten Systems proportional dem Potential an der entsprechenden Stelle des zweiten, so ist die in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des ersten Systems fliessende Wärmemenge proportional der in der Zeiteinheit durch einen entsprechenden Querschnitt des zweiten Systems fliessenden Electricitätsmenge.

*) *Phil. Mag.* Dec. 1851. S. auch Clausius, *Mechanische Wärmetheorie.* 1879, Bd. 2 Seite 143.

Digitized by Google

In dieser Analogie entspricht einem electrischen Strom ein Wärmestrom und einer Potentialdifferenz eine Temperaturdifferenz, und ganz so wie Wärme von Orten höherer Temperatur zu solchen niederer sich hinbegiebt, fliesst Electricität von Orten höhern Potentials zu Orten niedereren.

244. Die Theorie der Ausgleichung von Potentialdifferenzen und die der Ausgleichung von Temperaturdifferenzen können also zur Veranschaulichung des einen Vorganges durch den andern dienen. Es giebt aber einen bewerkenswerten Unterschied zwischen den electrischen und thermischen Bewegungsphänomenen.

Man hänge einen leitenden Körper an einem Seidenfaden in ein geschlossenes leitendes Gefäss und lade letzteres mit Electricität. Das Potential des Gefässes und jedes innerhalb desselben befindlichen Gegenstandes steigt dann momentan an, wie lange und wie kräftig man aber auch das Gefäss laden mag, so wird doch der innerhalb desselben aufgehängte Körper, selbst wenn man ihn mit der Innenseite des Gefässes in Berührung bringt, keine Spur von Electricität aufweisen, weder während er sich in dem Gefässe befindet, noch wenn man ihn herausgenommen hat.

Erhebt man dagegen das Gefäss zu einer höhern Temperatur, so nimmt auch der Körper, freilich nach längerer Zeit, diese Temperatur an. Wenn man ihn herausnimmt, findet man ihn erwärmt und selbst heiss, so lange bis er durch Leitung und Strahlung seinen Wärmeüberschuss wieder verloren hat.

Diese Differenz zwischen den beiden Classen von Erscheinungen beruht auf der Tatsache, dass die Körper wol für die Wärme, nicht aber für die Electricität ein Absorptions- und Emissionsvermögen besitzen. Man kann nicht die Temperatur eines Körpers erhöhen, ohne dass man ihm auch eine seiner Masse und seiner specifischen Wärme entsprechende Wärmemenge mitteilt; dagegen kann man sehr wol in der angegebenen Weise das Potential eines Körpers zum Ansteigen bringen, ohne ihm selbst Electricität zuführen zu brauchen.

245. Wir erhitzen ferner einen Körper und bringen ihn in ein geschlossenes Gefäss. Die Aussenseite dieses Gefässes, die ursprünglich die Temperatur der Umgebung hatte, erwärmt sich allmälig, bis schliesslich ihre Temperatur und die des eingeschlossenen Körpers sich wieder mit der der Umgebung ausgeglichen und der Körper seinen Wärmeüberschuss verloren hat.

Es ist aber ganz unmöglich, ein ähnliches Experiment mit Electricität durchzuführen; man kann keinen Körper so mit Electricität laden, dass die ursprünglich unelectrische Aussenseite eines geschlossenen Gefässes, in das man ihn versenkt hat, electrisch würde. Faraday hat gerade nach einer derartigen Erscheinung unter dem Namen einer absoluten electrischen Ladung ganz vergeblich gesucht.

Digitized by Google

Man kann Wärme so innerhalb eines Körpers latent machen, dass sie nach Aussen nicht die geringste Wirkung ausübt, dagegen vermag man durch kein Mittel eine Electricitätsmenge so zu isoliren, dass sie nicht eine ihr gleiche und dem Zeichen nach entgegengesetzte Electricitätsmenge influencirt.

Es giebt daher in der Electricität nichts, was der specifischen Wärmecapacität entspricht, wie das auch aus dem in diesem Werke zu Grunde gelegten Princip folgt, dass die Electricität derselben Continuitätsbedingung gehorcht, der incompressible Flüssigkeiten folgen. Man kann also auch keinem Körper eine körperliche Ladung dadurch erteilen, dass man ihm immer neue Electricitätsmengen zuführt. Ich verweise noch auf die Art. 61, 111, 329, 334.

Digitized by Google

Cap. III.

Electromotorische Kräfte bei der Berührung von Körpern.

—×—

Contactelectricität; Spannungsgesetz.

246. Das Potential eines hohlen Conductors, definirt als das Potential in den Punkten seines mit Luft erfüllten Hohlraumes, lässt sich nach der in Art. 222 angegebenen Methode messen.

Verbindet man zwei leitende Gefässe von verschiedenen Metallen, etwa von Zink und von Kupfer, durch einen Draht, so findet man das Potential im Hohlraum des Zinkgefässes positiv gegen das im Hohlraum des Kupfergefässes herrschende. Die Differenz der Potentiale in den beiden Hohlräumen hängt von der Beschaffenheit der Innenflächen der beiden Leiter ab und ist am grössten, wenn die Zinkfläche blank, die Kupferfläche mit Oxyd bedeckt ist.

Man kann aus diesem und aus ähnlichen Beispielen schliessen, dass im allgemeinen, wenn zwei verschiedene Metalle mit einander in Contact gebracht werden, eine electromotorische Kraft zwischen ihnen zu wirken anfängt, durch die das Potentialniveau des einen Metalls um eine gewisse Grösse über dem des andern erhoben wird. Auf dieser Tatsache beruht die Voltasche Theorie von der *Contactelectricität.*

Spannungsgesetz. Ist die Potentialdifferenz von Eisen gegen Kupfer gleich I, und die von Zink gegen Kupfer gleich Z, so ist die Potentialdifferenz von Zink gegen Eisen gleich $Z - I$.

Diese als *Spannungsgesetz* bekannte Regel, wonach die Differenz der Potentialdifferenzen zweier Metalle gegen ein drittes Metall, bei derselben Temperatur gleich ist der Potentialdifferenz zwischen den beiden Metallen selbst, gilt für irgend welche drei Metalle. Bildet man also einen Kreis von irgend einer Anzahl irgend welcher Metalle, so tritt, sobald die einzelnen Metalle die ihnen zukommenden Potentiale erlangt haben, electrisches Gleichgewicht ein, und es circulirt kein Strom in dem Kreise.

Digitized by Google

247. Besteht dagegen der Kreis aus zwei Metallen und einem Electrolyt, so sucht das Electrolyt nach Voltas Theorie die Potentiale der mit ihm in Berührung befindlichen Metalle auszugleichen. Die electromotorische Kraft wird daher an den Stellen, wo die Metalle mit einander direct oder durch einen Draht in Verbindung stehen, nicht mehr balancirt, und es tritt ein continuirlicher Strom ein. Die Energie dieses Stromes wird durch die an den Berührungsstellen zwischen den Metallen und dem Electrolyt auftretenden chemischen Actionen geliefert und auf ihrer Höhe erhalten.

248. Inzwischen kann man die Ausgleichung zwischen den Potentialen zweier in Contact befindlicher Metalle und die daraus resultirende electrische Erscheinung auch noch durch andere Mittel bewirken, als durch chemische Actionen. W. Thomson*) brachte einen kupfernen Trichter in Contact mit einem vertical stehenden Zinkcylinder und liess durch den Trichter Kupferfeilicht strömen, welches sich in der Mitte des Zinkcylinders, wo es den Trichter verliess, in seine einzelnen Teilchen auflöste und dann in ein isolirtes Metallgefäss fiel. Das Metallgefäss wurde allmälig negativ electrisch, und seine Ladung nahm zu, je mehr Kupferfeilicht in dasselbe kam. Zugleich zeigte sich der Zinkcylinder und mit ihm der ihn berührende Kupfertrichter mehr und mehr positiv electrisch. Verband er nun den Zinkcylinder mit dem Metallgefäss durch einen Draht, so wurde dieser von einem continuirlichen Strom in Richtung vom Zinkcylinder zum Metallgefäss durchflossen. Der Strom von Kupferfeilicht, dessen einzelne Teilchen durch Induction negativ geladen werden, bildet den negativen Strom vom Trichter zum Metallgefäss oder, was dasselbe ist, einen positiven Strom vom Metallgefäss zum Trichter. Der Strom geht also durch die Luft (mit Hilfe der Feilspäne) vom Zink zum Kupfer und durch die metallische Verbindung vom Kupfer zum Zink, ganz so wie in der gewöhnlichen Voltaschen Einrichtung. Hier wird aber der Strom nicht durch eine aus chemischen Actionen entspringende Kraft, sondern von der Schwerkraft unterhalten, welche die negativ geladenen Feilspäne entgegen der electrischen Attraction, welche sie zum positiv geladenen Trichter zieht, zu fallen zwingt.

Das Peltiersche Phänomen.

249. Eine bemerkenswerte Bestätigung der Theorie der Contactelectricität hat die Entdeckung Peltiers geliefert, dass ein electrischer Strom, wenn er in einer Richtung durch die Verbindungsstelle zweier Metalle hindurchgeht, daselbst Wärme erregt, und wenn er sie in der entgegengesetzten Richtung durchfliesst, Wärme verbraucht.

Die Abkühlung, die der Strom bei dem Durchgang durch eine Verbindungsstelle zweier Metalle hervorbringt, ist aber nicht so gross, wie die

*) *North British Review* 1864 p. 353 und *Proc. R. S.* 1867, Juni 20.

Digitized by Google

bei entgegengesetzter Stromrichtung auftretende Erwärmung, weil ein Strom an sich schon bei der Ueberwindung des Widerstandes, den auch Metalle seinem Durchgange entgegensetzen, Wärme entwickeln muss.

Man hat daher die in jedem Metall durch die Ueberwindung des Widerstandes entstehende Erwärmung sorgfältig von der an der Verbindungsstelle zweier Metalle auftretenden Erwärmung oder Abkühlung zu trennen. Jene ist unabhängig von der Richtung des Stromes und wächst proportional dem Quadrate seiner Stromstärke an. Diese dagegen wechselt ihr Zeichen, wenn der Strom seine Richtung wechselt, und variirt proportional der Stromstärke. Jene kann man als die *Reibungswärme* des Stromes, diese als den *Peltierschen Effect* bezeichnen.

Ist ein Leiter aus zwei Metallen zusammengesetzt, so kann man die gesammte in ihm während der Zeit t durch den Strom entwickelte Wärmemenge darstellen durch

$$1) \qquad H = \frac{R}{J} C^2 t - \Pi C t .$$

H ist die Wärmemenge, J das mechanische Wärmeäquivalent, R der Widerstand des Leiters, C die Stromstärke und Π die Constante des Peltierschen Effects, also die bei einem Strom von der Stärke Eins in der Zeiteinheit an der Verbindungsstelle der Metalle absorbirte Wärmemenge (eine negative absorbirte Wärme als entwickelte Wärme betrachtet).

Nun ist aber die gesammte im Leiter entwickelte Wärmemenge mechanisch äquivalent der Arbeit, welche gegen die electrischen Kräfte im Leiter geleistet wird, das heisst gleich dem Product aus der Stromintensität in die den Strom unterhaltende electromotorische Kraft E. Daher haben wir auch

$$2) \qquad JH = CEt,$$

woraus sich bei Beachtung der Gleichung 1) ergiebt

$$3) \qquad E = RC - J\Pi.$$

Bestände der Leiter aus einem überall gleich temperirten Metall, so wäre nach dem Ohmschen Gesetz

$$3_1) \qquad E = RC.$$

Daher ist die electromotorische Kraft, welche hinreicht, um den Strom durch den zusammengesetzten Conductor zu treiben, kleiner oder grösser als die lediglich zur Ueberwindung des Widerstandes in dem Leiter erforderliche. $J\Pi$ repräsentirt also eine durch den Contact der beiden den Leiter zusammensetzenden Metalle hervorgebrachte, in positiver Richtung wirkende electromotorische Kraft.

Digitized by Google

Diese von W. Thomson*) herrührende Anwendung der Principien der mechanischen Wärmetheorie zur Entdeckung localer electromotorischer Kräfte ist von hoher wissenschaftlicher Bedeutung. Die gewöhnliche Methode zur Entdeckung solcher Kräfte, die darin besteht, dass man zwei Punkte des Leiters mit den Electroden eines Galvanometers oder Electroskops verbindet, würde hier wegen der Contactwirkungen, die an den Verbindungsstellen des Leiters mit den Leitungsdrähten auftreten, nicht zum Ziele führen können. Dagegen lehren Betrachtungen, die der mechanischen Wärmetheorie entnommen sind, dass die einzige Energiequelle im Leiter der electrische Strom ist, und ferner, dass der Strom im Leiter weiter keine Arbeit verrichtet, ausser dass er ihn erwärmt. Können wir also die Stromstärke in dem betreffenden Leiterstück und zugleich die in ihm entwickelte bezüglich absorbirte Wärmemenge messen, so haben wir sofort, ohne weitere Untersuchung der sonst noch im übrigen Teile des Stromkreises vorhandenen Contactkräfte, alle Daten zur Berechnung der Grösse der electromotorischen Kraft, welche den Strom durch das betreffende Leiterstück treibt.

Die so zu bestimmende an der Verbindungsstelle zweier Metalle wirkende electromotorische Kraft kommt gegen die in Art. 246 definirte Voltasche electromotorische Kraft wenig in Betracht. Letztere ist im allgemeinen sehr viel grösser als jene und oft selbst von entgegengesetztem Zeichen. Es kann daher die Annahme, dass man das Potential eines der Metalle gleich dem der mit ihm in Contact befindlichen Luft setzen darf, nicht richtig sein. Letzteres wird vielmehr zur Bestimmung der Voltaschen electromotorischen Kraft dienen, und man muss den grössern Teil dieser Voltaschen electromotorischen Kraft nicht an der Verbindungsstelle der beiden Metalle, sondern an einer oder an beiden Flächen der Metalle suchen, welche sie von der Luft oder sonst einem als drittes Element des Kreises dienenden Medium trennt.

Thermoelectricität.

250. Die an den Contactstellen eines aus Metallen zusammengesetzten Kreises wirkenden Kräfte heben sich nicht immer gegenseitig auf. Als Beweis dafür dient Seebecks Entdeckung, der zufolge in einem solchen lediglich aus Metallen bestehenden Kreise, wenn er an seinen verschiedenen Contactstellen verschieden temperirt ist, ein *Thermoelectrischer Strom* fliesst. Ein solcher Strom kann aber, wie sich leicht zeigen lässt, nicht auftreten, wenn der ganze rein metallische Kreis überall dieselbe Temperatur besitzt. Würde nämlich ein solcher gleichmässig temperirter rein metallischer Kreis von einem Strom durchzogen werden, so könnte man diesen verwenden, um Maschinen zu treiben, oder um in dem Kreise Wärme zu entwickeln, also wiederum um eine Arbeit zu verrichten, während sonst

*) *Proc. R. S. Edin.* 1851, Dec. 15; *Tr. R. S. Edin.* 1854.

Digitized by Google

nirgend Energie verbraucht wird, weil der Kreis überall dieselbe Temperatur hat und an keiner Stelle chemische oder sonstige Actionen aufzuweisen vermag.

Bezeichnet man also den Peltierschen Effect an der Berührungsstelle zweier Metalle a und b durch Π_{ab}, so muss dem obigen zufolge für einen gleichmässig temperirten aus zwei Metallen gebildeten Kreis

$$\Pi_{ab} + \Pi_{ba} = 0$$

sein. Entsprechend haben wir für einen aus drei Metallen a, b, c geformten Kreis

1a) $$\Pi_{ab} + \Pi_{bc} + \Pi_{ca} = 0.$$

Die drei an den drei Contactstellen dreier Metalle stattfindenden Peltierschen Effecte sind also nicht von einander unabhängig, vielmehr bestimmt sich einer aus den beiden andern. Nehmen wir zum Beispiel c als ein Standard-Metall und schreiben

a) $$P_a = J\Pi_{ac}, \quad P_b = J\Pi_{bc},$$

so haben wir

1b) $$J\Pi_{ab} = P_a - P_b.$$

P_a und P_b sind Functionen der an den Contactstellen herrschenden Temperatur und hängen von der Beschaffenheit der betreffenden Metalle a und b ab.

251. Weiter hat Magnus gezeigt, dass wenn ein Kreis von einem einzigen Metall gebildet wird, kein Strom in ihm entsteht, wie auch der Querschnitt und die Temperatur auf ihm von Ort zu Ort variiren mag.

Dieses Resultat ist aber von vornherein keineswegs selbstverständlich, denn hier haben wir, weil die Wärme fortgeleitet wird, wirklich einen Verbrauch fremder Energie vor uns. Es ist auch wol denkbar, dass, wenn ein solcher Kreis von einem Strom durchsetzt wird, die Grösse der electromotorischen zwischen zwei Stellen des Stromes wirkenden Kraft davon abhängt, ob der Strom von einer dickern zu einer dünnern Stelle oder umgekehrt von einer dünnern zu einer dickern passirt, und ob er langsam oder schnell von höher temperirten zu niedriger temperirten Stellen oder umgekehrt übergeht, und dann müsste auch in einem nur aus einem Metall gebildeten, aber an verschiedenen Stellen verschieden temperirten Kreis ein Strom entstehen und anhaltend fliessen.

Dasselbe Raisonnement, welches wir bei dem Peltierschen Phänomen angewendet haben, würde auch hier lehren, dass wenn in einem einmetalligen Kreis ein durch den Strom erzielter thermischer Effect sich umkehrt, wenn die Stromrichtung umgekehrt wird, dass dann auch ein Strom von höher temperirten zu niedriger temperirten oder umgekehrt von niedriger temperirten zu höher temperirten Stellen im Kreise fliessen muss.

Ist ferner die Wärmemenge, welche ein in dem einmetalligen Kreis von Orten, wo die Temperatur x ist, zu Orten, wo sie y ist, fliessender Strom entwickelt, gleich H, so muss die Gleichung

2) $$JH = RC^2t - S_{xy}Ct$$

Digitized by Google

gelten. S_{xy} würde dann die electromotorische Kraft angeben, welche den Strom in dem Kreise unterhält.

Nach den Untersuchungen von Magnus ist aber, wenn x, y, z die Temperaturen an drei Stellen des einmetalligen Kreises bezeichnen, entsprechend der Gleichung unter 1a)

3a) $$S_{yz} + S_{zx} + S_{xy} = 0,$$

und dieser Bedingung müssen die electromotorischen Kräfte in den drei Stellen eines homogenen Kreises gehorchen, wenn durch die Temperaturdifferenzen in dem Kreise kein Strom hervorgebracht werden soll.

Nehmen wir $z = 0$, und setzen

b) $$S_{xz} = Q_x, \quad S_{yz} = Q_y,$$

so wird

3b) $$S_{xy} = Q_x - Q_y.$$

Die Q sind Functionen der entsprechenden Temperaturen, deren Form von der Beschaffenheit des Metalls abhängt, welches den Kreis bildet.

Hat man einen Kreis von zwei Metallen a, b, der an der Stelle, wo der Strom von a nach b übergeht, die Temperatur x und da, wo der Strom von b nach a geht, die Temperatur y besitzt, so ist also die electromotorische Kraft

4a) $$F = P_{ax} - P_{bx} + Q_{bx} - Q_{by} + P_{by} - P_{ay} + Q_{ay} - Q_{ax},$$

wo P_{ax} der Wert der Art. 250 definirten Grösse P für den Körper a bei der Temperatur x ist, und die Q den eben benutzten Q entsprechen.

In anderer Schreibeweise hat man

4b) $$F = (P_{ax} - Q_{ax}) - (P_{ay} - Q_{ay}) - (P_{bx} - Q_{bx}) + (P_{by} - Q_{by}).$$

Es existiren nun in der Tat in Kreisen, die aus verschiedenen Metallen zusammengesetzt und an verschiedenen Stellen verschieden temperirt sind, Ströme, die man als thermoelectrische Ströme bezeichnet. Die P werden also im allgemeinen von den Q für dasselbe Metall und bei derselben Temperatur verschieden sein.

252. Die Existenz der electromotorischen Kräfte Q ist zuerst von W. Thomson in der schon citirten Abhandlung als eine Folge der von Cumming*) entdeckten thermoelectrischen Umkehrung nachgewiesen worden. Die bezeichnete Erscheinung ist die, dass die Reihenfolge gewisser Metalle in der thermoelectrischen Spannungsreihe eine andere ist für niedere als für hohe Temperaturen, so dass zwei Metalle bei gewissen Temperaturen sich ganz neutral gegeneinander verhalten können. Hält man zum Beispiel in einem Kreise, der von Kupfer und Eisen gebildet ist, eine Lötstelle auf

*) *Cambridge Trans.* 1823.

Digitized by Google

Zimmertemperatur und erwärmt die andere, so setzt sich ein Strom, der durch die heisse Lötstelle vom Kupfer zum Eisen geht, in Bewegung. Je weiter man die Lötstelle erhitzt, um so stärker wird die electromotorische Kraft des Stromes, bis diese Lötstelle eine Temperatur T erreicht, welche nach Thomsons Bestimmungen etwa 284° C. beträgt. Setzt man die Erwärmung der Lötstelle noch weiter fort, so nimmt die electromotorische Kraft des Stromes wieder stetig ab, wird Null und geht ins Entgegengesetzte über. Der Strom kehrt dann bei genügend hoher Erhitzung der Lötstelle seine Richtung um und fliesst durch die heisse Lötstelle vom Eisen zum Kupfer. Rascher erreicht man die Umkehrung des Stromes, wenn man auch die andere Lötstelle erwärmt. Befindet sich die Temperatur beider Lötstellen über T, so geht schon der Strom durch die wärmere Stelle vom Eisen zum Kupfer, also umgekehrt, wie wenn beide Lötstellen unter T temperirt sind.

Ist also eine der Lötstellen auf der neutralen Temperatur T und die andere wärmer oder kälter, so geht der Strom durch jene in Richtung vom Kupfer zum Eisen.

253. Aus dieser Tatsache zieht Thomson die folgenden Schlüsse.

Sei die zweite Lötstelle auf einer niedrigeren Temperatur als T. Man kann den Strom, der dann durch den Kreis geht, benutzen, um eine Maschine zu treiben oder um Wärme in einem Draht zu entwickeln. Die Energie, die dabei verbraucht wird, muss durch die Umwandlung von Wärme in electrische Energie ersetzt werden, und daraus folgt, dass irgendwo im Kreise Wärme verschwinden wird. Bei der Temperatur T verhalten sich die Metalle Kupfer und Eisen neutral gegen einander. Von da ab nimmt die electromotorische Kraft des Thermostromes mit wachsender Temperatur der heissen Lötstelle nicht mehr zu, sondern ab. Unterhalb T sucht also der Peltiersche Effect die Temperatur der heissen Lötstelle zu verringern, oberhalb T dagegen sie zu vermehren. Demnach geht bei der Temperatur T an der heissen Lötstelle kein umkehrbarer Process vor sich, an der kalten Stelle findet dagegen nach dem Peltierschen Phänomen eine Entwickelung von Wärme statt. Daraus folgt, dass Wärme allein in den Kupfer- oder Eisenteilen des Kreises verschwinden kann.

Geht also ein Strom im Eisen von der warmen zur kalten Lötstelle und im Kupfer von der kalten zur warmen, so muss eine Abkühlung entweder im Eisen oder im Kupfer oder in beiden Teilen des Kreises stattfinden. Der Sitz der thermoelectrischen Phänomene kann sich also nicht lediglich an der Berührungsstelle der Metalle befinden, sondern muss auch in den Metallen selbst gesucht werden, das heisst die Kräfte Q müssen eine reelle Existenz haben. Durch eine Reihe ingeniöser Experimente glückte es nun Thomson in der Tat, die reversible thermische Wirkung des Stromes beim Durchgang durch verschieden temperirte Teile eines Metalls zu ent-

Digitized by Google

decken und es ergab sich dabei*), dass die Wirkungen des Stromes in Kupfer den in Eisen auftretenden entgegengesetzt waren.

Daraus lässt sich der interessante Schluss ziehen, dass die Electricitäten nicht aus materiellen Teilchen im gewöhnlichen Sinne bestehen können.

Wenn nämlich ein Strom materieller Flüssigkeit durch eine Röhre von warmen zu kalten Stellen fliesst, so erhitzt er die Röhre, und wenn er von kalten zu warmen Stellen übergeht, kühlt er sie ab. Der Grad der Erwärmung hängt wie der der Abkühlung von der specifischen Wärmecapacität der Flüssigkeit ab.

Dasselbe müsste bei einem Strom von Electricität stattfinden, wenn die Electricität, positiv oder negativ, eine materielle Flüssigkeit wäre, und man könnte aus den Einwirkungen des Stromes auf einen ungleichmässig erwärmten Körper die specifische Wärme der Electricität bestimmen. Thomsons Experimente zeigen aber, dass im Kupfer nur die positive und im Eisen nur die negative Electricität den Uebergang von Wärme von warmen zu kalten Stellen vermittelt. Die Erscheinungen im Eisen widersprechen also der Annahme einer materiellen Beschaffenheit für die positive und die im Kupfer einer solchen für die negative Electricität, und man darf weder die positive noch die negative Electricität als eine materielle Flüssigkeit ansehen, welche selbst erhitzt und abgekühlt werden könnte und welche fähig wäre, andern Körpern Wärme mitzuteilen.

Diese Voraussagung des reversiblen Effects eines Stromes auf einen ungleichmässig erwärmten Conductor bildet ein instructives Beispiel für die Anwendbarkeit des ersten Hauptsatzes der mechanischen Wärmetheorie, des Princips der Erhaltung der Energie, um der Wissenschaft neue Felder für ihre Untersuchungen zu eröffnen.

Thomson hat auch den zweiten Satz der mechanischen Wärme benutzt, um zwischen den Grössen P und Q Beziehungen aufzustellen. Ferner hat er auch die thermoelectrischen Eigenschaften von Körpern untersucht, die in verschiedenen Richtungen verschiedene Structur besitzen, und weiter die Bedingungen verfolgt, unter denen ein Metall durch Druck, Magnetisirung und andere Einwirkungen thermoelectrische Eigenschaften erhält.

254. Neuerdings hat Tait die electromotorische Kraft thermoelectrischer Kreise von verschiedenen Metallen, deren Lötstellen auf verschiedenen Temperaturen erhalten wurden, untersucht und sie als genügend genau durch die Formel

$$E = a\,(t_1 - t_2)\,[t_0 - \tfrac{1}{2}\,(t_1 + t_2)]$$

darstellbar gefunden.**) t_1 ist die absolute Temperatur der erhitzten, t_2 die der kalten Lötstelle, t_0 die neutrale Temperatur. Der Factor a hängt von der Natur der beiden den Kreis bildenden Metalle ab. Das obige Gesetz

*) *On the Electrodynamic Qualities of Metals*, *Phil. Trans.* 1856. S. auch Clausius, *Mechanische Wärmetheorie*, Bd. II. pag. 334 ff.

**) *Proc. R. S. Edin.* Session 1870—71, pag. 308, und 1871, Dec. 18.; Avenarius, *Pogg. Ann.* 119, 122.

Digitized by Google

ist sowohl von Tait als von seinen Schülern in weiten Temperaturgrenzen geprüft worden, und Tait hofft die thermoelectrische Säule zu einem wirklichen Temperaturmessungsinstrument für Untersuchungen über Wärmeleitung und für die Fälle, wo das Quecksilberthermometer wegen der zu beschränkten Ausdehnung seiner Scala nicht mehr gut anwendbar ist, machen zu können.

Nach Taits Theorie würde die von Thomson als specifische Wärme der Electricität bezeichnete Grösse für jedes reine Metall proportional seiner absoluten Temperatur sein, wenngleich sie von Metall zu Metall ihren Wert und auch ihr Zeichen ändern kann. Daraus zieht dann Tait nach thermodynamischen Principien unter Anwendung der Bezeichnungen $k_a t$, $k_b t$, $k_c t$ für die specifischen Wärmen der Electricität in drei Metallen a, b, c und von T_{bc}, T_{ca}, T_{ab} für die absoluten neutralen Temperaturen an den drei Lötstellen je zweier der drei Metalle die Beziehungen

$$\alpha) \qquad (k_b - k_c)\, T_{bc} + (k_c - k_a)\, T_{ca} + (k_a - k_b)\, T_{ab} = 0;$$

$$\beta) \qquad \begin{aligned} J\Pi_{ab} &= (k_a - k_b)\,(T_{ab} - t)\,t, \\ J\Pi_{bc} &= (k_b - k_c)\,(T_{bc} - t)\,t, \\ J\Pi_{ca} &= (k_c - k_a)\,(T_{ca} - t)\,t; \end{aligned}$$

$$\gamma) \qquad \begin{aligned} E_{ab} &= (k_a - k_b)\,(t_1 - t_2)\,[T_{ab} - \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2)], \\ E_{bc} &= (k_b - k_c)\,(t_2 - t_3)\,[T_{bc} - \tfrac{1}{2}(t_2 + t_3)], \\ E_{ca} &= (k_c - k_a)\,(t_3 - t_1)\,[T_{ca} - \tfrac{1}{2}(t_3 + t_1)] \end{aligned}$$

für die neutralen Temperaturen, die Peltierschen Effecte und die thermoelectromotorischen Kräfte.

Digitized by Google

Cap. IV.

Electrolyse.

Electrolytische Leitung.

255. Ich habe bereits in der kurzen Zusammenfassung der Eigenschaften eines electrischen Stromes bemerkt, dass der Durchgang eines Stromes durch gewisse zusammengesetzte Stoffe, die man als Electrolyte bezeichnet, von einem eigentümlichen Process begleitet wird, den wir Electrolyse genannt haben. Die Substanz wird in zwei Componenten, Ionen, zerlegt, von denen die eine, die electronegative, das Anion, an der Anode, da wo der Strom in das Electrolyt eintritt, erscheint, während die andere, die electropositive, das Kation, sich an der Kathode, wo der Strom das Electrolyt wieder verlässt, ansammelt.

Die genaue Untersuchung aller Vorgänge bei der Electrolyse gehört eigentlich mehr in das Gebiet der Chemie als in das der Physik, daher werde ich sie auch nur so weit führen, als sie uns vom Standpunkte der Electricitätslehre interessirt, und mich auf keine Discussion der Schlüsse, zu denen sie hinsichtlich der Constitution chemischer Verbindungen Veranlassung giebt, einlassen.

Die charakteristische Erscheinung der Electrolyse besteht in der Verbindung von Strömungen materieller Teilchen mit Strömungen von Electricität, und darum dürfte sie von allen electrischen Phänomenen am meisten geeignet sein, uns einen Einblick in die Natur der Electricität zu verschaffen.

In der Tat ist auch die Theorie der Electrolyse auf das engste mit der der Electricität verbunden, und sie ist deshalb noch so wenig befriedigend, weil wir noch keine rechte Idee davon haben, was eigentlich die Electricität ist.

Das fundamentale Gesetz der Electrolyse, welches von Faraday aufgestellt und von Beetz, Hittorf und andern bis jetzt als correct befunden worden ist, lässt sich so aussprechen:

Digitized by Google

Die Zahl der electrochemischen Aequivalente eines Electrolyts, welche von einem Strome während einer gegebenen Zeit zerlegt werden, ist gleich der Zahl von Einheiten von Electricität, die der Strom in derselben Zeit durch einen Querschnitt des Electrolyts hindurchführt.

Das *electrochemische Aequivalent* eines Electrolyts ist diejenige Menge desselben, welche von einer Stromeinheit in der Zeiteinheit zersetzt wird.

Misst man demnach die Electricitätseinheit in absolutem Maass, so kann man die electrochemischen Aequivalente in Grammen ausdrücken.

Die electrochemischen Aequivalente verschiedener Substanzen sind proportional den entsprechenden gewöhnlichen chemischen Aequivalenten. Diese sind aber weiter nichts als Verhältniszahlen, welche angeben, in welchen Verhältnissen Substanzen sich miteinander verbinden, während jene ganz bestimmte Quantitäten von Materie anzeigen, welche von der jeweiligen Einheit, die man der Messung von Electricitätsmengen zu Grunde legt, abhängen.

Jedes Electrolyt besteht aus zwei Componenten, welche, so lange der dasselbe durchsetzende Strom andauert, sich an den Electroden abscheiden, sonst aber nirgend weiter auftreten. Denken wir uns also eine Fläche ganz innerhalb des Electrolyts beschrieben, so ist der Betrag an Electrolyse durch diese Fläche, gemessen durch die Zahl der electrochemischen Aequivalente der durch die Fläche nach entgegengesetzten Richtungen gehenden Componenten, gleich der gesammten durch die Fläche hindurchgeflossenen Electricitätsmenge.

Der wirkliche Transport der Ionen durch das Electrolyt nach entgegengesetzten Richtungen bildet also einen integrirenden Bestandteil des Phänomens der Leitung von Electricität durch Electrolyte. An jeder Stelle eines Electrolyts, wo ein electrischer Strom durchgeht, finden gleichzeitig zwei entgegengesetzt gerichtete Bewegungen des Anion und des Kation statt, welche in Richtung der Stromlinien des Stromes vor sich gehen und in ihrer Intensität proportional der Stärke des electrischen Stromes wachsen. Man wird daher unwillkürlich zu der Annahme gedrängt, dass die Ströme von Ionen Convectionsströme für die Electricität bilden, und speciell, dass alle Molekel aller Kationen mit einer und derselben unveränderlichen Menge positiver Electricität geladen sind, und dass ebenso alle Molekel aller Anionen dieselbe unveränderliche Menge negativer Electricität enthalten.

Die in Electrolyten stattfindenden entgegengesetzt gerichteten Bewegungen der beiden Ionen würden dann eine vollständige physikalische Repräsentation des electrischen Stromes bilden. Man kann auch diese Bewegung der Ionen mit der Bewegung von Gasen oder Flüssigkeiten während ihrer Diffusion durcheinander vergleichen, nur dass hier die verschiedenen Substanzen sich lediglich mit einander mischen und so eine nicht homogene Masse bilden, während bei der Electrolyse die Substanzen, die Ionen, im Electrolyt sich chemisch mit einander nach ihrer Trennung wieder verbinden, das Electrolyt also stets homogen bleibt. Bei der Diffusion be-

Digitized by Google

steht die Ursache der nach einer bestimmten Richtung vor sich gehenden Bewegung einer Substanz in der in dieser Richtung stattfindenden Verringerung der in einer Volumeinheit vorhandenen Menge der Substanz, bei der Electrolyse bildet die electromotorische Kraft in ihrer Wirkung auf die geladenen Molekel jedes der Ionen das treibende Moment.

Theorie der Electrolyse.

256. Clausius*), der sich vielfach mit der molecularen Constitution der Körper beschäftigt hat, nimmt an, dass in allen Körpern die Molekel in fortdauernder Bewegung begriffen sind. In den festen Körpern sollen die Molekel sich um bestimmte Gleichgewichtslagen herumbewegen, während in den Flüssigkeiten die Molekel sich beliebig in frühere Lagen zurückbegeben, oder noch weiter von ihnen sich zu entfernen vermögen. Wenn also auch eine Flüssigkeit scheinbar in Ruhe verharrt, so sollen doch ihre Molekel drehend und wälzend und aneinander stossend sich fortwährend von Ort zu Ort begeben und von einem Teile derselben zu andern beliebig übergehen. Zugleich nimmt Clausius noch an, dass in zusammengesetzten Flüssigkeiten, deren Molekel selbst Aggregate von Molekeln bilden, bei dem Aufeinanderstossen der Molekel die Componenten derselben sich von einander trennen und mit andern frei gewordenen Componenten wieder zu Molekeln vereinigen können, so dass die zusammengesetzte Flüssigkeit eigentlich fortwährend aus ihren Bestandteilen sich zusammensetzt und in ihre Bestandteile sich zerlegt. Derartig sollen die molecularen Bewegungen in den Flüssigkeiten zu jeder Zeit sein, so lange sie nicht von andern Kräften angegriffen werden. Wirkt aber auf eine Flüssigkeit eine electromotorische Kraft, so werden die Bewegungsrichtungen der Molekel, die früher nach allen Richtungen gleichmässig verteilt waren, beeinflusst, ein positiv geladenes Molekel zeigt dann mehr Neigung, sich nach der Kathode hin zu bewegen als nach der Anode, während ein negativ electrisirtes mehr dieser als jener zustrebt. Unter der Voraussetzung, dass das Kation positiv, das Anion negativ geladen ist, wird also ersteres, wenn es durch einen Zusammenstoss mit andern Molekeln aus seiner Verbindung mit dem Anion gelöst ist, sich nach dem Kation hin zu begeben suchen, da ihm aber in ähnlicher Weise befreite Anionmolekel, mit deren einem es sich zu einem Molekel der Flüssigkeit wieder zusammensetzt, entgegenkommen, so wird es bald in seiner Bahn aufgehalten. An der Kathode findet das Kation kein Anionmolekel mehr vor, dort kann also eine Verbindung zu einem Molekel des Electrolyts nicht mehr vor sich gehen, und darum bleibt das Kation frei. Dasselbe geschieht an der Anode mit dem Anion. Innerhalb des Electrolyts ändert sich also die Flüssigkeit nicht, an den Electroden treten aber ihre Ionen auf.

*) Pogg. Ann. Bd. 101, S. 338 (1857).

Digitized by Google

257. Diese von Clausius begründete Theorie erklärt auch, weshalb ein Electrolyt den Strom unter allen Umständen genau nach dem Ohmschen Gesetz fortleitet, so dass selbst der schwächsten electromotorischen Kraft ein Strom von ihrer Grössenordnung entspricht, während doch die Zerlegung des Electrolyts erst dann beginnt, wenn der Strom eine gewisse Stärke erreicht hat.

Nach jener Theorie geht nämlich die Zerlegung und Wiederbildung des Electrolyts fortwährend, auch ohne dass Ströme vorhanden sind, vor sich, und die geringste electromotorische Kraft ist dann im Stande, dem Processe einen gewissen Grad von Richtung zu erteilen. Es treten dann Ströme von Ionen und mit ihnen, als integrirender Teil der Gesammterscheinung, solche von Electricität auf. Bei schwachen Strömen können aber die Ionen nicht so vollständig von einander befreit werden, dass sie an den Electroden auch frei zu bleiben vermögen.

Zur Hervorbringung einer vollständigen Trennung der einzelnen Ionen von einander ist eine endliche electromotorische Kraft nötig, und da der ihr entgegenwirkende Widerstand von der electrischen Attraction der beiden entgegengesetzt geladenen Ionen herrührt, so wird durch die Trennung des Kation vom Anion eine der electromotorischen Kraft des Stromes entgegenwirkende electromotorische Kraft wachgerufen, die auch einen diesem Strom entgegen gerichteten sogenannten *Polarisationsstrom* hervorbringt. Ist dieser aus der Anhäufung der Ionen an den bezüglichen Electroden herrührende entgegen gerichtete Strom stark genug geworden, dass er beobachtet werden kann, so nennt man die Electroden *Polarisirt.*

258. Der Polarisationsstrom bietet eines der besten Mittel zur Entscheidung, ob ein Körper zur Classe der Electrolyte gehört oder nicht. Man schaltet den Körper, indem man Platinstreifen als Electroden benutzt, einige Zeit in einen Stromkreis ein und verbindet ihn unmittelbar nach seiner Ausschaltung aus dem Kreise mit einem Galvanometer. Zeigt das Galvanometer einen dem ersten Strom entgegengerichteten Strom an, so hat man den Beweis, dass jener Strom die Substanz electrolytisch zersetzt und ihre Ionen an den bezüglichen Electroden aufgehäuft hat.

Diese Methode reicht, wie in Art. 271 noch näher erläutert wird, selbst da aus, wo man durch chemische Untersuchungen nur schwer die Anwesenheit der Ionen an den Electroden nachweisen könnte.

259. Somit scheint die Theorie der Electrolyse genügend von allen Vorgängen Rechenschaft zu geben. Sie verschafft uns eine Anschauung von dem Process, den wir unter „electrischer Strom“ verstehen, dessen Natur uns sonst unbekannt bliebe, indem sie ihn durch die Bewegung der materiellen Componenten erklärt, die zwar an sich für das Auge unsichtbar bleibt, die aber doch leicht demonstrirt werden kann. Sie erklärt ferner, wie Faraday gezeigt hat (und wie auch unmittelbar aus der Clausiusschen Theorie der Constitution der Körper folgt), weshalb ein Electrolyt,

Digitized by Google

welches im flüssigen Zustand die Electricität leitet, im festen ein Nichtleiter ist, denn soll ein Electrolyt zu leiten vermögen, so müssen seine Molekel sich von einem Ort zu einem andern begeben können, und dazu muss der Körper eben flüssig sein, sich also in einem geschmolzenen oder gelösten Zustande befinden.

Geht man aber weiter und nimmt zur Vervollständigung dieser Theorie noch an, dass die Ionen der Molekel in dem Electrolyt tatsächlich mit bestimmten positiven bezüglich negativen Electricitäten geladen sind, so dass die Leitung durch ein Electrolyt lediglich in einer Convection der Electricität bestehen würde, so stösst man auf bedeutende Unzuträglichkeiten.

Zunächst muss man annehmen, dass jedes Kationmolekel, so wie es vom Anion an der Kathode befreit ist, dieser Kathode eine gewisse positive Ladung mitteilt, die nicht blos für die Kationmolekel derselben Substanz, sondern überhaupt für alle Kationen von einer und derselben Grösse ist. Ebenso teilt jedes Anionmolekel jeder Substanz, wenn es an der Anode befreit wird, dieser eine und dieselbe negative der positiven Ladung, die das Kation der Kathode abgiebt, numerisch gleiche Electricitätsmenge mit.

Die Ladung aller Molekel, die ein electrochemisches Aequivalent des betreffenden Ions bilden, ist dann gleich einer positiven bezüglich negativen Electricitätseinheit.

260. Man weiss noch nicht, wie viel Molekel ein electrochemisches Aequivalent zusammensetzen, die Moleculartheorie der Chemie, die auch durch viele physikalische Betrachtungen gestützt wird, setzt aber voraus, dass die Anzahl von Molekeln in einem electrochemischen Aequivalent für alle Substanzen dieselbe ist, und wir können von dieser Voraussetzung Gebrauch machen.

Ist also N die Anzahl aller in einem electrochemischen Aequivalent enthaltenen Molekel — eine Grösse, die für alle Substanzen denselben bisher noch unbekannten Wert hat —, so teilt jedes befreite Kationmolekel der Kathode eine Ladung von der Grösse $+ 1/N$ und jedes befreite Anion der Anode eine Ladung von der Grösse $- 1/N$ mit. Ich bezeichne diese Electricitätsmenge $1/N$, die, wenn sie bekannt wäre, wol die naturgemässeste Einheit für die Electricität abgeben würde, als die *Moleculare Ladung.*

Diese bestimmten Angaben über die Electrisirung der Molekel und über ihre Entladung dienen zunächst nur, um unsere Ansichten von den betreffenden Vorgängen näher zu präcisiren. Wenn die Ionen verbunden sind, so besitzen sie die eben festgestellten Ladungen. Ihre Befreiung von einander findet gleichzeitig mit dem Abgange positiver Electricität aus der Anode und dem Eingange positiver Electricität in die Kathode statt. Wenn die Ionen schon frei sind, besitzen sie keine Electricitäten.

Allein so leicht es ist, von einer molecularen Ladung zu sprechen, so schwer ist es, die Existenz einer solchen zu begreifen.

Digitized by Google

Man weiss, dass wenn zwei Metalle in einem Punkte zum Contact gebracht werden, dass dann der Rest ihrer Oberflächen electrisirt wird, und diese Electrisirung kann sehr beträchtlich werden, wenn die Metalle aus zwei Platten bestehen, die durch eine sehr dünne Luftschicht von einander getrennt sind. An etwas Aehnliches könnte man denken, wenn die Ionen eines Molekels eines Electrolyts mit einander verbunden sind. Man könnte annehmen, dass in jedem Paar von Ionen die Componenten sich in einem Punkte berühren, so dass der Rest ihrer Oberflächen durch die beim Contact auftretende electromotorische Kraft geladen wird.

Um aber die Erscheinung ganz zu entwickeln, müsste man auch sagen können, weshalb die so in jedem Molekel entstehende Ladung einen ganz festen, von der Natur des Molekels unabhängigen Betrag hat, weshalb die moleculare Ladung eines Chlormolekels in seiner Verbindung mit einem Zinkmolekel genau so gross ist, wie wenn das Chlormolekel mit einem Kupfermolekel verbunden ist, während doch die electromotorische Kraft zwischen Chlor und Zink viel grösser ist, als die zwischen Chlor und Kupfer. Wenn ferner die Ladung der Molekel durch die beim Contact der Ionen auftretende electromotorische Kraft entsteht, weshalb bringen dann electromotorische Kräfte verschiedener Intensität Ladungen von genau gleicher Grösse hervor.

Wir wollen aber annehmen, dass wir schon über alle diese Schwierigkeiten hinweg sind, indem wir uns einfach mit der Tatsache begnügen, dass die Ladung der Einzelmolekel eine ein für alle mal gleiche, weder mit der Zeit noch mit der Substanz veränderliche Grösse besitzt. Ich nenne der Bequemlichkeit wegen diese Ladung ein *Electricitätsmolekel*. So grobsinnlich dieser Ausdruck ist und so wenig er sich auch mit dem Geiste dieses Werkes verträgt, so soll er uns doch schliesslich dazu verhelfen, klar auszusprechen, was wir bis jetzt von den Vorgängen bei der Electrolyse wissen, und welche Schwierigkeiten noch zu überwinden sind.

Jedes Electrolyt muss als eine binäre Verbindung seines Kations mit seinem Anion betrachtet werden. Dabei können Anion wie Kation selbst noch zusammengesetzte Körper sein, die aus Aggregaten von Molekeln einfacherer Körper bestehen. Die Verbindung eines Kationmolekels mit einem Anionmolekel bildet ein Molekel des Electrolyts.

Damit ein Molekel in einem Electrolyt als ein Anion auftreten kann, muss es mit einem negativen Electricitätsmolekel, und damit es als ein Kation auftreten kann, mit einem positiven Electricitätsmolekel verbunden sein. Doch sind diese Electricitätsmolekel nur dann mit dem Anion- bezüglich Kationmolekel verbunden, wenn diese selbst zu einem Molekel des Electrolyts combinirt sind.

Sind die Molekel electrolysirt, so begeben sie sich mit ihren Electricitätsmolekeln zu den betreffenden Electroden und erscheinen dort, wenn sie selbständig auftreten, als unelectrische Körper.

Digitized by Google

Kann ein Molekel in einem Electrolyt die Rolle eines Anions, in einem andern die eines Kations spielen, oder kann es in zusammengesetzte Körper eingehen, die überhaupt keine Electrolyte sind, so muss man schon voraussetzen, dass es, je nachdem es als Anion oder Kation auftritt, eine negative oder positive Ladung erhält, und dass es in ein Nichtelectrolyt ganz electricitätsfrei eingeht. So ist Jod in den Jodiden der Metalle und in der Jodwasserstoffsäure ein Anion, dagegen soll es im Bromjod die Rolle des Kation spielen.

Es ist sehr wenig wahrscheinlich, dass diese eben dargestellte Theorie der molecularen Ladungen in irgend einer Form wird beibehalten werden können, wenn wir erst zu einer wirklichen Einsicht in die Natur der Electrolyse gelangt sein werden. Denn wenn wir erst soweit sind, werden wir auch eine sichere Basis für eine Theorie der electrischen Ströme gewonnen und so alle solche provisorischen Theorieen nicht mehr nötig haben.

Man kann aber diese Theorie von den molecularen Ladungen wenigstens dazu benutzen, um dem Gedächtnis viele Tatsachen aus der Lehre von der Electrolyse einzuprägen.

Secundäre Vorgänge bei der Electrolyse.

261. Ein beträchtliches Stück weiter in die Erkenntnis der Electrolyse hat uns die Entdeckung und Erforschung der bei der Entwicklung der Ionen an den Electroden stattfindenden secundären chemischen Vorgänge gebracht.

Manchmal sind nämlich die Substanzen, die man an den Electroden vorfindet, nicht die Ionen der Electrolyse, sondern Producte dieser in ihrer chemischen Einwirkung auf das Electrolyt.

Lässt man zum Beispiel einen Strom durch eine Lösung von Natriumsulfat ($Na_2 SO_4$) und zugleich durch verdünnte Schwefelsäure fliessen, so entstehen an den Electroden, die in das Natriumsulfat tauchen, genau dieselben Substanzen und auch in genau denselben Quantitäten wie an den Electroden, die den Strom durch die verdünnte Schwefelsäure leiten, nämlich an der Anode Sauerstoff und an der Kathode Wasserstoff. Lässt man aber die Electrolyse des Natriumsulfats in einem Gefässe vor sich gehen, welches die Substanz an jeder Electrode für sich allein zu untersuchen gestattet — dazu eignet sich eine U-Röhre oder eine von einer porösen Wand durchsetzte Schale —, so findet man an der Anode sowohl ein Aequivalent Sauerstoff als ein Aequivalent Schwefeltrioxyd und an der Kathode ein Aequivalent Natriumoxyd und zwei Aequivalente Wasserstoff. Man könnte nun auf den ersten Blick nach der alten Theorie von der Constitution der Salze annehmen, dass der Strom einmal das Natriumsulfat in seine beiden Bestandteile $Na_2 O$ und SO_3 zerlegt und dann noch die Lösungsflüssigkeit, Wasser, in Sauerstoff und Wasserstoff electrolysirt hat. Damit würde man aber zugeben, dass

Digitized by Google

derselbe Strom, der in der verdünnten Schwefelsäure nur ein Aequivalent Wasser zersetzt, in der Lösung des Natriumsulfats nicht blos ein Aequivalent Wasser, sondern auch noch ein Aequivalent vom Natriumsulfat electrolysirt, und das widerspricht dem Gesetz der electrochemischen Aequivalente.

Setzt man aber voraus, dass das Natriumsulfat nicht gleich $SO_3 + Na_2O$, sondern gleich $SO_4 + Na_2$ ist, so geht das SO_4 nach der Anode und wird dort frei, da es aber im freien Zustande nicht existiren kann, so zerfällt es in Schwefeltrioxid SO_3 und Sauerstoff O. Gleichzeitig begiebt sich das Natrium nach der Kathode und zerlegt daselbst das Wasser der Lösung. Dadurch entstehen ein Aequivalent Natriumoxyd Na_2O und zwei Aequivalente Wasserstoff.

Bei der verdünnten Schwefelsäure sind die an den Electroden sich ansammelnden Ionen die Componenten des Wassers, also ein Volumen Sauerstoff und zwei Volumina Wasserstoff. Ausserdem nimmt noch die Schwefelsäure an der Anode zu, aber nicht nach dem Gesetz der electrolytischen Aequivalente.

Man weiss bis jetzt noch nicht sicher, ob reines Wasser ein Electrolyt ist oder nicht. Seine Leitungsfähigkeit wird durch die geringsten Spuren einer fremden Beimischung beträchtlich erhöht, und deshalb weichen auch die von den einzelnen Beobachtern für die Leitungsfähigkeit des Wassers gefundenen Zahlenwerte so sehr von einander ab, dass man sie bis jetzt noch nicht als wirklich bestimmt ansehen darf.

Je reiner das Wasser ist, einen desto grössern Widerstand setzt es der electrolytischen Leitung entgegen. Man wird also noch unentschieden lassen, ob es im ganz reinen Zustande überhaupt die Electricität zu leiten vermag. So lange man es als ein Electrolyt ansah und sogar als typisches Beispiel für die Electrolyse benutzte, hatte man sicher Grund, es als eine binäre Verbindung zu betrachten. Darnach müssen zwei Volumina Wasserstoff einem Volumen Sauerstoff äquivalent sein.

Darf man aber aus den mitgeteilten Tatsachen schliessen, dass es kein Electrolyt ist, so hindert uns nichts anzunehmen, dass gleiche Volumina Sauerstoff und Wasserstoff einander chemisch äquivalent sind.

Die dynamische Gastheorie führt uns zu der Annahme, dass gleiche Volumina verschiedener Gase eine gleiche Anzahl von Molekeln enthalten und dass weiter der Hauptteil der specifischen Wärme, nämlich der von der Bewegung der Molekel gegen einander abhängige, bei allen Gasen für dieselbe Anzahl von Molekeln auch denselben Wert hat. Darnach würden wir die Theorie vorzuziehen haben, in welcher gleiche Volumina von Wasserstoff und Sauerstoff als äquivalent angesehen werden, wo also Wasser als Verbindung von zwei Aequivalenten Wasserstoff mit einem Aequivalent Sauerstoff betrachtet wird. Wasser ist also wahrscheinlich kein Electrolyt.

Während die Electrolyse eine enge Beziehung zwischen electrischen Phänomenen und chemischer Verbindung herstellt, zeigt die Tatsache, dass

Digitized by Google

nicht alle chemischen Verbindungen auch Electrolyte sind, dass die chemische Verbindung einen complicirtern Process darstellt, als irgend ein electrisches Phänomen. So wird die Verbindung zweier Metalle, selbst wenn beide gute Leiter sind, und selbst wenn sie in der Spannungsreihe für Contactelectricität genügend weit auseinanderliegen, von einem Strom auch dann nicht zerlegt, wenn sie geschmolzen ist.

Die meisten Verbindungen von Substanzen, die in andere Substanzen als Anionen eingehen, sind Nichtleiter, also auch keine Electrolyte. Ferner giebt es auch eine Anzahl von Verbindungen, welche aus denselben Stoffen, wenn auch nicht in äquivalenten Verhältnissen wie Electrolyte zusammengesetzt sind, und die doch nicht zu den Electrolyten gehören.

Erhaltung der Energie in electrolytischen Processen.

262. Geht ein Strom durch einen Voltaschen Kreis, der teils aus einer Batterie, teils aus einem Draht und teils aus einer electrolytischen Zelle besteht, so wird während eine Electricitätseinheit einen Querschnitt desselben passirt, ein electrochemisches Aequivalent von jeder der Substanzen in den Elementen der Batterie sowohl als in der electrolytischen Zelle electrolysirt.

Die mechanische Energie, die dabei ins Spiel kommt, lässt sich wie sonst bei irgend einem chemischen Process dadurch bestimmen, dass man sie gänzlich in Wärme umwandelt, diese nach bekannten Methoden misst und durch Multiplication mit dem mechanischen Wärmeäquivalent auf mechanische Energie reducirt.

Wo eine solche directe Bestimmung nicht gut durchführbar ist, da führt man die Substanzen vor dem chemischen Process und nachdem derselbe sich abgespielt hat, zu einem und demselben Endzustande und misst die in beiden Fällen entwickelten Wärmemengen. Die Differenz der beiden Wärmemengen ist dann das thermische Aequivalent des chemischen Processes, dem die Substanzen unterworfen worden sind.

Unterhält ein chemischer Process einen Voltaschen Strom, so ist die in den Zellen der Batterie entwickelte Wärmemenge, wie Joule gefunden hat, kleiner als sie den innerhalb derselben vor sich gehenden chemischen Processen zukommt, die fehlende Wärmemenge findet sich aber in dem Verbindungsdraht der Batterie oder in der mechanischen Arbeit, die der Strom leistet, wenn in seinem Kreise eine Maschine eingeschaltet ist.

Verbindet man also beispielsweise die Electroden einer Batterie erst durch einen kurzen dicken und dann durch einen langen dünnen Draht, so ist die in einer Zelle während der Auflösung eines Gramms Zink entwickelte Wärmemenge im ersten Falle um einen gewissen Betrag grösser als im zweiten, dagegen ist die in dem Draht entwickelte Wärme im ersten Falle um denselben Betrag kleiner als im zweiten. Die gesammte während der

Digitized by Google

Auflösung eines Gramms Zink im ganzen Kreis entwickelte Wärmemenge hat aber in beiden Fällen dieselbe Grösse. Joule hat diese Consequenz des Princips von der Erhaltung der Energie durch directe Messungen bestätigt gefunden.

Die in einer Zelle entwickelte Wärmemenge steht zu der im Verbindungsdraht entwickelten in dem Verhältnis des Widerstandes, den die Zelle dem Strom entgegensetzt, zu dem Widerstande des Drahtes. Macht man also einmal den Draht möglicht resistent gegen den Durchgang des Stromes und ein anderes Mal möglichst nachgiebig gegen denselben, so findet man fast die ganze entwickelte Wärmemenge das erste Mal im Drahte, das zweite Mal in der Batterie des Stromkreises. Setzt der Draht dem Strom den grossen Widerstand entgegen, so ist die in ihm in bestimmter Zeit entwickelte Wärmemenge gleich dem Product aus der durch ihn in dieser Zeit hindurchgegangenen Electricitätsmenge in die electromotorische Kraft, die den Durchgang bewerkstelligt.

263. Nach frühern Definitionen geht nun in derselben Zeit, in welcher in einer Zelle ein electrochemisches Aequivalent der dort enthaltenen Substanz sich einem chemischen Process unterzieht, eine Electricitätseinheit durch den Draht. Daher wird die beim Durchgang einer Electricitätseinheit entwickelte Wärmemenge durch die electromotorische Kraft gemessen. Andererseits ist diese Wärmemenge aber auch ebenso gross wie die vom electrochemischen Aequivalent der Substanz sei es in der Zelle oder im Draht während des betreffenden chemischen Processes entwickelte Wärmemenge. Daraus fliesst dann der folgende von Thomson zuerst*) bewiesene Satz:

Die electromotorische Kraft eines electrochemischen Apparates ist in absolutem Maasse gleich dem mechanischen Aequivalent der chemischen Action, welcher ein electrochemisches Aequivalent der in dem Apparat enthaltenen Substanz unterliegt.

Für die thermischen Aequivalente chemischer Processe liegen schon eine Menge von numerischen Bestimmungen von Favre und Silbermann, Andrews, Hess, Berthelot, Thomsen u. a. vor, aus denen sich die mechanischen Aequivalente durch Multiplication mit dem mechanischen Wärmeäquivalent ergeben. Man kann demnach leicht die electromotorischen Kräfte verschiedener Voltascher Batterieen von vornherein berechnen. Jener Satz gestattet also durch rein calorimetrische Methoden electromotorische Kräfte zu bestimmen, die in Batterieen tätig sind, bezüglich vorgeschriebene electrolytische Processe bewirken sollen. Er giebt uns sogar die Mittel, chemische Affinitätskräfte in absolutem Maasse auszudrücken. Man hat wol auch früher gewusst, dass die chemische Affinität, das heisst, das Bestreben der Substanzen sich einer gewissen chemischen Veränderung zu unterziehen, in einigen Fällen grösser war, als in andern, aber ein bestimmtes Maass hat man für sie nicht eher besessen, als bis sich gezeigt

*) *Phil. Mag.* 1851, Dec.

Digitized by Google

hat, dass sie in gewissen Fällen genau gleich gewissen electromotorischen Kräften ist. Seitdem kann man sie mit denselben Hilfsmitteln bestimmen, mit denen man überhaupt electromotorische Kräfte misst.

Weiss man aber erst, wie man die chemische Affinität zu messen hat, so wird der gesammte Verlauf, den ein chemischer Process nehmen muss, von vornherein klarer; man übersieht leichter, mit welcher Intensität er vor sich geht und kann eher angeben, welche Substanzen einander ersetzen werden, was man alles früher, als man die chemische Affinität als eine *qualitas sui generis* betrachtete, die eben nicht messbar sein sollte, nicht zu tun vermochte.

Wenn das Volumen der Producte einer Electrolyse grösser als das entsprechende des Electrolytes ist, so wird bei der Ausdehnung eine gewisse Arbeit verbraucht. Drückt man die Vergrösserung des Volumens eines electrochemischen Aequivalents, wenn es unter einem Drucke p electrolysirt wird, durch v aus, so ist die dieser Vergrösserung entsprechende Arbeit gleich pv. Die electromotorische Kraft, welche die betreffende Electrolyse hervorbringen soll, muss also um pv grösser sein, als sie sein würde, wenn keine Volumveränderung stattfände.

Sind die Producte der Electrolyse Gase, welche, wie etwa Sauerstoff und Wasserstoff, eine weit geringere Dichte, als das Electrolyt, dem sie entstammen, haben, und welche genügend genau dem Boyleschen Gesetze gehorchen, so ist pv bei einer und derselben Temperatur eine fast unveränderliche Grösse. Die electromotorische Kraft hängt dann nicht merklich von dem Druck ab, unter dem das Electrolyt, welches durch sie zersetzt werden soll, sich befindet. Das ist der Grund, weshalb man die electrolytische Zersetzung der verdünnten Schwefelsäure nicht dadurch aufhalten kann, dass man die Gasproducte in enge Räume hineinzwängt.

Sind die Producte der Electrolyse flüssig oder fest, so wächst pv mit ansteigendem Druck. Bei einer Druckzunahme muss dann die electromotorische Kraft vergrössert werden, wenn sie das Electrolyt in derselben Weise wie bisher zerlegen soll.

Ebenso muss auch jede andere Arbeit, die während der Electrolyse noch nebenbei geleistet wird, die electromotorische Kraft der Electrolyse beeinflussen. Läuft zum Beispiel ein electrischer Strom vertikal zwischen zwei horizontal gelegte Zinkelectroden durch eine Lösung von Zinkvitriol, so führt er Zink, wenn seine Richtung von unten nach oben geht, von der untern nach der obern Electrode, und wenn er von oben nach unten fliesst, von der obern zur untern Electrode. Bei der erstern Richtung muss er also stärker sein, als bei der letztern. Doch ist die Vergrösserung, die seine electromotorische Kraft pro Meter Entfernung der beiden Electroden erheischt, kleiner als ein Millionteil der Kraft eines Daniellschen Elements.

Digitized by Google

Cap. V.

Electrolytische Polarisation.

Wirkung der Polarisation auf den primären Strom.

264. Geht ein electrischer Strom durch ein von zwei Electroden begrenztes Electrolyt, so bringt die Aufhäufung der Ionen an den Electroden die Erscheinung der *Polarisation* hervor, die sich darin äussert, dass eine electromotorische Kraft der Kraft des zersetzenden Stromes entgegenwirkt und auf die Stromstärke eine ähnliche Wirkung hervorbringt wie eine Vergrösserung des Widerstandes im Stromkreise.

Wendet man einen continuirlichen Strom an, so scheint der sich ihm entgegenstellende Widerstand vom Beginn seines Laufes an schnell zu wachsen, bis er eine gewisse Höhe erreicht hat, auf der er dann nahezu unverändert bleibt. Aendert man die Form des Gefässes, in welchem das Electrolyt enthalten ist, so ändert sich der Widerstand in derselben Weise wie bei einem metallischen Conductor, den man einer ähnlichen Gestaltsveränderung unterwirft, immer aber hat man, um den ganzen Widerstand, den der Strom scheinbar überwindet, zu erhalten, zu dem wahren Widerstand des Electrolyts noch einen scheinbaren Widerstand, der von der Natur der Electroden abhängt, hinzuzufügen.

265. Deshalb glaubten einige Physiker annehmen zu müssen, dass zur Durchführung eines Stromes durch ein Electrolyt eine gewisse endliche electromotorische Kraft erforderlich ist. Die Untersuchungen von Lenz, Neumann, Beetz, Wiedemann*), Paalzow**) beweisen aber ebenso, wie die von F. Kohlrausch und A. Nippoldt***) ausgeführten Experimente, dass die Leitung durch ein Electrolyt mit ganz derselben Exactheit nach dem Ohmschen Gesetze vor sich geht, wie die durch einen metalli-

*) Galvanismus Bd. I.
**) Monatsbericht der Berl. Acad. der Wissenschaften 1868, Juli.
***) Pogg. Ann. Bd. 138 (1869, Oct.), S. 286.

Digitized by Google

schen Conductor, und dass der scheinbare, an den Flächen der Electroden auftretende Widerstand lediglich von der Polarisation dieser Electroden herrührt.

266. Die Polarisation manifestirt sich darin, dass die Intensität des eletrolysirenden Stromes geschwächt wird, wodurch eine dem Strom entgegengerichtete Kraft sich verrät. Nun äussert sich zwar der Widerstand ebenfalls in einer dem Strom entgegengerichteten Kraft, die wie die Polarisation seine Stärke zu verringern sucht. Allein es ist leicht seine Erscheinung von der der Polarisation experimentell zu trennen, wenn man den electrolysirenden Strom plötzlich unterbricht oder umkehrt.

Der Widerstand wirkt in Richtung des Stromes, und die electromotorische Kraft, die ihn gerade überwindet, ist proportional der Stärke des Stromes und ändert ihre Wirkungsrichtung, wenn der Strom umgekehrt wird. Wenn ferner die electromotorische Kraft verschwindet, so hört der Strom sofort zu fliessen auf.

Die von der Polarisation herrührende electromotorische Kraft hat eine ganz feste Richtung, sie wirkt immer entgegen der Richtung des Stromes, der sie wachruft. Hört der electrolysirende Strom auf, so bringt die Polarisation einen dem ursprünglichen Strom entgegengerichteten Strom hervor.

Man kann den Unterschied zwischen diesen beiden Erscheinungen mit dem Unterschiede vergleichen, der eintritt, je nachdem man Wasser durch ein langes capillares Rohr oder durch eine gewöhnliche Röhre von mässiger Länge von unten nach oben in einen Behälter zu fliessen zwingt. Hebt man den Druck, der den Strom unterhält, auf, so hört im ersteren Falle das Wasser einfach auf zu fliessen, im andern Falle dagegen fliesst jetzt umgekehrt das Wasser aus dem Behälter durch das Rohr ab.

Um diese mechanische Versinnbildlichung noch anschaulicher und vollständiger zu machen, haben wir nur noch vorauszusetzen, dass der Behälter eine mässige Tiefe besitzt, so dass er, wenn in ihn lange genug Wasser hineingelaufen ist, überzufliessen beginnt. Der Gegendruck des gefüllten Behälters erreicht dann seinen höchsten Betrag, auf dem er sich constant erhält. Dadurch wird auch die Erscheinung noch illustrirt, dass die electromotorische Kraft der Polarisation einen gewissen maximalen Betrag nicht überschreitet.

Ursache, Energie und Entwickelung der Polarisation.

267. Die Polarisation scheint ihre Ursache in der Existenz der Producte der electrolytischen Zerlegung an den Electroden zu haben, denn indem sich an den beiden Electroden verschiedene Substanzen anhäufen, werden die Electroden gegeneinander electrisch verschieden, und es beginnt zwischen ihnen eine electromotorische Kraft zu wirken, die der Kraft des electrolysirenden Stromes entgegengerichtet ist.

Digitized by Google

Die Ionen, die so durch ihre Anwesenheit an den Electroden den Polarisationsstrom hervorrufen, sind nicht als vollständig frei zu betrachten, sie hängen vielmehr an den Electrodenflächen mit ziemlich beträchtlicher Kraft fest.

Die Höhe der electromotorischen Kraft der Polarisation wird durch die Dichte, mit der ein Ion an der betreffenden Electrode condensirt ist, bestimmt, doch wächst sie nicht so schnell wie diese, ist ihr also auch nicht proportional.

Im allgemeinen hat nun ein Ion fortdauernd das Bestreben, sich ganz frei zu machen, und entweder in die Flüssigkeit zu diffundiren, oder sich als ein Gas zu entfernen, oder sich als festen Körper niederzuschlagen.

Die so entstehende *Zerstreuung der Polarisation* geht sehr langsam im Beginn der Polarisation und sehr rasch, wenn diese sich der Grenze ihrer Entwickelung nähert, vor sich.

268. Die electromotorische Kraft, welche in einem electrolytischen Process zur Geltung kommt, ist, wie wir in Art. 262 gesehen haben, numerisch dem mechanischen Aequivalent der Energie gleichwertig, die bei der Zersetzung eines electrochemischen Aequivalents des Electrolyts ins Spiel kommt. Involvirt der Process, wie in der Voltaschen Zelle, eine Verringerung der innern Energie der Substanzen, welche ihm unterworfen sind, so wirkt die electromotorische Kraft in Richtung des Stromes; ist er dagegen, wie in einer electrolytischen Zelle, von einem Anwachsen der innern Energie der Substanzen begleitet, so wirkt die electromotorische Kraft entgegen der Richtung des Stromes und heisst dann die *Electromotorische Kraft der Polarisation.*

Im Falle eines stationären Stromes, wo die Electrolyse continuirlich ihren Fortgang nimmt, und die Ionen getrennt im freien Zustand an den Electroden erscheinen, hat man zur Bestimmung der electromotorischen Kraft, die zur Unterhaltung der Electrolyse hinreicht, weiter nichts zu tun als die innere Energie der Ionen mit geeigneten Apparaten zu messen und hierauf mit der innern Energie des Electrolyts zu vergleichen. Man erhält dann durch die Differenz der Energieen den Maximalbetrag, den die Polarisation zu erreichen vermag.

Beim Beginn der Electrolyse sind aber die Ionen, wenn sie an den Electroden abgeschieden werden, noch nicht vollkommen frei, sie haben weniger innere Energie, als wenn sie gar nicht mehr zurückgehalten werden, aber mehr als in ihrer Verbindung zum Electrolyt. In der Tat ist auch der Zustand, in welchem sich ein Ion, wenn es in sehr dünner Schicht an der Electrode abgelagert wird, befindet, sehr ähnlich mit dem Zustande, in den es bei einer wirklichen chemischen Verbindung mit der Electrode treten würde. So wie aber die Ablagerung des Ion zunimmt, kommen die folgenden Teilchen immer weiter von der Electrode zu liegen, sind also mit dieser nicht mehr so innig verbunden wie die zuerst abgeschiedenen, sie adhäriren

Digitized by Google

noch einige Zeit, zuletzt aber entweichen sie in Blasen, oder diffundiren, oder schlagen sich in fester Form nieder, je nachdem sie gasig oder flüssig oder fest sind.

Eine Untersuchung der Polarisation muss daher auf folgende Phänomene Rücksicht nehmen.

I. Auf die Dichte σ der Ablagerung der Ionen auf den Electrodenflächen, also auf die Anzahl electrochemischer Aequivalente des betreffenden Ions, die sich auf einer Flächeneinheit der zugehörigen Electrode niederschlägt. Da jedem abgeschiedenen electrochemischen Aequivalent eine vom Strom fortgeführte Electricitätseinheit entspricht, so kann man σ sowohl als die Flächendichte einer Materie, als auch als die Flächendichte von Electricität ansehen.

II. Auf die electromotorische Kraft p der Polarisation, die als die electrische Potentialdifferenz zwischen den beiden Electroden definirt werden kann, wenn der das Electrolyt durchsetzende Strom so schwach ist, dass der eigentliche Widerstand des Electrolyts keine merkliche Veränderung in der Potentialdifferenz der Electroden zu verursachen vermag.

Diese electromotorische Kraft p ist in einem bestimmten Moment mechanisch äquivalent der zu dieser Zeit stattfindenden ein electrochemisches Aequivalent des Electrolyts angreifenden Action. Man muss aber beachten, dass dieser Process in einer Ablagerung der Ionen an den Electroden besteht, und dass der Zustand, in welchem die Ionen abgeschieden werden, von dem Zustand der Electrodenflächen abhängt, welche durch die schon abgeschiedenen Massen modificirt sein können.

Die zu irgend einer Zeit wirkende electromotorische Kraft p wird also durch alle vorangegangenen Processe, so zu sagen, durch die Vorgeschichte der Electrode bestimmt. Kurz und wenig präcis ausgedrückt ist also p eine Function von der Dichte σ, die mit σ verschwindet, aber weit früher eine obere Grenze als die Dichte erreicht. Im Grunde genommen kann man p nicht als Function von σ betrachten, sondern man muss correcter sagen, p sei eine Function des chemischen Zustandes der an den Electrodenflächen abgelagerten Ionschichten, der seinerseits wieder von der Dichte der Schichten nach einem die Zeit mitenthaltenden Gesetze abhängig sein wird.

269. III. Drittens ist noch die Zerstreuung der Polarisation zu berücksichtigen. Diese hängt aber zum Teil von der Intensität der Polarisation oder der Dichte σ der Ablagerungen an den Electroden, zum Teil von der Natur des umgebenden Mediums und zum Teil von den mechanischen, thermischen oder chemischen Einwirkungen, denen die Flächen der Electroden etwa unterworfen sind, ab.

Die Zeit T, innerhalb welcher eine an einer Electrode gebildete Ionmenge durch die tatsächlich stattfindende Zerstreuung sich wieder entfernt, bezeichne ich als den Modulus der Zerstreuungszeit. So lange die Dichte der Ablagerung nur gering ist, hat dieser Modul einen sehr grossen Wert,

Digitized by Google

mit wachsender Dichte vermindert sich T und nimmt sehr stark ab, wenn die Dichte sich ihrem grössten erreichbaren Werte nähert. Hat die Dichte ihren unter den bezüglichen Umständen grössten Betrag erlangt, so macht der Modul wahrscheinlich nur einen geringen Bruchteil einer Secunde aus. In der Tat nimmt die Zerstreuung, wenn der Strom constant erhalten wird, so rasch zu, dass die Gase statt sich auf die Electrode niederzuschlagen und die Dichte des daselbst schon befindlichen Ions zu vermehren, in demselben Augenblick, wo sie abgeschieden werden, auch in Blasen entschlüpfen.

270. Demnach ist der Zustand, in welchem sich die Electroden einer electrolytischen Zelle bei schwacher Polarisation befinden, sehr von dem verschieden, wenn ihre Polarisation den Maximalbetrag erreicht. Verbindet man zum Beispiel eine Anzahl electrolytischer Zellen, die mit verdünnter Schwefelsäure gefüllt sind, hinter einander und schaltet sie in den Stromkreis eines einzigen Daniellschen Elements ein, so hält der Strom nur ausserordentlich kurze Zeit an, weil die electromotorische Kraft der in den electrolytischen Zellen sich ausbildenden Polarisation sofort die des Daniells äquilibrirt.

Die Zerstreuung ist hier sehr geringfügig, sie wird durch die langsame Absorption und Diffusion der Gase durch die Flüssigkeit unterhalten. Sie ist aber wirklich vorhanden, und ihre Existenz wird durch den äusserst schwachen Strom angezeigt, der immer noch durch die Zellen fliesst, ohne doch eine merkliche Abscheidung der Gase bewirken zu können.

Vernachlässigt man die in der kurzen Zeit, während der die Polarisation sich herstellt, vor sich gehende Zerstreuung, so ist die in dieser Zeit durch den Strom fortgeführte Electricitätsmenge

$$Q = A\sigma,$$

wo A den Flächeninhalt einer Electrode und σ die als gleichförmig angenommene Dichte des auf A niedergeschlagenen Ions angiebt. Schaltet man nach dieser Zeit die Electroden des electrolytischen Apparates aus dem Stromkreis des Daniells aus und verbindet sie statt dessen mit einem Galvanometer, der die gesammte durchgehende Ladung zu messen gestattet, so findet man, dass beim Verschwinden der Polarisation die Electricitätsmenge Q nahezu vollständig wieder zum Vorschein kommt.

Secundärbatterieen.

271. In dieser Anordnung und Verwendung gleicht der electrolytische Apparat, welcher dann der Ritterschen *Secundärbatterie* entspricht, sehr einer Leydener Flasche. Beide Apparate können mit Electricität geladen und von derselben entladen werden. Bei beiden findet die Entladung in entgegengesetzter Richtung wie die Ladung statt. Die entladene Electricitätsmenge ist nahezu gleich der den bezüglichen Apparaten mitgeteilten Ladung.

Digitized by Google

Ihre Differenz gegen die zugeführte Ladung rührt zu einem Teil von der Zerstreuung her, welcher die Polarisation bezüglich die Ladung unterworfen ist, einer Zerstreuung, die bei der Secundärbatterie wie bei der Leydener Flasche bei kleinen Ladungen sehr langsam vor sich geht, dagegen sehr rasch Platz greift, wenn die Ladung eine gewisse Stärke überschritten hat. Ein anderer Teil der Differenz kommt wieder zum Vorschein, wenn man die Electroden der Secundärbatterie bezüglich der Leydener Flasche, nachdem der Entladungsstrom scheinbar ganz aufgehört hat, für einige Zeit von einander trennt und dann wieder mit einander verbindet. Es tritt dann eine secundäre Entladung in Richtung der primären ein. Diese zweite Entladung, die als *Electrisches Residuum* bezeichnet wird, ist für die Secundärbatterie nicht weniger charakteristisch, wie für die Leydener Flasche.

Obgleich hiernach die Secundärbatterie ziemlich viel Aehnlichkeit mit einer Leydener Flasche zeigt, so giebt es doch auch einige wichtige Differenzpunkte zwischen beiden Apparaten, die ich hervorheben muss.

Die Ladung einer Leydener Flasche ist sehr genau proportional der electromotorischen Kraft der Ladung, das heisst der Potentialdifferenz zwischen den beiden Belegungen der Flasche. Die Ladung, die einer Einheit der electromotorischen Kraft entspricht, die Capacität der Flasche, ist also constant, das heisst unabhängig von der Anzahl der Einheiten, die die electromotorische Kraft enthält. Bei der Secundärbatterie dagegen wächst diese Grösse, die man als ihre Capacität bezeichnen kann, mit der electromotorischen Kraft an, die Ladung der Secundärbatterie nimmt nicht proportional der electromotorischen Kraft zu.

Ferner hängt die Capacität einer Leydener Flasche von der Grösse der Belegungen, von ihrem gegenseitigen Abstande und von der Substanz, die sie trennt, ab, sie ist aber unabhängig von der Natur der Metalle, aus denen die Belegungen gebildet sind. Auf der andern Seite wird die Capacität der Secundärbatterie von der Grösse der Electrodenflächen, von ihrer natürlichen Beschaffenheit und von der Flüssigkeit, die sich zwischen ihnen befindet, bestimmt, sie ist aber unabhängig von dem Abstande, der die Electroden von einander scheidet. Der Maximalbetrag der Potentialdifferenz der Electroden ist bei einer einzelnen electrolytischen Zelle sehr gering im Verhältnis zu dem, den die Belegungen einer Leydener Flasche zu erreichen vermögen, und es müssen zur Hervorbringung einer entsprechend grossen electromotorischen Kraft viele secundäre Zellen mit einander verbunden werden.

Dagegen ist die Flächendichte der Ladung bei einer Secundärbatterie so ausserordentlich viel grösser als die, welche auf den Belegungen einer Leydener Flasche durch Aufhäufung von Electricität hervorgebracht werden kann, dass Varley*) bei der Beschreibung der Construction eines Condensators von grosser Capacität den Gebrauch einer Zusammenstellung von Gold- und Platinstreifen, die in verdünnter Schwefelsäure tauchen, immer noch als

*) C. F. Varley, *Electric Telegraphs* &c., 1860, Jan.

Digitized by Google

wohlfeiler denn die Benutzung der gewöhnlichen Franklinschen Tafeln, die aus weiter nichts als aus den zu beiden Seiten mit Zinnfolie belegten isolirenden Tafeln bestehen, empfehlen konnte.

In einer Leydener Flasche besteht die Form der aufgehäuften Energie in einem Zwangzustande des die Belegungen trennenden Dielectricums, den ich schon an einem andern Orte unter dem Namen electrische oder dielectrische Polarisation beschrieben habe. Dort (Art. 62, 111) habe ich auch unter Hinweisung auf unsere Unkenntnis bezüglich der Natur jenes Zwangzustandes, soweit es einstweilen möglich ist, auf die Erscheinungen hingewiesen, durch welche er sich manifestirt.

Bei einer Secundärbatterie besteht die Form der aufgehäuften Energie in der chemischen Bedingung, in der die Ionen sich gegen die Electrodenflächen befinden, eine Bedingung, die von vollständiger chemischer Bindung durch oberflächliche Condensation, mechanische Adhäsion bis zu einfacher Anlagerung variirt.

Der Sitz dieser Energie, die ich entsprechend der dielectrischen Polarisation als *Electrolytische Polarisation* bezeichne, befindet sich unmittelbar an den Electrodenflächen, nicht in der Substanz des zwischen den Electroden vorhandenen Electrolyts.

Ich empfehle dem Leser, in der Weise, wie es hier für die Secundärbatterie und die Leydener Flasche geschehen ist, auch eine Vergleichung zwischen der Voltaschen Batterie und irgend einer von den in Art. 211 beschriebenen Electrisirmaschinen durchzuführen.

Neuerdings hat Varley*) noch gefunden, dass die Capacität eines Platinstreifens, in verdünnter Schwefelsäure pro Quadratcentimeter 27 bis 84 und noch mehr Microfarads beträgt, und dass sie mit der electromotorischen Kraft wächst. Steigt diese Kraft von 0,02 Daniells bis zu 1,6 Daniells an, so erhebt sich die Capacität von 27 bis 84 Microfarads.

Man kann aber die Vergleichung zwischen der Secundärbatterie und der Leydener Flasche noch weiter treiben wie das folgende von Buff**) ausgeführte Experiment zeigt. Man weiss, dass Glas nur bei niedriger Temperatur ein Isolator ist, und dass es schon unter 100° C. zu leiten beginnt. Schüttet man also in ein Reagenzglas Quecksilber und taucht es in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäss, so hält die so gebildete Leydener Vorrichtung, so lange ihre Temperatur die gewöhnliche Zimmertemperatur nicht zu stark überschreitet, eine mitgeteilte Ladung zurück. Verbindet man die durch das Glas getrennten Quecksilbermassen durch Electroden mit einer Voltaschen Batterie, so geht zunächst kein Strom durch sie hindurch. Erwärmt man aber die Vorrichtung allmälig, so setzt sich der Strom in Bewegung

*) *Proc. R. S.* 1871, Jan. 12.

**) *Annalen der Chemie und Pharmacie*, 1854, Bd. 90 Seite 257; Wiedemann, *Lehre von der Electricität* 1882, Bd. I. pag. 519 ff.

Digitized by Google

und wächst an Stärke, je mehr die Temperatur des Glases ansteigt, während das Glas in seiner physikalischen Beschaffenheit noch ganz unverändert scheint.

Schaltet man jetzt die Batterie aus und verbindet die Electroden mit dem Galvanometer, so zeigt sich ein jenem primären Strome entgegengesetzter Polarisationsstrom. Die Flächen des Glases sind also polarisirt, und die Electricität wird demnach durch heisses Glas electrolytisch geleitet.

Lässt man den Apparat, während er in dem Voltaschen Kreis eingeschaltet ist, sich wieder abkühlen, so wird der Strom immer schwächer, bis er zuletzt ganz aufhört. Die Polarisation der Glasflächen bleibt aber bestehen. Entfernt man das Quecksilber, wäscht das Glas mit Salpetersäure und Wasser ab und füllt frisches Quecksilber ein, so ist der Apparat wieder zum Gebrauche fertig, und der frühere Versuch kann mit demselben Erfolg wiederholt werden.

Man darf also Glas bei einer Temperatur von 100° C., wo es noch ganz starr ist, als ein Electrolyt betrachten. Wahrscheinlich sind die meisten Dielectrica, welche den Strom in geringem Grade leiten, Electrolyte.

Die Existenz einer Polarisation kann als genügender Beweis für eine stattfindende Electrolyse gelten, und ferner darf man von Substanzen, deren Leitungsfähigkeit mit steigender Temperatur zunimmt, vermuten, dass sie electrolytisch leiten.

Constante Elemente.

272. Unterbricht man den Strom eines Voltaschen Elements, in welchem die Electroden polarisirt werden, für einige Zeit und schliesst ihn dann wieder, so ist die Intensität des Stromes nach diesem zweiten Schluss stärker, als sie bei der Oeffnung des Kreises war, weil inzwischen ein Teil der Polarisation im Element verschwunden ist. Vermindert man andererseits den Widerstand des Kreises, indem man den Strom zeitweilig durch eine kurze dicke Schliessung fliessen lässt, so findet man ihn nach Wiederherstellung des vorangegangenen Zustandes weniger stark, als er sonst gewesen sein würde, weil durch jene Widerstandsverminderung die Polarisation im Element gesteigert worden ist.

Solche Unregelmässigkeiten im Stromkreise sind bei Experimenten, die exacte Messungen erfordern, sehr störend; deshalb sucht man sich Elemente herzustellen, die entweder gar keine oder doch eine möglichst geringe Polarisation der Electroden nachweisen.

Es scheint, als ob die Zinkelectrode des Daniellschen Elements, wenn sie in einer Zinkvitriollösung oder in verdünnter Schwefelsäure taucht, nur sehr wenig polarisirt wird. Der Hauptteil der Polarisation befindet sich vielmehr an der negativen Electrode. Steckt man die negative Electrode in verdünnte Schwefelsäure, so sieht man, wie sie sich mit Bläschen, welche

Digitized by Google

Wasserstoff, das von der Zersetzung der Flüssigkeit herrührt, einschliessen, bedeckt. Diese Bläschen verringern dann die Berührungsfläche der Electrode mit der Flüssigkeit und vermehren so den Widerstand. Ausser von diesen sichtbaren Bläschen wird aber die Electrode auch von einer dünnen anhaftenden Schicht freien Wasserstoffs überzogen, die eine der Kraft der Batterie entgegenwirkende electromotorische Kraft wachruft und so jene notwendig verringert.

Man hat verschiedene Methoden zur Entfernung dieser Wasserstoffschicht versucht. Zunächst kann man ihre Bildung bis zu einem gewissen Grade mechanisch verhindern, wenn man die Flüssigkeit gehörig rührt, oder wenn man die negative Electrode abreibt. In der Smeeschen Batterie sind zu dem Behufe die Electroden vertikal eingesetzt und mit fein verteiltem Platinschwamm bedeckt, von dem die Bläschen sich leicht loslösen können. Die Strömung, die dadurch in der Flüssigkeit verursacht wird, zieht dann die andern Bläschen, so wie sie gebildet werden, mit sich fort.

Weit wirksamer erweist sich aber die Anwendung chemischer Mittel. Man befolgt dabei zwei Methoden. In dem Groveschen und Bunsenschen Element wird das negative Metall in eine an Sauerstoff reiche Flüssigkeit getaucht. Der an dieser Electrode sich ausscheidende Wasserstoff findet dann in der Flüssigkeit eine genügende Menge von Sauerstoff, mit dem er sich zu Wasser verbindet. Grove benutzt als negative Electrode einen Platinstreifen, den er in concentrirte Salpetersäure tauchen lässt, Bunsen benutzt zwar ebenfalls die Salpetersäure, senkt aber einen Streifen besonders präparirter Kohle hinein. Statt der Salpetersäure, die durch die Dämpfe von Untersalpetersäure, welche sie aushaucht, lästig fällt, wendet man häufig Chromsäure an.

Dahin gehört auch die Säule, in der man Kupfer, das man vorher künstlich mit einer Oxydschicht versehen hat, als negative Electrode benutzt. Der abgeschiedene Wasserstoff reducirt die Oxydschicht und verbindet sich mit dem Sauerstoff zu Wasser. Die Oxydschicht schwindet aber schnell, um sie zu ersetzen, schlägt Joule vor, die Kupferelectrode in Form einer Scheibe zu bilden, die senkrecht nur zur Hälfte in die Flüssigkeit taucht und um eine horizontale Axe langsam rotirt. Die aus der Flüssigkeit tretenden Teile derselben können dann von der umgebenden Luft wieder oxydirt werden.

Die zweite Methode beruht auf der Anwendung eines, die negative Electrode umgebenden Electrolyts, dessen Kation ein Metall bildet, welches gegen Zink stark negativ ist.

In dem Daniellschen Element taucht eine Kupferplatte in einer gesättigten Lösung von Kupfervitriol, geht dann der Strom in dem Element vom Zink zum Kupfer, so schlägt sich an die Kupferelectrode aus der Lösung nicht Wasserstoff, sondern metallisches Kupfer nieder. Damit das Kupfer der Lösung als wirkliches Kation auftritt, darf der Strom nicht zu stark und muss die Lösung gesättigt sein. Das Anion SO_4 begiebt sich dann zum Zink und löst dasselbe allmälig auf, wenn es nicht amalgamirt ist.

Digitized by Google

Sind die genannten Bedingungen nicht erfüllt, so bildet sich an der Kathode auch Wasserstoff, welches aus der Lösung SO_4 an sich zieht (wobei wieder Kupfer frei wird) und Schwefelsäure entstehen lässt. Die Kupfervitriollösung wird dann an der Kupferelectrode allmälig durch Schwefelsäure ersetzt, die Flüssigkeit wird farblos, und die Electrode polarisirt sich schliesslich durch den Wasserstoff. Das Kupfer, welches durch diesen secundären Process niedergeschlagen wird, ist loser und zerreiblicher als das durch die regelrechte Electrolyse abgeschiedene.

Man fügt deshalb zu der Flüssigkeit, die die negative Electrode umgiebt, um den Abgang an Kupfer genügend zu ersetzen, von Zeit zu Zeit Kupfervitriolkrystalle hinzu.

Muss demnach die Flüssigkeit an der Kupferelectrode mit Kupfervitriol gesättigt sein, so darf die Flüssigkeit, in der die Zinkelectrode taucht, keine Spur dieses Vitriols enthalten, sonst schlägt sich das Kupfer desselben auf das Zink nieder. Das Zink, das daran gesetzte Kupfer und die umgebende Flüssigkeit bilden dann einen kleinen secundären Kreis, in welchem eine rasche Electrolyse vor sich geht, die das Zink verzehrt und doch nichts zum Nutzeffect der Batterie beiträgt.

Man taucht deshalb das Zink entweder in verdünnte Schwefelsäure oder in Zinkvitriollösung, die man in eine Schweinsblase oder in eine Zelle aus gebranntem porösen Ton, welche rings von der Kupfervitriollösung umspült wird, füllt. Die Electrolyse wird dadurch nicht gehindert, während eine Mischung der beiden Flüssigkeiten durch sichtbare Strömungen genügend gehemmt ist.

In einigen Elementen versucht man die Strömungen durch Sägespäne aufzuhalten; man kann aber dadurch die Mischung der Flüssigkeiten nicht verhindern, weil, wie Graham gezeigt hat, zwei Flüssigkeiten, die durch derartige Zwischenmittel getrennt sind, fast genau so schnell in einander diffundiren, als wenn sie sich direct berühren und nicht sichtbar durch einander strömen.

Ausserdem würde wahrscheinlich ein Septum, das die Diffusion vermindert, in genau demselben Verhältniss den Widerstand des Elements vermehren, weil die mathematischen Gesetze, welche die Verbreitung des Stromes durch electrolytische Leitung regeln, genau dieselbe Form haben, wie die, welche die Diffusion bestimmen. Aenderungen also, die die Diffusion betreffen, in ganz derselben Weise sich auch bei der Fortleitung des Stromes zeigen müssen. Ein Unterschied findet allerdings zwischen diesen beiden Vorgängen statt, die Diffusion geht nämlich fortwährend vor sich, die Leitung dagegen nur so lange, als der Strom anhält.

Doch kann keine Vorsichtsmassregel verhindern, dass nicht schliesslich doch das Kupfervitriol noch seinen Weg zum Zink findet und so die Batterie ihrer Kraft beraubt.

Digitized by Google

Thomson*) hat der Daniellschen Zelle, um jenes Endresultat wenigstens möglichst weit hinauszuschieben, die folgende Einrichtung gegeben.

Die Kupferelectrode besteht aus einer grossen Kupferplatte, und liegt auf dem Boden eines Glasgefässes. Darüber ist Zinkvitriol gefüllt, welches von der Zinkelectrode, der die Form eines Gitters gegeben ist, überdeckt wird. Durch die Lösung geht eine Glasröhre, die gerade über der Kupferplatte ihr Ende findet. Füllt man in diese Röhre Kupfervitriolkrystalle ein, so bildet sich eine Kupfervitriollösung, die, weil sie specifisch schwerer als die Zinkvitriollösung ist, sich auf der Kupferplatte ausbreitet und die Zinkplatte nur durch Diffusion erreichen kann.

Um die Diffusion möglichst zu verlangsamen, führt Thomson in die Zinkvitriollösung einen Heber, dessen Inneres durch einen Baumwollendocht ausgefüllt ist, so ein, dass seine eine Mündung ungefähr in der Mitte zwischen den beiden Electroden sich befindet, während die andere in einem

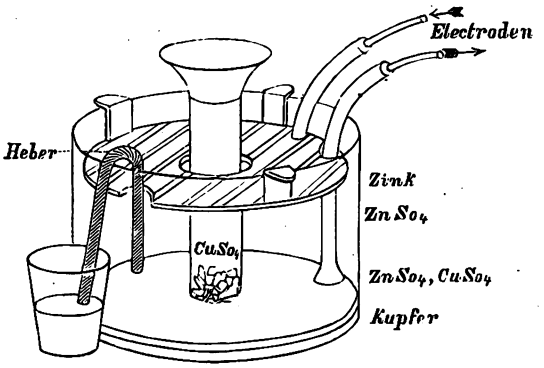


Fig. 22.

ausserhalb des Elements stehenden Gefäss endet. Die Flüssigkeit wird dadurch langsam von der Mitte ihrer Tiefe aus aufgesaugt, der grössere Teil der nach oben diffundirenden Kupfervitriollösung also durch den Heber, ehe er noch die Zinkelectrode erreicht, abgezogen. Das Zink bleibt dann stets von einer nahezu ganz reinen Zinkvitriollösung umgeben. Die Diffusion wird auch noch dadurch verlangsamt, dass die Flüssigkeit an der Zinkelectrode durch die Heberwirkung sich langsam nach unten senkt, also die aufwärtsgehende Bewegung des Kupfervitriols ein wenig hemmt. Ist der Spiegel der Zinkvitriollösung zu stark gesunken, so fügt man Wasser oder eine schwache Zinkvitriollösung hinzu. Während der Wirkung dieses Elements wird Kupfer auf die Kupferplatte niedergeschlagen, und Schwefeltetroxyd (SO_4) langsam durch die Flüssigkeit zum Zink geführt, wo es

*) *Proc. R. S.* 1871, Jan. 19.

Digitized by Google

es sich mit diesem zu Zinkvitriol, das sich sofort in der umgebenden Flüssigkeit löst, verbindet. Dadurch wird allmälig die Dichtigkeit der Flüssigkeit am Boden des Elements immer geringer und die der Flüssigkeit am Rande immer grösser, und es würden bald Strömungen auftreten, welche das Element unbrauchbar machen würden, wenn man nicht einerseits die Glasröhre genügend mit Kupfervitriolkrystallen gefüllt erhielte, und andererseits die Zinkvitriollösung durch Nachgiessen von Wasser gehörig verdünnte.

Die electromotorische Kraft der Groveschen Zelle beträgt 192,000,000, die der Bunsenschen 188,000,000 und die der Daniellschen 107,900,000. Die Daniellsche Zelle ist also keineswegs die stärkste von den im gewöhnlichen Gebrauch befindlichen Elementen.

Auch ist der Widerstand eines Daniellschen Elements im allgemeinen grösser als der eines Groveschen oder Bunsenschen von derselben Grösse. Trotz alledem ist die Daniellsche Zelle weitaus am meisten zur Ausführung exacter Messungen geeignet, weil sie von allen bisher getroffenen Einrichtungen die grösste Constanz der electromotorischen Kraft aufweist. Sie hat noch den Vorteil, dass sie sehr lange zu arbeiten vermag und keine lästigen Dämpfe ausstösst.

Digitized by Google

Cap. VI.

Lineare electrische Ströme.

Definition eines linearen Leiters.

273. Die folgenden Untersuchungen umfassen nicht blos wirklich lineare Leiter, sondern auch solche, die wie lineare Leiter behandelt werden können. Als *Lineare Leiter* sind aber die Leiterteile zu betrachten, zwischen deren Endpunkten oder Electroden der Strom immer in derselben Weise fliesst. So kann man zum Beispiel einen Conductor von irgend welcher Form, dessen Oberfläche bis auf zwei Stellen, die mit Electroden metallisch verbunden sind, mit einem isolirenden Material bedeckt ist, nach denselben Gesetzen, wie einen wirklich linearen Leiter behandeln. Hier fliesst nämlich ein Strom, der durch die eine Electrode ein- und durch die andere austritt, unabhängig von seiner Stärke stets längs denselben Stromlinien, und seine Stärke ist in jedem Teile der Masse eine lineare Function der electromotorischen Kraft. Hier wird also die Ohmsche Beziehung zwischen Stromstärke, electromotorischer Kraft und Widerstand in Anwendung zu bringen sein. Hat der Conductor aber mehr als zwei Stellen, durch die der Strom ein- und auszutreten vermag, so können Ströme in mehreren von einander unabhängigen und zu einander nicht conjugirten Bahnen fliessen. Ich komme darauf in Art. 282 zurück.

Das Ohmsche Gesetz.

274. Es sei E die in Art. 69 definirte electromotorische Kraft in einem linearen Leiter, der von der Electrode A_1 zur Electrode A_2 reicht, ferner C die Intensität eines Stromes, der den Leiter durchfliesst, das heisst, die Electricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt des Leiters in Richtung von A_1 nach A_2 hindurchgeht, endlich sei R der Widerstand des Leiters, dann ist der mathematische Ausdruck für das Ohmsche Gesetz

$$E = CR.$$

Digitized by Google

System hintereinander gereihter Leiter.

275. *Widerstand.* Wir verbinden eine Anzahl von Leitern so, dass das Ende jedes Leiters mit dem Anfang des folgenden Leiters zusammenfällt, also die Electroden des ersten A_1, A_2, die des zweiten A_2, A_3, die des dritten A_3, A_4, u. s. f. sind. Sie bilden dann ein System *Hintereinander gereihter Leiter.*

Die electromotorischen Kräfte, die längs dieser Leiter wirken, seien E_{12}, E_{23}, E_{34}, u. s. f., die Widerstände R_{12}, R_{23}, R_{34} u. s. f.

Da die Leiter hintereinander verbunden sind, so fliesst ein Strom durch alle mit einer und derselben Stärke, nach dem Ohmschen Gesetz ist daher

1) $$E_{12} = CR_{12},\ E_{23} = CR_{23},\ E_{34} = CR_{34}, \ldots$$

Also

2) $$E_{12} + E_{23} + E_{34} + \ldots = C(R_{12} + R_{23} + R_{34} + \ldots)$$

Andererseits haben wir aber, falls E die durch alle Leiter hindurch wirkende, resultirende electromotorische Kraft und R den Gesammtwiderstand aller Leiter angiebt,

3) $$E = CR,$$

und da

4) $$E = E_{12} + E_{23} + E_{34} + \ldots$$

ist, so folgt aus den Gleichungen unter 2), 3) und 4)

5) $$R = R_{12} + R_{23} + R_{34} + \ldots,$$

oder in Worten:

Der Widerstand einer Anzahl hintereinander gereihter Leiter ist gleich der Summe der Widerstände der einzelnen Leiter.

Potential. Seien A und C die Electroden der Combination von Leitern, B ein zwischen ihnen liegender Punkt und a, b, c die Potentiale an den betreffenden drei Stellen A, B, C. Ferner sei R_1 der Widerstand des von A bis B und R_2 der des von B bis C reichenden Leiterstückes, so ist nach der Definition der electromotorischen Kraft

6′) $$a - b = R_1 C,\quad b - c = R_2 C,\quad a - c = RC,$$

also

6) $$b = \frac{aR_2 + cR_1}{R},$$

woraus das im Punkte B herrschende Potential b berechnet werden kann, wenn die Potentialwerte in den Electroden gegeben sind.

Digitized by Google

System nebeneinander gereihter Leiter.

276. *Widerstand.* Es seien eine Anzahl von Leitern ABZ, ACZ, ADZ u. s. f. nebeneinander verbunden, so dass sie dieselben Electroden A und Z haben. Sie bilden dann ein System *Nebeneinander gereihter Leiter* oder einen vielfachen Leiter.

Ihre bezüglichen Widerstände bezeichnen wir durch $R_1, R_2, R_3, \ldots$, die in ihnen herrschenden Stromstärken durch $C_1, C_2, C_3, \ldots$, den gesammten Widerstand durch R und die gesammte Stromstärke durch C.

Da durch die einzelnen Leiter dieselbe electromotorische Kraft wirkt, so ist

1) $$E = C_1 R_1 = C_2 R_2 = C_3 R_3 = \ldots = CR.$$

Ferner haben wir

2) $$C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots,$$

also

3) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots,$$

oder in Worten:

Der reciproke Wert des Widerstandes eines vielfachen Leiters ist gleich der Summe der reciproken Werte der Widerstände der einzelnen Componenten desselben.

Bezeichnet man den reciproken Wert des Widerstandes eines Leiters als seine *Leitungsfähigkeit*, so kann man auch sagen:

Die Leitungsfähigkeit eines vielfachen Leiters ist gleich der Summe der Leitungsfähigkeiten seiner einzelnen Zweige.

Stromstärke in den einzelnen Zweigen. Aus der Gleichung 1) folgt für die Stromstärke irgend eines Zweiges des vielfachen Leiters

4) $$C_k = C \frac{R}{R_k}.$$

R ist durch die Gleichung unter 3) bestimmt.

Körperliche Leiter von gleichförmigem Querschnitt.

277. Der Widerstand ρ eines aus einem gegebenen Material geschnittenen Würfels gegen einen Strom, der parallel einer seiner Kanten fliesst, heisst, wenn die Kanten des Würfels die Länge Eins haben, der *Specifische Widerstand für die Volumeinheit* des Materials.

Ein Prisma, dessen Querschnitt gleich der Einheit und dessen Länge gleich l ist, kann als aus l Einheitswürfeln zusammengesetzt angesehen werden. Der Widerstand eines solchen Prismas ist daher nach Art. 275 gleich $l\rho$. Da weiter ein Leiter von der Länge l und dem Querschnitt s

Digitized by Google

wie ein aus s nebeneinander verbundenen Leitern betrachtet werden darf, so folgt aus Art. 276, dass der Widerstand eines solchen Leiters

1) $$R = \rho \frac{l}{s}.$$

ist.

Diese Gleichung gestattet den specifischen Widerstand irgend eines Materials zu bestimmen, wenn man den Widerstand und die Dimensionen eines aus ihm gebildeten, überall gleich dicken Drahtes zu messen vermag.

Die directe Messung des Querschnitts eines Drahtes ist meist mit grossen Schwierigkeiten verbunden, man bestimmt daher ausser der Länge des Drahtes noch sein Gewicht und seine Dichtigkeit, woraus sich dann der Querschnitt berechnen lässt.

Wo es nicht gut möglich ist, die Dichtigkeit des Materials zu bestimmen, benutzt man als Vergleichseinheit den *Specifischen Widerstand für die Gewichtseinheit*, das heisst, den Widerstand eines Drahtes, dessen Länge gleich der Längeneinheit und dessen Masse gleich der Masseneinheit ist.

Ist dieser Widerstand gleich r, so hat man für jeden andern Draht der die Länge l und die Masse m besitzt, den Widerstand

2) $$R = \frac{l^2 r}{m}.$$

Dimensionen des Widerstandes und der Leitungsfähigkeit.

278. *Electrostatisches Maasssystem.* Nach dem Ohmschen Gesetz ist der Widerstand eines Leiters gleich dem Quotienten aus der ihn angreifenden electromotorischen Kraft in die Stärke des ihn durchfliessenden Stromes. Seine Leitungsfähigkeit ist dann gleich dem reciproken Wert des Widerstandes, also gleich dem Quotienten aus der Stromintensität in die electromotorische Kraft. Nach dem in der Electrostatik adoptirten Maasssystem ist aber das Verhältnis einer Electricitätsmenge zu einer electromotorischen Kraft, also zu einer Potentialgrösse gleich einer Capacität, also von den Dimensionen einer Linie. Weiter ist das Verhältnis einer Electricitätsmenge zu einer Stromstärke gleich der Zeit, innerhalb deren der Strom eine solche Electricitätsmenge fortschafft. Daraus folgt, dass das Verhältnis einer Stromstärke zu einer electromotorischen Kraft dem einer Linie zu einer Zeit entspricht, oder dass dieses Verhältnis, die Leitungsfähigkeit, von den Dimensionen einer Geschwindigkeit ist.

Man kann die Tatsache, dass die Leitungsfähigkeit eines Conductors im electrostatischen Maasssystem sich durch eine Geschwindigkeit ausdrückt, dadurch verificiren, dass man einen kugelförmigen Conductor vom Radius r zu einem Potential V ladet und dann durch den gegebenen Leiter mit der Erde verbindet. Lässt man, während die Kugel sich zur Erde entladet, ihren Radius so abnehmen, dass ihr Potential V durch die Entladung keine Ver-

Digitized by Google

änderung erleidet, so ist ihre Ladung in irgend einem Augenblick gleich rV und die Stärke des durch den Leiter gehenden Entladungsstromes gleich $d(rV)/dt$, das heisst, weil V durch die Contraction der Kugel constant erhalten wird, gleich Vdr/dt. Die electromotorische Kraft des Entladungsstromes ist gleich V, also das Verhältnis der Stärke des Stromes zu seiner electromotorischen Kraft gleich dr/dt, gleich einer Geschwindigkeit, und zwar gleich der Geschwindigkeit, mit der der Radius der Kugel zu verringern ist, wenn ihr Potentialniveau während ihrer Entladung durch den Leiter zur Erde ungeändert bleiben soll.

Im *electrostatischen Maasssystem* ist also die Leitungsfähigkeit eine Geschwindigkeit, und sie hat die Dimensionen

$$[\text{Leitungsfähigkeit}] \ldots = [LT^{-1}].$$

Daraus folgen dann die Dimensionen der andern Grössen

$$[\text{Widerstand}] \ldots = [L^{-1}T],$$
$$[\text{Specifische Leitungsfähigkeit für Volumeinheit}] = [T^{-1}],$$
$$[\text{Specifischer Widerstand für Volumeinheit}] \ldots = [T].$$

Der numerische Betrag der beiden letzten Grössen hängt also lediglich von der Wahl der Zeiteinheit ab, die in allen Ländern in derselben Weise getroffen wird.

Für die auf die Gewichtseinheit bezogene specifische Leitungsfähigkeit und für den entsprechenden specifischen Widerstand haben wir die Dimensionen

$$[\text{Specifische Leitungsfähigkeit für Gewichtseinheit}] = [L^3T^{-1}M^{-1}],$$
$$[\text{Specifischer Widerstand für Gewichtseinheit}] \ldots = [L^{-3}TM].$$

279. *Electromagnetisches Maasssystem.* Wir werden später sehen, dass im electromagnetischen Maasssystem umgekehrt der Widerstand eines Conductors eine Geschwindigkeit ist, in jenem Maasssystem sind also die Dimensionen

$$[\text{Leitungsfähigkeit}] \ldots = [L^{-1}T],$$
$$[\text{Widerstand}] \ldots = [LT^{-1}];$$
$$[\text{Specifische Leitungsfähigkeit für Volumeinheit}] = [L^{-2}T],$$
$$[\text{Specifischer Widerstand für Volumeinheit}] \ldots = [L^2T^{-1}],$$
$$[\text{Specifische Leitungsfähigkeit für Gewichtseinheit}] = [LTM^{-1}],$$
$$[\text{Specifischer Widerstand für Gewichtseinheit}] \ldots = [L^{-1}T^{-1}M].$$

Allgemeine Theorie eines Systems linearer Leiter.

280. Den allgemeinsten Fall eines Systems linearer Leiter erhält man, wenn man n Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ zu zwei und zwei durch $n(n-1)/2$ lineare Leiter verbindet.

Bezeichnet man die Leitungsfähigkeit eines Leiters, der von A_p nach A_q gezogen ist, durch K_{pq}, die Intensität des ihn in Richtung von A_p nach A_q durchsetzenden Stromes durch C_{pq}, ferner das Potential in A_p mit P_p

Digitized by Google

und das in A_q mit P_q, endlich eine längs des Leiters $A_p A_q$ etwa wirkende innere electromotorische Kraft durch E_{pq}, so haben wir nach dem Ohmschen Gesetze

1) $$C_{pq} = K_{pq}(P_p - P_q + E_{pq}).$$

Die Leitungsfähigkeit ist eine von der Richtung des Stromes unabhängige Grösse, die electromotorische Kraft dagegen und die Stromstärke wechseln ihr Zeichen, wenn die Stromrichtung umschlägt, daher ist

2) $$K_{pq} = K_{qp},\ E_{pq} = -E_{qp},\ C_{pq} = -C_{qp}.$$

Sind weiter $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots Q_n$ die in das System durch die Punkte $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ in der Zeiteinheit eintretenden Electricitätsmengen, so muss, weil in dem Leitersystem Electricität weder aufgehäuft noch geschaffen werden kann, die Continuitätsgleichung

3) $$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_n = 0$$

erfüllt sein.

Für irgend einen Punkt A_p ist aber

4) $$Q_p = C_{p1} + C_{p2} + C_{p3} + \ldots + C_{pn},$$

oder nach Gleichung 1)

5a) $$\begin{aligned} Q_p = {} & (K_{p1} + K_{p2} + K_{p3} + \ldots K_{pn})\, P_p \\ & - (K_{p1}P_1 + K_{p2}P_2 + K_{p3}P_3 + \ldots + K_{pn}P_n) \\ & + (K_{p1}E_{p1} + K_{p2}E_{p2} + K_{p3}E_{p3} + \ldots + K_{pn}E_{pn}). \end{aligned}$$

Das Zeichen K_{pp} kommt in diesen Gleichungen nicht vor, verstehen wir darunter die negative Summe der Leitungsfähigkeiten aller Leiter, die sich in A_p schneiden, setzen also

a) $$K_{pp} = -(K_{p1} + K_{p2} + K_{p3} + \ldots + K_{pn}),$$

so hat die Continuitätsgleichung für den Punkt A_p die Form

5b) $$Q_p = K_{p1}(E_{p1} - P_1) + K_{p2}(E_{p2} - P_2) \ldots + K_{pn}(E_{pn} - P_n) - K_{pp}E_{pp}.$$

Indem wir p alle Zahlenwerte von 1 bis n erteilen, erhalten wir so n Gleichungen, die aber, weil ihre Summe wegen der Gleichungen unter 2), 3) und a) identisch verschwindet, zu $n-1$ unabhängigen Gleichungen zusammenfallen.

Es ist also nicht möglich alle n Potentiale P durch sie zu berechnen, wohl aber gestatten sie die Potentialdifferenzen der Verbindungsstellen A gegen einander zu bestimmen, und das genügt völlig zur Berechnung der Stromstärken aus den unter 1) gegebenen Gleichungen.

Digitized by Google

Bezeichnet man mit D die Determinante

$$b) \qquad D = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & \dots & K_{1\,n-1} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & \dots & K_{2\,n-1} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & \dots & K_{3\,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ K_{n-1\,1} & K_{n-1\,2} & K_{n-1\,3} & \dots & K_{n-1\,n-1} \end{vmatrix}$$

und mit D_{pq} die bezügliche Subdeterminante, so ist

$$6_1) \quad \begin{aligned} (P_p - P_n) D = {} & (K_{12} E_{12} + \dots + K_{1n} E_{1n} - Q_1) D_{p1} \\ & + (K_{21} E_{21} + \dots + K_{2n} E_{2n} - Q_2) D_{p2} + \dots \\ & + (K_{q1} E_{q1} + \dots + K_{qn} E_{qn} - Q_q) D_{pq} + \dots \end{aligned}$$

Entsprechend haben wir

$$6_2) \quad \begin{aligned} (P_q - P_n) D = {} & (K_{12} E_{12} + \dots + K_{1n} E_{1n} - Q_1) D_{q1} \\ & + (K_{21} E_{21} + \dots + K_{2n} E_{2n} - Q_2) D_{q2} + \dots \\ & + (K_{p1} E_{p1} + \dots + K_{pn} E_{pn} - Q_p) D_{qp} + \dots, \end{aligned}$$

woraus sich die Potentialdifferenz zwischen den Punkten A_p und A_q durch einfache Subtraction und damit die Lösung aller auf das Problem der Stromverteilung bezüglichen Fragen ergiebt.

Kirchhoff*) hat die Theorie linearer verzweigter Leiter, indem er statt der in den Verzweigungspunkten herrschenden Potentiale die electromotorischen Kräfte einführte, durch die folgenden beiden Sätze begründet.

1. Die Summe der Intensitäten aller nach irgend einem Punkte des Systems fliessenden Ströme (solche, die von dem Punkte fortfliessen, als negativ gerechnet) ist gleich Null.

2. In jedem vollständigen von Leitern gebildeten Kreis ist die Summe der electromotorischen Kräfte gleich der Summe aus den Producten der Stromstärken der einzelnen Teile des Kreises in die zugehörigen Widerstände.

Der erste Satz entspricht der unter 3) angeführten Continuitätsgleichung, der zweite ergiebt sich aus dem Gleichungssystem unter 1).

281. Aus den unter Gleichung 2) im vorigen Artikel aufgestellten Beziehungen folgt ein Satz, der eine reciproke Eigenschaft zwischen zwei Leitern des Systems festsetzt, die der in Art. 88 für statistische Electricität bewiesenen reciproken Eigenschaft entspricht.

---

*) *Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird.* Pogg. Ann. 72, oder Gesammelte Abhandlungen pag. 23 ff.

Digitized by Google

Der Coefficient von Q_q ist in der Gleichung für das Potential P_p gleich D_{pq}/D, und der von Q_p in dem Ausdruck für P_q gleich D_{qp}/D.

D_{pq} unterscheidet sich aber von D_{qp} lediglich durch die verkehrte Reihenfolge der Symbole, so dass zum Beispiel K_{qp} für K_{pq} steht. Da aber nach Gleichung 2) $K_{pq} = K_{qp}$ sein muss, so ist auch

$$7) \qquad D_{pq} = D_{qp},$$

also ist der Coefficient von Q_q in dem Ausdruck für P_p gleich dem Coefficienten von Q_p in dem Ausdruck für P_q.

Führt man demnach einen Strom von der Intensität 1 in A_q ein, so steigt das Potential in A_p dadurch ebenso stark an wie in A_q, wenn man in A_p einen Strom von der Intensität 1 einführt.

Für die practische Anwendung bequemer sind die folgenden aus diesem Satz sich ergebenden Resultate.

Es seien A, B, C, D vier Punkte unseres Leitersystems. Tritt ein Strom von der Stärke Q in das System durch den Punkt A ein und verlässt es im Punkte B, so ist die dadurch entstehende Potentialdifferenz P zwischen C und D ebenso gross wie die zwischen A und B entstehende Potentialdifferenz, wenn der Strom von derselben Stärke Q das System in C betritt und in D verlässt.

Führt man ferner eine electromotorische Kraft ein, welche in dem Conductor in Richtung von A nach B wirkt, und so einen Strom von X nach Y mit der Intensität C schickt, so verursacht dieselbe electromotorische Kraft, wenn sie in Richtung von X nach Y wirkt, einen ebenso starken von A nach B gehenden Strom.

Die electromotorische Kraft kann von einer Voltaschen Batterie geliefert werden, die man zwischen die beiden betreffenden Punkte einschaltet, man muss aber dafür Sorge tragen, dass der Widerstand des Conductors sich durch Einführung der Batterie nicht ändert.

282. Wirkt eine electromotorische Kraft E_{pq} längs des Leiters $A_p A_q$, so ist die Stärke des dadurch in einem andern Leiter $A_r A_s$ producirten Stromes, wie man leicht aus den Formeln des vorigen Artikels findet

$$8) \qquad C_{rs} = K_{rs} K_{pq} E_{pq} \left(D_{rp} + D_{sq} - D_{rq} - D_{sp} \right) \frac{1}{D}.$$

Soll dieser Strom verschwinden, so muss die Bedingung

$$9_1) \qquad D_{rp} + D_{sq} - D_{rq} - D_{sp} = 0$$

erfüllt sein.

Man ersieht aber aus der Gleichung unter 7) des Art 281, dass, wenn diese Bedingung erfüllt ist, auch in A_{pq} kein Strom vorhanden ist, falls die electromotorische Kraft in $A_r A_s$ wirkt. Ich bezeichne zwei Leiter, deren Beschaffenheit die Existenz der Gleichung unter 9_1) bedingt, als *Conjugirte Leiter*.

Digitized by Google

Specielle Untersuchungen über conjugirte Leiter sind von Kirchhoff angestellt worden.

Wärmemenge, welche in einer Drahtverbindung durch einen Strom erzeugt wird.

283. Die von einem Strom in einem Conductor vom Widerstande R in der Zeiteinheit entwickelte Wärmemenge H ist nach Art. 242

1a) $$H = \frac{1}{J} R C^2.$$

Daher haben wir für einen zwischen A_p und A_q ausgespannten Leiter

1_1) $$H_{pq} = \frac{1}{J} R_{pq} C_{pq}^2.$$

Die Stromstärke C_{pq} ist nach dem Ohmschen Gesetz

a) $$C_{pq} = K_{pq}(P_p - P_q),$$

wo

b) $$K_{pq} \cdot R_{pq} = 1$$

ist.

Setzen wir aber allgemeiner diese Stromstärke nicht, wie sie das Ohmsche Gesetz ergiebt, zu C_{pq} an, sondern nehmen für sie den Wert

c) $$X_{pq} = C_{pq} + Y_{pq},$$

so haben wir

2a) $$JH = \Sigma \left\{ R_{pq} C_{pq}^2 + 2 R_{pq} C_{pq} Y_{pq} + R_{pq} Y_{pq}^2 \right\},$$

oder zufolge des aus a) resultirenden Wertes von C_{pq}

2b) $$JH = \Sigma \left\{ (P_p - P_q)(C_{pq} + 2 Y_{pq}) + R_{pq} Y_{pq}^2 \right\}.$$

Die C sowohl wie die X müssen der Continuitätsgleichung genügen, also wird

$$Q_p = C_{p1} + C_{p2} + \ldots + C_{pn},$$
$$Q_p = X_{p1} + X_{p2} + \ldots + X_{pn},$$

somit

$$0 = Y_{p1} + Y_{p2} + \ldots + Y_{pn},$$

und folglich

2c) $$JH = \Sigma P_p Q_p + \Sigma R_{pq} Y_{pq}^2.$$

Digitized by Google

R und Y^2 sind positive Grössen, also ist die zweite Summe rechter Hand ebenfalls eine positive Grösse, daher ist JH ein Minimum, wenn Y in jedem Leiter verschwindet, das heisst wenn der Strom in jedem Leiter so stark ist, wie er nach dem Ohmschen Gesetze sein soll.

Daraus ergiebt sich der folgende Satz:

284. Die in einem System von Leitern, in welchem keine innern electromotorischen Kräfte wirksam sind, von Strömen entwickelte Wärmemenge hat einen kleinern Betrag, wenn die Ströme dem Ohmschen Gesetz entsprechend verteilt sind, als wenn sie nach andern Regeln, ohne Verletzung der an den Ein- und Austrittstellen geltenden Continuitätsbedingungen die Leiter durchfliessen.

Erfüllen die Ströme das Ohmsche Gesetz, so ist das mechanische Aequivalent der in den Leitern erzeugten Wärmemenge

1b) $$JH = \Sigma P_p Q_p,$$

also gleich der Summe der Producte aus den die Verzweigungsstellen durchströmenden Electricitätsmengen in die an den betreffenden Stellen herrschenden Potentiale.

Digitized by Google

Cap. VII.

Ströme in körperlichen Leitern.

Zerlegung eines electrischen Stromes.

285. Bezeichnet dS ein zur x Axe senkrechtes, innerhalb eines Conductors gelegenes Flächenelement und Q die durch dieses Flächenelement in der Zeiteinheit von der negativen zur positiven Seite der x Axe übergehende Electricitätsmenge, so heisst der Grenzwert u des Verhältnisses Q/dS für ein unendlich abnehmendes dS die an der betreffenden Stelle des Conductors geltende *Componente des electrischen Stromes* oder die *Stromcomponente* in Richtung der x Axe.

In derselben Weise sind die Componenten v, w des Stromes nach der y bezüglich z Axe zu definiren.

286. Durch diese drei in Richtung der drei Coordinatenaxen fallenden Componenten u, v, w lässt sich die Stromcomponente nach jeder andern Richtung bestimmen.

Sei OR eine durch den gegebenen Punkt O gehende Richtung, deren Richtungscosinusse vorgeschriebene Werte l, m, n haben. Eine diese Richtung im Abstande r vom Coordinatenursprung senkrecht treffende Ebene schneidet von den Axen der x, y, z die bezüglichen Stücke

$$OA = \frac{r}{l}, \quad OB = \frac{r}{m}, \quad OC = \frac{r}{n}$$

ab. Daher ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC

$$dS = \tfrac{1}{2} \frac{r^2}{lmn},$$

und dieser Flächeninhalt kann beliebig klein gemacht werden, wenn r gehörig verkleinert wird.

Die Stromcomponente γ in Richtung OR ist gleich dem Grenzwert des Quotienten aus der durch dieses Dreieck ABC in der Zeiteinheit hindurchgehenden Electricitätsmenge und aus dem Flächeninhalt von ABC für ein unendlich abnehmendes r.

Digitized by Google

Zufolge der Continuitätsbedingung ist die in das Tetraeder $OABC$ durch die drei Flächen OBC, OCA, OAB eintretende Electricitätsmenge gleich der durch die Fläche ABC aus demselben wieder austretenden, also

1') $$ABC\gamma = uOBC + vOCA + wOAB.$$

Es ist aber

$$OBC = \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{mn},\ OCA = \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{nl},\ OAB = \tfrac{1}{2}\frac{r^2}{lm},$$

somit

$$\tfrac{1}{2}\frac{r^2\gamma}{lmn} = \tfrac{1}{2}r^2\left\{\frac{u}{mn} + \frac{v}{nl} + \frac{w}{lm}\right\}.$$

Also ist die Stärke eines Stromes, der nach einer Richtung, deren Richtungscosinusse l, m, n sind, fliesst,

1a) $$\gamma = lu + mv + nw.$$

Setzt man

a) $$u^2 + v^2 + w^2 = \Gamma^2$$

und bildet drei Grössen l', m', n', die die Gleichungen

b) $$u = l'\Gamma,\ v = m'\Gamma,\ w = n'\Gamma$$

erfüllen, so ergiebt sich

1b) $$\gamma = \Gamma(ll' + mm' + nn').$$

Definirt man also die resultirende Stromintensität als einen Vector, dessen Grösse gleich Γ ist, und dessen Richtungscosinusse durch l', m', n' bestimmt werden, so ist die Stromintensität γ in einer Richtung, die mit dem resultirenden Strom den Winkel ϑ bildet,

1c) $$\gamma = \Gamma\cos\vartheta.$$

Man setzt daher Stromintensitäten nach genau denselben Regeln zusammen wie Geschwindigkeiten, Kräfte und überhaupt alle Vectorgrössen.

Stromflächen.

287. Unter *Stromfläche* verstehen wir eine in einem Leiter gelegene Fläche, durch die keine Electricität hindurchgeht, die also nur aus Stromlinien zusammengesetzt ist.

Damit eine Fläche eine Stromfläche sein soll, muss die in Richtung ihrer Normale fallende Stromcomponente verschwinden.

Ist aber

$$F(x, y, z) = \lambda$$

Digitized by Google

die Gleichung einer Classe von Flächen, die sich von einander durch den Wert des variabeln Parameters λ unterscheiden, so haben wir für die Richtungscosinusse der Normale in einem Punkte x, y, z einer der Flächen, wenn die positive Normale dahin läuft, wo λ wächst,

$$l = N\frac{\partial\lambda}{\partial x},\quad m = N\frac{\partial\lambda}{\partial y},\quad n = N\frac{\partial\lambda}{\partial z},$$

wo

$$\frac{1}{N^2} = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2$$

gesetzt ist.

Nach Gleichung 1a) des vorigen Artikels ist also die Stromcomponente in Richtung dieser Normale

$$\gamma = N\left\{u\frac{\partial\lambda}{\partial x} + v\frac{\partial\lambda}{\partial y} + w\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right\}.$$

Verschwindet γ, so ist die Fläche $F(x, y, z) = \lambda$ eine Stromfläche, und die Stromlinien liegen auf ihr selbst.

288. Eine Stromfläche $F(x, y, z) = \lambda$ muss also der Bedingung genügen

$1_1)$ $$u\frac{\partial\lambda}{\partial x} + v\frac{\partial\lambda}{\partial y} + w\frac{\partial\lambda}{\partial z} = 0.$$

Besteht diese Gleichung für alle Werte, die λ anzunehmen vermag, so sind alle Flächen der Classe $F(x, y, z) = \lambda$ Stromflächen.

289. Haben wir noch zwei andere Classen von Flächen, deren Parameter λ' bezüglich λ'' sind, und welche ebenfalls Stromflächen bilden, so ist auch

$1_2)$ $$u\frac{\partial\lambda'}{\partial x} + v\frac{\partial\lambda'}{\partial y} + w\frac{\partial\lambda'}{\partial z} = 0,$$

$1_3)$ $$u\frac{\partial\lambda''}{\partial x} + v\frac{\partial\lambda''}{\partial y} + w\frac{\partial\lambda''}{\partial z} = 0.$$

Sollen aber diese beiden Gleichungen mit der unter $1_1)$ angeführten zusammen bestehen können, so muss

2) $$\begin{vmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x}, & \frac{\partial\lambda}{\partial y}, & \frac{\partial\lambda}{\partial z} \\ \frac{\partial\lambda'}{\partial x}, & \frac{\partial\lambda'}{\partial y}, & \frac{\partial\lambda'}{\partial z} \\ \frac{\partial\lambda''}{\partial x}, & \frac{\partial\lambda''}{\partial y}, & \frac{\partial\lambda''}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

sein.

Die drei Parameter $\lambda, \lambda', \lambda''$ sind also von einander nicht unabhängig, sondern einer etwa λ'' ist durch die beiden andern bestimmt, und man hat

$$\lambda'' = \varphi(\lambda, \lambda').$$

Digitized by Google

Stromröhren.

290. Vier Stromflächen, deren Parameter $\lambda, \lambda + \delta\lambda; \lambda', \lambda' + \delta\lambda'$ sind, schliessen eine vierseitige Röhre ein, die wir durch $\delta\lambda . \delta\lambda'$ bezeichnen können. Da alle Begrenzungsflächen einer solchen Röhre Stromflächen sind, so geht durch ihre Wand keine Electricität hindurch, die Electricität fliesst lediglich auf ihrer Oberfläche, und deshalb nenne ich eine solche Röhre eine *Stromröhre* oder einen *Stromfaden*.

Die Electricitätsmenge, welche durch einen Querschnitt einer solchen Röhre eintritt, muss der Electricitätsmenge, welche durch einen andern Querschnitt derselben austritt, gleich sein. Diese Electricitätsmenge hat also für alle Querschnitte der Röhre denselben Betrag, und ich bezeichne sie deshalb durch $L\,\delta\lambda . \delta\lambda'$, wo L eine Function von λ und λ', den Parametern, welche die herausgegriffene Röhre charakterisiren, angiebt.

291. Sei δS ein zur x Axe senkrechter Querschnitt einer Stromröhre, so ist nach einem Satz aus der Theorie der Vertauschung unabhängiger Variabeln

$$\delta\lambda . \delta\lambda' = \delta S \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y} \frac{\partial\lambda'}{\partial z} - \frac{\partial\lambda}{\partial z} \frac{\partial\lambda'}{\partial y} \right),$$

und weil nach der Definition der Stromcomponenten $u\delta S = L\delta\lambda . \delta\lambda'$ ist, so folgt

$$u = L \left(\frac{\partial\lambda}{\partial y} \frac{\partial\lambda'}{\partial z} - \frac{\partial\lambda}{\partial z} \frac{\partial\lambda'}{\partial y} \right),$$

1)
$$v = L \left(\frac{\partial\lambda}{\partial z} \frac{\partial\lambda'}{\partial x} - \frac{\partial\lambda}{\partial x} \frac{\partial\lambda'}{\partial z} \right),$$

$$w = L \left(\frac{\partial\lambda}{\partial x} \frac{\partial\lambda'}{\partial y} - \frac{\partial\lambda}{\partial y} \frac{\partial\lambda'}{\partial x} \right).$$

292. Man kann nun stets, wenn eine der Functionen λ, λ' gegeben ist, die andere so bestimmen, dass L der Einheit gleich wird, und dann fällt der Factor L aus den obigen Gleichungen fort. Ziehen wir zum Beispiel in der Ebene der yz parallel der y Axe von einander immer gleich weit abstehende Linien und sehen diese als die Schnittlinien der Flächenclasse λ' mit dieser yz Ebene an, so ist λ' durch die Bedingung bestimmt, dass für $x = 0$ das $\lambda' = z$ sein soll. Nehmen wir also noch $L = 1$ an, so wird für $x = 0$

$$\lambda = \int u\,dy,$$

und die durch einen Teil der yz Ebene passirende Electricitätsmenge

$$\iint u\,dy\,dz = \iint d\lambda\,d\lambda' .$$

Digitized by Google

Hieraus folgt für $x = 0$

$$\int \lambda \, dz = \iint d\lambda \, d\lambda' .$$

Damit sind dann auch die Schnittlinien der Flächenclasse λ mit der yz Ebene bestimmt. Die Gleichung $1_1)$ des Art. 288 für λ und die ihr entsprechende $1_2)$ für λ' bestimmen dann die Formen der Flächen λ, λ' auch an allen andern Orten.

So fixirt, genügen die Functionen λ, λ' vollständig, um mit Hilfe der unter 1) in Art. 291 gegebenen Gleichungen, in welchen noch L durch die Einheit zu ersetzen ist, die Stromintensität in jedem Punkte eines Leiters zu berechnen.

Stromlinien.

293. Denkt man sich eine Reihe von Flächen λ und ebenso eine Reihe von Flächen λ' so gezogen, dass der Parameter in jeder Reihe von der einen Fläche zu der andern immer um Einheit ansteigt, so teilen die so bestimmten Flächen den Raum in ein System vierseitiger Röhren. Bei jeder dieser Röhren geht durch einen Querschnitt, der selbst geich der Einheit ist, ein Strom von der Intensitätseinheit hindurch, und indem man die Einheit möglichst klein wählt, kann man mit Hilfe dieser Röhren das Detail der Stromverteilung mit jeder gewünschten Genauigkeit angeben. Zieht man irgend eine Fläche, welche diese Röhren schneidet, so ist die vom Strom durch eine solche Fläche in der Zeiteinheit hindurchgeführte Electricitätsmenge gleich der Anzahl der Röhren, welche sie durchschneidet.

Die wirklichen Durchschnitte der Stromflächen kann man als *Stromlinien* bezeichnen, und wenn die Einheiten möglichst klein genommen sind, ist die Anzahl der Stromlinien, welche eine Fläche durchschneiden, näherungsweise gleich der Anzahl der Stromfäden, welche diese Fläche treffen.

Man kann also die Stromlinien ausser zur Festsetzung der Richtung, in der ein Strom die verschiedenen Stellen des Leiters passirt, auch noch zum Ausdrücken seiner Stärke verwenden, denn jede durch einen Querschnitt des Leiters gehende Stromlinie repräsentirt einen Strom, dessen Intensität gleich der Einheit ist.

Stromschalen und Stromfunctionen.

294. Eine Schicht eines Conductors, welche von zwei aufeinanderfolgenden Stromflächen eingeschlossen wird, heisst eine *Stromschale*. Gehören die Begrenzungsflächen der Classe λ' an, so werden die innerhalb der Schicht liegenden Stromröhren durch die Function λ bestimmt. Sind λ_A, λ_P die Werte von λ in zwei auf der Schale befindlichen Punkten A, P,

Digitized by Google

so ist die Stärke des von der rechten zur linken Hand als positiv gerechneten Stromes, welcher durch eine auf der Schale von A nach P führende Linie fliesst, gleich $\lambda_P - \lambda_A$. Wird also $AP = ds$ zum Element der auf der Schale gezogenen Curve, so giebt

$$dC = \frac{d\lambda}{ds}\, ds$$

die Stärke des durch dieses Element von der Rechten zur Linken gehenden Stromes.

Die Function λ bestimmt also vollständig die Stromverteilung auf der Schale und heisst deshalb die *Stromfunction*.

Man kann jede aus Metall oder aus sonst einem leitenden Stoff gebildete Schale, wenn sie zu beiden Seiten von einem Isolator eingefasst ist, als Stromschale betrachten. Die Verteilung der Ströme in einer solchen Schale bestimmt sich also durch die Stromfunction. Näheres darüber findet man in Art. 647.

Continuitätsgleichung.

295. Differenzirt man die drei unter 1) in Art. 291 gegebenen Gleichungen bezüglich nach x, y, z, beachtet, dass L eine Function von λ und λ' ist, und addirt die Resultate, so folgt

$$1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichung entspricht völlig der in der Hydrodynamik als Continuitätsgleichung bekannten Relation. Die Continuität, welche diese Gleichung ausspricht, ist die Continuität der Existenz. Die Gleichung drückt also die Tatsache aus, dass eine Materie von einer Stelle zu einer andern nicht übergehen kann, ohne alle Zwischenstellen passirt zu haben. Eine Materie kann nicht an einer Stelle verschwinden und an einer andern Stelle wieder auftauchen, vielmehr muss sie, wenn sie sich bewegt, eine ununterbrochene Bahn beschreiben, und sie muss durch jede Fläche hindurchgehen, welche zwei ihrer Lagen von einander trennt.

Die allgemeinste Form der Continuitätsgleichung der Hydrodynamik ist

$$2) \qquad \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

ρ bezeichnet das Verhältnis einer Quantität der Substanz zu dem sehr kleingedachten Volumen, welches die Quantität einnimmt, ρu, ρv, ρw sind die Verhältnisse der durch Flächenelemente, welche senkrecht zu den Coordinatenaxen stehen, in der Zeiteinheit hindurchgehenden Substanzmengen

Digitized by Google

zu den Inhalten der betreffenden Elemente. So interpretirt ist jene Gleichung auf jede beliebige Substanz anwendbar, auf flüssige, wie auf feste und nicht minder auf gasförmige. Sie gilt auch für discontinuirliche wie für continuirliche Bewegungen, wenn nur die Existenz jedes einzelnen Teilchens der Substanz selbst eine continuirliche ist. Auch bei Grössen, die nicht Substanzen sind, drückt jene Gleichung die Bedingung der stetigen Existenz in Zeit und Raum aus. Sie gilt, wie wir sehen, für strömende Electricität und findet sich noch in anderen Teilen der Physik, so zum Beispiel in der Lehre vom Magnetismus. Wir werden sie, um auf ihre Form hinzuweisen, immer als *Continuitätsgleichung* bezeichnen, wenn auch die Grössen, auf die sie sich bezieht, nicht die Eigenschaften von Materie haben und auch nicht einmal stetig in Raum und Zeit existiren sollten.

Die für unsern Fall giltige Gleichung 1) ergiebt sich aus der allgemeinen Relation unter 2), wenn man $\rho = \text{const} = 1$ setzt, das heisst, wenn die Substanz isotrop und incompressibel ist. Man kann sie auch, wenn es sich um Flüssigkeiten handelt, nach irgend einer anderen der in der Hydrodynamik gebräuchlichen Methoden ableiten. Bei einer dieser Methoden verfolgt man jedes Flüssigkeitselement auf seiner Bewegungsbahn und untersucht seinen Lauf und seine Deformation in jedem Zeitpunkte. Bei der andern bleibt man an einer und derselben Stelle des Raumes und betrachtet die Vorgänge in den diese Stelle passirenden Flüssigkeitsteilchen. Bei electrischen Strömen lässt sich die erste Methode nicht anwenden, da man weder von der Geschwindigkeit noch von der Richtung der Bewegung der Electricität etwas weiss. Man kennt nur den algebraischen Betrag der Electricitätsmenge, welche durch eine Flächeneinheit in der Zeiteinheit hindurchgeht, also eine Quantität, die der in der Gleichung 2) vertretenen Grösse ρu entspricht. Daher vermag man weder ρ noch u für sich zu bestimmen, und es ist nicht möglich die Bewegung und Veränderung eines Electricitätsteilchens bei seinem Durchgang durch einen Körper zu verfolgen. Dagegen lässt sich die zweite Methode ohne Schwierigkeit auf electrische Ströme anwenden, und sie ist vielleicht der Ableitung, die ich hier für die Continuitätsgleichung gegeben habe, vorzuziehen. Man findet sie aber in jedem Handbuch über Hydrodynamik auseinandergesetzt, und deshalb möchte ich sie hier nicht nochmals wiederholen.

Electricitätsmenge, welche durch eine gegebene Fläche hindurchgeht.

296. Sei dS ein Element einer in einem Leiter gezogenen Fläche S, Γ die resultirende Stromintensität daselbst und ε der Winkel zwischen der Stromrichtung und der Normale von dS. Die gesammte in der Zeiteinheit durch diese Fläche hindurchgeführte Electricitätsmenge ist dann

Digitized by Google

1a) $$E = \iint \Gamma \cos\varepsilon \, dS.$$

wo die Integration sich über die ganze Fläche S erstreckt.

Das Flächenintegral lässt sich nach Art. 21 in ein Raumintegral verwandeln, und man hat darnach auch

1b) $$E = \iiint \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz.$$

Ist die Fläche geschlossen, so bezieht sich die Raumintegration auf den ganzen von S eingefassten Raum, und das Integral giebt dann die ganze von der Fläche S in der Zeiteinheit ausströmende bezüglich in dieselbe einströmende Electricitätsmenge. Bei stationären Strömen muss diese Menge, wie gross oder wie klein auch der Raum sein mag, verschwinden, und daraus folgt dann wieder die Continuitätsgleichung 1) des vorigen Artikels.

Digitized by Google

Cap. VIII.

Widerstand und Leitung in körperlichen Leitern.

—x—

Allgemeinste Beziehungen zwischen Stromstärke und electromotorischer Kraft.

297. Die electromotorische Kraft in einem Punkte ist die auf eine in diesem Punkte concentrirte Einheit positiver Electricität wirkende Kraft. Sie kann erstens durch gewöhnliche electrostatische Wirkung hervorgebracht werden und hat dann die Componenten

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

wo V das Potential im Punkte x, y, z angiebt. Zweitens kann sie durch electromagnetische Induction verursacht werden, deren Gesetze wir später noch kennen zu lernen Gelegenheit haben werden. Drittens kann sie von thermoelectrischen oder electrochemischen Wirkungen, die in dem betreffenden Punkt selbst vor sich gehen, und von ihm einen Strom in bestimmte Richtung auszusenden suchen, herrühren.

Ich werde ganz allgemein unter X, Y, Z die Componenten der electromotorischen Kraft, welchen Actionen diese auch ihre Entstehung verdankt, bezeichnen und nur in speciellen Fällen die Resultate für die Annahme discutiren, dass sie durch Variation des Potentials hervorgerufen wird.

Da nach dem Ohmschen Gesetz die Stromstärke proportional der electromotorischen Kraft ist, so müssen X, Y, Z lineare Functionen der Stromcomponenten u, v, w sein, also haben wir

$$1) \qquad \begin{aligned} X &= R_1 u + Q_3 v + P_2 w, \\ Y &= P_3 u + R_2 v + Q_1 w, \\ Z &= Q_2 u + P_1 v + R_3 w. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Die Grössen R bezeichne ich als die Coefficienten des *Longitudinalen Widerstandes* der betreffenden Materie in Richtung der Coordinatenaxen.

Die Grössen P und Q kann man dann als Coefficienten des *Transversalen Widerstandes* ansehen. Sie zeigen an, dass eine in einer gegebenen Richtung wirkende electromotorische Kraft Ströme hervorrufen kann, die nach andern Richtungen fortfliessen.

Hätten wir die Freiheit, einen festen Körper als aus linearen Leitern zusammengesetzt zu betrachten, so würde aus der in Art. 281 für zwei Leiter eines Systems nachgewiesenen reciproken Eigenschaft folgen, dass man, um in Richtung der y Axe einen Einheitsstrom hervorzurufen, in Richtung der z Axe eine ebenso grosse electromotorische Kraft wirken lassen muss, wie in Richtung der y Axe, wenn ein Einheitsstrom in Richtung der z Axe fliessen soll. Hieraus würde dann folgen $P_1 = Q_1$ und ähnlich $P_2 = Q_2$, $P_3 = Q_3$. Bei Körpern, in denen diese drei Bedingungen wirklich erfüllt sind, heisst das System der Widerstandscoefficienten *Symmetrisch*, bei Körpern, deren Beschaffenheit die Existenz jener Bedingungen nicht zulässt, heisst es *Asymmetrisch*.

Wahrscheinlich sind für alle Körper, mit denen man es in der Natur zu tun hat, die Systeme der Coefficienten symmetrisch, ich werde aber auch einige Beziehungen für nicht symmetrische Systeme ableiten.

298. Aus den Gleichungen 1) des vorigen Artikels kann man umgekehrt die Stromcomponenten als lineare Functionen der electromotorischen Kraftcomponenten darstellen und hat dann

$$\begin{aligned} u &= r_1 X + p_3 Y + q_2 Z, \\ v &= q_3 X + r_2 Y + p_1 Z, \\ w &= p_2 X + q_1 Y + r_3 Z. \end{aligned} \qquad 2)$$

Die Grössen r bezeichne ich als die Coefficienten der *Longitudinalen Leitungsfähigkeit*, die p und q als die der *Transversalen Leitungsfähigkeit*. Alle Coefficienten sind natürlich durch die R, P, Q bestimmt.

Giebt $[PQR]$ die Determinante der Widerstandscoefficienten und $[pqr]$ die der Leitungscoefficienten, so hat man zunächst

$$\alpha) \quad [PQR] = P_1 P_2 P_3 + Q_1 Q_2 Q_3 + R_1 R_2 R_3 - P_1 Q_1 R_1 - P_2 Q_2 R_2 - P_3 Q_3 R_3,$$

$$\beta) \quad [p\,q\,r] = p_1 p_2 p_3 + q_1 q_2 q_3 + r_1 r_2 r_3 - p_1 q_1 r_1 - p_2 q_2 r_2 - p_3 q_3 r_3,$$

$$\gamma) \quad [PQR]\,[pqr] = 1,$$

und dann Relationen zwischen den P, Q, R und den p, q, r, von denen zwei hingeschrieben werden sollen, nämlich

$$\delta) \quad [PQR]\,p_1 = (P_2 P_3 - Q_1 R_1), \quad [pqr]\,P_1 = (p_2 p_3 - q_1 r_1).$$

Alle folgenden erhält man durch cyklische Vertauschung der Symbole P, Q, R, p, q, r und der Indices $1, 2, 3$.

Digitized by Google

Wärmeentwickelung im Leiter.

299. Die Arbeit, die der Strom bei der Ueberwindung des Widerstandes in der Zeiteinheit leistet, und welche als Wärme im Leiter zum Vorschein kommt, ist gleich der Summe der Producte aus den Stromcomponenten in die entsprechenden Componenten der electromotorischen Kraft.

Wir haben also für diese Arbeit den Ausdruck

1a) $$W = Xu + Yv + Zw.$$

Je nachdem man die Gleichungen 1) oder 2) des vorhergehenden Artikels verwendet, erhält man diese Arbeit durch die Stromcomponenten, bezüglich durch die Kraftcomponenten ausgedrückt, also entweder

1b) $$W = R_1u^2 + R_2v^2 + R_3w^2 + (P_1 + Q_1)vw + (P_2 + Q_2)wu + (P_3 + Q_3)uv,$$

oder

1c) $$W = r_1X^2 + r_2Y^2 + r_3Z^2 + (p_1 + q_1)YZ + (p_2 + q_2)ZX + (p_3 + q_3)XY.$$

Durch geeignete Wahl der Coordinatenaxen kann man in jeder der beiden Formen für W die Glieder, welche die Producte der Strom- bezüglich Kraftcomponenten enthalten, zum Verschwinden bringen. Das Axensystem, welches den Ausdruck für die Arbeit auf

1_1b) $$W = R_1u^2 + R_2v^2 + R_3w^2$$

reducirt, fällt aber im allgemeinen nicht mit dem zusammen, welches diese Arbeit durch

1_1c) $$W = r_1X^2 + r_2Y^2 + r_3Z^2$$

darzustellen gestattet. Setzt man nämlich mit Thomson*)

a) $$P = S + T, \quad Q = S - T;$$

b) $$p = s + t, \quad q = s - t,$$

so wird

$$P + Q = 2S, \quad p + q = 2s.$$

Es ist aber

$$[PQR] = R_1R_2R_3 + 2S_1S_2S_3 - S_1^2R_1 - S_2^2R_2 - S_3^2R_3 + 2(S_1T_2T_3 + S_2T_3T_1 + S_3T_1T_2) + R_1T_1^2 + R_2T_2^2 + R_3T_3^2$$

$$[PQR]\,r_1 = R_2R_3 - S_1^2 + T_1^2,$$

$$[PQR]\,s_1 = T_2T_3 + S_2S_3 - R_1S_1,$$

$$[PQR]\,t_1 = -R_1T_1 + S_2T_3 + S_3T_2,$$

und daraus ersieht man, dass wenn ein Axensystem so gewählt ist, dass die S verschwinden, also die Gleichung 1b) in die 1_1b) übergeht, die s nicht gleichzeitig fortzufallen brauchen, wenn nicht ausser den S auch die T sich auf Null reduciren.

*) *Trans. R. S.* Edin. 1853—4 p. 165.

Digitized by Google

Bedingung der Stabilität.

300. Da das Gleichgewicht der Electricität stabil ist, so muss die Arbeit, die zur Unterhaltung des Stromes nötig ist, positiv sein. Dazu ist erforderlich, dass erstens die drei Coefficienten

$$R_1, R_2, R_3$$

und dann noch die drei Ausdrücke

$$4R_2R_3 - (P_1 + Q_1)^2,$$
$$4R_3R_1 - (P_2 + Q_2)^2,$$
$$4R_1R_2 - (P_3 + Q_3)^2,$$

positive Werte haben.

Entsprechenden Bedingungen sind die Leitungscoefficienten unterworfen.

Continuitätsgleichung in homogenen Medien.

301. Sind die Componenten der electromotorischen Kraft speciell gleich den Derivirten des Potentials V, so geht die Continuitätsbedingung

1') $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

unter Benutzung der in Art. 297 gegebenen Ausdrücke für die Stromcomponenten und der im vorvorigen Artikel eingeführten Grössen s über in

1) $$r_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + r_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + r_3 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + 2s_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z} + 2s_2 \frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x} + 2s_3 \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Für isotrope Medien ist $s_1 = s_2 = s_3 = 0$; $r_1 = r_2 = r_3$, und die Continuitätsgleichung fällt mit der früher schon angegebenen Laplaceschen Gleichung zusammen.

Bei nicht homogenen Medien ändern sich die Leitungscoefficienten, wenn man von einem Punkte zu einem andern übergeht.

302. Ich setze

a) $$[rs] = r_1r_2r_3 + 2s_1s_2s_3 - r_1{s_1}^2 - r_2{s_2}^2 - r_3{s_3}^2$$

und bilde sechs Grössen A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3, die den Gleichungen

b) $$[rs]\,A_1 = r_2r_3 - {s_1}^2,$$
$$[rs]\,B_1 = s_2s_3 - r_1s_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

genügen. Im Falle, dass die Coefficienten T verschwinden, fallen die Coefficienten A und B mit den R und S zusammen. Sind dagegen die

Digitized by Google

Coefficienten T von Null verschieden, so haben A und B andere Werte als R und S. Macht man nunmehr

c) $$[AB] = A_1 A_2 A_3 + 2 B_1 B_2 B_3 - A_1 B_1^2 - A_2 B_2^2 - A_3 B_3^2$$

und

1) $$A_1 x^2 + A_2 y^2 + A_3 z^2 + 2 B_1 yz + 2 B_2 zx + 2 B_3 xy = [AB]\rho^2,$$

so ist

2) $$V = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{\rho},$$

wo c eine Constante bedeutet, eine Lösung der in Art. 301 unter 1) angegebenen Differentialgleichung.

Fliesst also Electricität in einem unendlich ausgedehnten homogenen Medium von einem Centrum aus, so sind die äquipotentiellen Flächen confocale Ellipsoide, deren Gleichungen durch 1) dargestellt werden, deren Centren mit dem Ausströmungspunkt zusammenfallen, und deren Axen mit den Hauptaxen der Leitungsfähigkeit, also in Körpern, deren Coefficienten ein symmetrisches System bilden, auch mit denen des Widerstandes coincidiren. Man kann die Gleichung 1) so transformiren, dass die Coordinaten-Axen in die Hauptaxen der Leitungsfähigkeit fallen. Die Coefficienten s, also auch die B, verschwinden dann, und die A gehen in die reciproken Werte der entsprechenden r über. Die Gleichung für ρ wird aber

1a) $$\frac{x^2}{r_1} + \frac{y^2}{r_2} + \frac{z^2}{r_3} = \frac{\rho^2}{r_1 r_2 r_3}.$$

Transformation der Widerstandsgleichungen.

303. Die allgemeine Theorie des vollständigen Systems der Gleichungen für Widerstand und Leitungsfähigkeit in homogenen Medien fällt mit der Theorie linearer homogener Functionen dreier Variabeln zusammen, wie sie in der Lehre von den Deformationen elastischer Körper*) und in noch andern Gebieten der Physik zur Anwendung kommt. Am meisten geeignet zur Behandlung solcher Gleichungssysteme dürfte die Methode, deren sich Hamilton und Tait zur Untersuchung einer linearen und Vectorfunction eines Vectors bedienen. Ich gehe ein wenig darauf ein, ohne aber die in der Quaternionentheorie üblichen Symbole zu benutzen.

Man kann die drei Coefficienten T_1, T_2, T_3 als die zu einander rechtwinkligen Componenten eines Vectors T betrachten, dessen absolute Grösse und Richtung für jeden Körper charakteristisch und unabhängig von der Wahl der Lage des Coordinatensystems ist.

Dasselbe gilt von den Coefficienten t_1, t_2, t_3, die man ebenfalls als Componenten eines andern für das Medium charakteristischen Vectors t

*) Thomson und Tait, *Theoretische Physik* § 154.

Digitized by Google

ansehen darf. Die Vectoren T und t sind im allgemeinen nicht gleich gerichtet.

Nimmt man die Richtung des Vectors T zur z Axe, so gehen die Widerstandsgleichungen über in

$$X = R_1 u + S_3 v + S_2 w - Tv,$$
$$Y = S_3 u + R_2 v + S_1 w + Tu,$$
$$Z = S_2 u + S_1 v + R_3 w.$$

Aus dieser Form erhellt, dass die electromotorische Kraft als die Resultante zweier Kräfte betrachtet werden kann, deren eine von den Coefficienten R und S abhängt, während die andere durch T allein bestimmt wird. Der Teil der Kraft, der von R und S bestimmt wird, steht zu dem Strome in demselben Verhältnis, wie das Perpendikel auf die Tangentialebene eines Ellipsoids zu dem nach dem Berührungspunkt gezogenen Radiusvector. Der zweite Teil der Kraft ist gleich dem Product von T in die senkrecht zu T verlaufende Componente des Stromes. Er wirkt senkrecht zum Vector T und zu dieser Stromcomponente immer in der Richtung, wohin die Stromcomponente fallen würde, wenn man sie um 90^0 in positiver Richtung um T herumdreht.

Betrachtet man den Strom und die Grösse T als Vectoren, so ist dieser zweite von T allein abhängige Teil der electromotorischen Kraft gleich dem Vectorteil des Products aus T und der Stromstärke.

Viele Erfahrungen sprechen dafür, dass der Coefficient T in allen bekannten Substanzen verschwindet. Wenn er überhaupt physikalische Existenz hat, so darf man erwarten, ihn noch am ehesten bei Magneten vorzufinden, welche nach einer bestimmten Richtung eine Polarisation zeigen, die wahrscheinlich in der Substanz vor sich gehenden Rotationsbewegungen ihre Entstehung verdankt.

Ich werde T als den Rotationscoefficienten bezeichnen.

Der Thomsonsche Satz in der Electrokinematik.

304. Unter der Annahme, dass in homogenen Substanzen der zweite Teil der electromotorischen Kraft nicht existirt, T also gleich Null ist, lässt sich der in Art. 100 bewiesene Thomsonsche Satz auch auf die Electrokinematik ausdehnen und nachweisen, dass die in einem System in gegebener Zeit factisch entwickelte Wärmemenge den kleinsten Betrag hat, wenn die electromotorische Kraft den aus dem Ohmschen Satz sich ergebenden Bedingungen gehorcht.

Wenn T verschwindet, so reducirt dieselbe Coordinatentransformation beide unter 1b) und 1c) in Art. 299 für die entwickelte Wärmemenge ge-

Digitized by Google

gebenen Formen auf ihre einfachste in den Gleichungen 1_1b) und 1_1c) angeführte Gestalt. Die Continuitätsbedingung geht dann über in

$$r_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + r_2 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + r_3 \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Ich wähle drei Grössen a, b, c, die den Gleichungen

a)
$$a = -r_1 \frac{\partial V}{\partial x} + u,$$
$$b = -r_2 \frac{\partial V}{\partial y} + v,$$
$$c = -r_3 \frac{\partial V}{\partial z} + w,$$

b)
$$\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0$$

genügen, und bilde damit das dreifache Integral

1a)
$$W = \iiint (R_1 a^2 + R_2 b^2 + R_3 c^2)\, dx\, dy\, dz.$$

Die Grenzen des Integrals W sollen so wie in Art. 100 gewählt werden, also so, dass auf gewissen Teilen, der den Raum begrenzenden Flächen, V constant ist, und dass, wenn die Normalcomponente des Vectors a, b, c gegeben ist, ausserdem noch das Flächenintegral dieser Componente über die ganze Begrenzungsfläche verschwindet.

Nach Einführung der Werte für a, b, c wird unter Beachtung der Beziehungen

c)
$$R_1 r_1 = 1,\ R_2 r_2 = 1,\ R_3 r_3 = 1,$$

$$W = \iiint \left[r_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + r_2 \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + r_3 \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz$$
$$+ \iiint \left[R_1 u^2 + R_2 v^2 + R_3 w^2 \right] dx\, dy\, dz$$
$$- 2 \iiint \left[u \frac{\partial V}{\partial x} + v \frac{\partial V}{\partial y} + w \frac{\partial V}{\partial z} \right] dx\, dy\, dz.$$

Aus den Auseinandersetzungen des schon citirten Artikels 100 folgt dann, weil

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

an den Grenzflächen verschwindet, dass das dritte Integral rechter Hand fortfällt, demnach

Digitized by Google

1b) $$W = \iiint \left[r_1 \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + r_2 \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + r_3 \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2 \right] dx\,dy\,dz$$
$$+ \iiint \left[R_1 u^2 + R_2 v^2 + R_3 w^2 \right] dx\,dy\,dz.$$

wird. Die beiden bleibenden Integrale sind positiv, demnach wird W ein Minimum, wenn man

$$u = v = w = 0,$$

also

a_1) $$a = -r_1 \frac{\partial V}{\partial x},\ b = -r_2 \frac{\partial V}{\partial y},\ c = -r_3 \frac{\partial V}{\partial z}.$$

annimmt.

Daraus folgt unmittelbar noch das folgende Theorem.

Wenn auf einem Teil der Oberfläche eines Körpers die Potentialverteilung und auf dem andern Teil die Stromverteilung gegeben ist, so ist die Potentialverteilung innerhalb des Körpers eindeutig bestimmt.

Eindeutigkeit des Problems der Stromverteilung.

305. Ich gebe für diesen Satz wegen seiner grossen Wichtigkeit für die Theorie der Electricität noch einen zweiten Beweis, der ganz allgemein gilt und von allem analytischen Beiwerk frei ist.

Welche Form auch ein Conductor hat, und wie er in seinem Innern beschaffen sein mag, ob homogen oder heterogen, die Fortpflanzung der Electricität durch ihn richtet sich immer nach folgenden Regeln:

1) Eine in Richtung des Weges des electrischen Stromes gezogene Linie geht stets von Orten höhern zu Orten niederern Potentials.

2) Aendert sich das Potential in jedem Punkt des Leiters in vorgeschriebener gleichmässiger Weise, so ändert sich nach dem Ohmschen Gesetz die Stromstärke in ganz demselben Verhältnis.

3) Ist eine gewisse Potentialverteilung Ursache zur Entstehung einer gewissen Stromverteilung, und bringt eine andere Potentialverteilung eine andere Stromverteilung zu Stande, so entsteht durch eine dritte Potentialverteilung, in der das Potential in jedem Punkte gleich der Summe oder Differenz der beiden Potentiale in den beiden ersten Verteilungen ist, eine derartige Stromverteilung, dass die gesammte vom Strom durch ein gegebenes endliches Flächenstück in der Zeiteinheit durchgeführte Electricitätsmenge gleich ist der Summe bezüglich der Differenz der von den beiden ersten Stromverteilungen in derselben Zeit durch dasselbe Flächenstück durchgeführten Electricitätsmengen. Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich aus der Bemerkung, dass nach dem Ohmschen Gesetz die durch eine Aenderung einer gegebenen Potentialverteilung hervorgerufene Stromverteilung unabhängig von der schon existirenden Stromverteilung ist.

Digitized by Google

4) Hat das Potential in allen Punkten einer geschlossenen Fläche einen und denselben Wert und befinden sich innerhalb der Fläche keine Electroden und auch keine inneren electromotorischen Kräfte, so existirt innerhalb der Fläche auch kein electrischer Strom, und das Potential hat in allen Punkten im Innern der Fläche denselben Wert wie auf der Fläche.

Cursiren nämlich Ströme innerhalb der geschlossenen Fläche, so laufen ihre Bahnen entweder innerhalb der Fläche in sich zurück, oder sie fangen innerhalb der Fläche an und enden auch daselbst, oder sie gehen von der Fläche aus und enden in der Fläche. Ein Strom fliesst aber von Orten höhern zu Orten niederern Potentials, also kann er schon nicht innerhalb der Fläche in sich zurücklaufen, weil dort keine electromotorischen Kräfte vorhanden sein sollten. Weiter sollten auch keine Electroden, das heisst keine Anfangs- und Endpunkte von Strömen da sein, folglich kann kein Strom innerhalb der Fläche anfangen und auch aufhören. Endlich ist das Potential in allen Punkten der Fläche von derselben Grösse, es vermag also auch kein Strom von einem Punkt der Fläche zu einem andern zu fliessen.

Es existiren demnach keine Ströme innerhalb der Fläche, es können also auch keine Potentialdifferenzen daselbst vorhanden sein, weil solche sofort Ströme hervorrufen würden, und es muss in allen Punkten des abgeschlossenen Gebietes der Potentialwert herrschen, welcher sich auf der Grenzfläche vorfindet.

5) Geht kein Strom durch eine geschlossene Fläche und befinden sich innerhalb der Fläche weder Electroden noch innere electromotorische Kräfte, so laufen auch innerhalb dieser Fläche keine Ströme und das Potential hat überall denselben Wert.

Aus 4) folgt schon, dass innerhalb der Fläche weder in sich zurücklaufende Ströme noch daselbst anfangende und endende Ströme existiren können, und da nach den Bedingungen dieses Satzes auch durch die Oberfläche Ströme weder ein- noch austreten sollen, so giebt es innerhalb der Fläche überhaupt keine Ströme und das Potential muss überall einen und denselben Wert haben.

6) Hat das Potential in allen Punkten eines Teiles einer geschlossenen Fläche einen und denselben Wert und gehen durch den übrigen Teil der Fläche keine Ströme, so existiren auch innerhalb der Fläche keine Ströme, wenn daselbst weder Electroden noch electromotorische Kräfte vorhanden sind. Das Potential ist überall constant.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge der beiden vorangehenden Sätze.

7) Kennt man für alle Punkte eines Teiles der Oberfläche eines Körpers den Wert des Potentials und kennt man ferner die Ströme, welche durch die Punkte des andern Teiles der Fläche des Körpers hindurchgehen, so ist die Potentialverteilung in dem Körper eindeutig bestimmt.

Wir nehmen an, das Potential hätte in einem Punkte des Körpers zwei Werte V_1 und V_2, dann ist $V_1 - V_2$ ebenfalls eine mögliche Potential-

Digitized by Google

verteilung. Auf dem Teil der Fläche, wo das Potential bekannt ist, wird also bei dieser letzten Potentialverteilung das Potential verschwinden und auf dem Teil, wo die Stromverteilung gegeben ist, werden die Ströme aufhören. Nach dem Satz 6) wird also bei dieser dritten Potentialverteilung das Potential auch innerhalb der Fläche den Wert Null haben müssen, das heisst $V_1 - V_2 = 0$, also $V_1 = V_2$ sein. Es giebt also nur eine mögliche Potentialverteilung, gleichgiltig von wie vielen Flächen der Körper begrenzt sein mag, und das war es, was ich beweisen wollte.

Näherungsweise Berechnung des Widerstandes eines Conductors von gegebener Form.

306. Ich habe schon in Art. 273 bemerkt, dass man von einem bestimmten Widerstande eines Leiters nur sprechen kann, wenn er auf seiner Begrenzungsfläche nur zwei Stellen hat, durch die Electricität ein- bezüglich austreten kann. Demnach nehme ich an, dass der Conductor auf seiner Oberfläche zwei Stellen besitzt, auf deren jeder das Potential einen constanten für die beiden Stellen verschiedenen Betrag hat, und dass der Rest der Oberfläche undurchgängig für Electricität ist. Einen solchen Zustand erreichen wir dadurch, dass wir an den Conductor zwei vollständig leitende Electroden fest anlegen und den Rest der Oberfläche mit einer vollständig nicht leitenden Substanz bedecken.

Unter solchen Umständen ist die Stromstärke in jedem Teile des Leiters einfach proportional der Differenz der Potentiale auf den Electroden. Bezeichnet man diese Differenz der Potentiale auf den Electroden als electromotorische Kraft, so ist die gesammte Stromstärke im Conductor von einer Electrode zur andern specieller gleich dem Product aus der electromotorischen Kraft in die Leitungsfähigkeit des ganzen Conductors. Daraus ergiebt sich dann die Definition des Widerstandes des ganzen Conductors als des reciproken Betrages der Leitungsfähigkeit. Sie hat aber nur bei in der angegebenen Weise zugerichteten Leitern einen bestimmten Sinn.

Näherungsweise werden die obigen Bedingungen von einer Widerstandsrolle, einem dünnen Draht, der an den Enden mit grossen Kupfermassen in Verbindung gesetzt ist, erfüllt. Die grossen Kupfermassen bilden die Electroden, innerhalb deren die Potentiale so wenig variiren, dass man die grösste in einer Electrode vorkommende Potentialdifferenz gegen die Potentialdifferenz beider Electroden gegeneinander vernachlässigen darf.

Für solche Leiter hat, so viel ich weiss, Rayleigh zuerst in einer Abhandlung über die Theorie der Resonanz*) eine Methode zur Berechnung ihres Widerstandes angegeben.

Ich habe von dieser Methode schon in Art. 102 gesprochen und gehe jetzt näher darauf ein.

*) *Phil. Trans.* 1871, p. 77.

Digitized by Google

Sie beruht auf folgenden Ueberlegungen.

Aendert man den Widerstand eines Teiles des Conductors, so ändert sich der Widerstand des gesammten Conductors, und zwar wächst er an oder nimmt ab, je nachdem man den Widerstand des betreffenden Teiles vermehrt oder verringert.

Man kann dieses Princip als selbstverständlich betrachten, man kann aber auch mit Hilfe früherer Theoreme direct nachweisen, dass der Widerstand eines Systems von Leitern zwischen zwei Stellen, die zu Electroden gewählt werden, anwächst, wenn der eines einzelnen Teiles dieses Systems vermehrt wird.

Daraus folgt, dass der Widerstand eines Conductors als solcher durch eine in seinem Innern befindliche sehr dünne Schale von vollständig leitendem Material vermindert wird, wenn die Fläche dieser Schale nicht gerade zu den äquipotentiellen Flächen des Conductors in seinem natürlichen Zustande gehört, wo an sich electrisches Gleichgewicht herrscht und die Einführung der Schale gar keinen Effect hervorbringt.

Zieht man also in dem Leiter eine Reihe von Flächen, deren erste mit der Fläche der ersten Electrode und deren letzte mit der Fläche der zweiten Electrode zusammenfällt, während die Zwischenflächen in dem nichtleitenden Teil der Oberfläche des Conductors enden und einander nicht durchsetzen, denkt man sich ferner jede dieser Flächen als aus einer dünnen Schicht einer vollkommen leitenden Substanz bestehend, so erhält man ein System, dessen Widerstand sicher nicht grösser als der des ursprünglichen Conductors ist, dessen Widerstand aber dem des Conductors gleich wird, wenn die eingeführten Flächen mit den äquipotentiellen Flächen des Conductors in seinem natürlichen Zustande zusammenfallen.

Es ist nun viel leichter, den Widerstand des anscheinend complicirtern Systems zu berechnen, als den des ursprünglichen Conductors. Der Widerstand dieses Systems setzt sich nämlich algebraisch aus den Einzelwiderständen der Schichten zusammen, aus welchen das System besteht. Der Widerstand einer von zwei Flächen begrenzten Schicht lässt sich aber in folgender Weise berechnen.

Es sei dS ein Element der Grenzfläche einer Schicht, ν die Dicke der Schicht in zu diesem Element senkrechter Richtung, ρ ihr specifischer Widerstand, E die Potentialdifferenz der beiden die Schicht einschliessenden, aus vollkommen leitendem Material hergestellten Flächen und dC die Stärke des durch dS fliessenden Stromes, dann ist nach dem Ohmschen Gesetz

$$dC = E \frac{1}{\rho \nu} dS,$$

und die gesammte durch die Schicht in der Zeiteinheit hindurchgeführte Electricitätsmenge

a) $$C = E \iint \frac{1}{\rho \nu} dS,$$

Digitized by Google

wo sich die Integration über die ganze Fläche der durch die nichtleitende Oberfläche des Conductors begrenzten Schicht erstreckt.

Der Widerstand einer solchen Schicht ist also

1_1a) $$R' = \frac{E}{C} = \frac{1}{\iint \frac{1}{\rho\nu}\, dS}.$$

Wird die Schicht durch zwei Flächen begrenzt, welche durch die Functionen F und $F + dF$ charakterisirt sind, so hat man

$$\frac{dF}{\nu} = \nabla F = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

somit

1_1b) $$R' = \frac{dF}{\iint \frac{\nabla F}{\rho} dS}.$$

Hieraus folgt für den Widerstand des ganzen zusammengesetzten Conductors

1) $$R_1 = \int \frac{dF}{\iint \frac{\nabla F}{\rho} dS}.$$

Der Widerstand R des ursprünglichen Conductors ist grösser als das so bestimmte R_1, und diesem nur dann gleich, wenn alle Flächen F mit den dem ursprünglichen Conductor naturgemäss zugehörigen äquipotentiellen Flächen zusammenfallen. Da weiter der wahre Wert von R gleich dem absoluten Maximum von R_1 ist, und eine Function in der Nähe ihrer Grenzwerte im allgemeinen wenig variirt, so bringt eine kleine Abweichung der gewählten Flächen vor der Form der eigentlichen äquipotentiellen Flächen einen verhältnismässig geringen Fehler in der Bestimmung von R hervor.

Offenbar ist diese Methode zur Bestimmung der untern Grenze des Widerstandes von sehr allgemeiner Anwendbarkeit. Sie kann auf Leiter jedweder Form und jedweder Beschaffenheit übertragen werden und ist auch davon unabhängig, ob der specifische Widerstand ρ von Punkt zu Punkt variirt oder nicht.

Das bekannteste Beispiel bietet die Bestimmung des Widerstandes eines Drahtes von variabelem Querschnitt. Hier sind die zu wählenden Flächen, die Axe des Drahtes senkrecht schneidende Ebenen, die Schichten haben also parallele ebene Begrenzungsflächen, demnach ist der Widerstand einer Schicht von der Dicke ds und dem Querschnitt S

$$R' = \frac{\rho\, ds}{S}.$$

Digitized by Google

Der Widerstand einer Länge s des Drahtes wird daher näherungsweise

2) $$R = \int_0^s \frac{\rho\, ds}{S}.$$

Weiss man, wie der Querschnitt variirt, welche Function er von s ist, und wie ρ eventuell von s abhängt, so lässt sich die Integration ausführen.

Bei Drähten, deren Querschnitt nur schwach mit der Länge abändert, erhält man so einen Wert für den Widerstand, der sich genügend genau dem wahren Werte desselben anschliesst, inzwischen ist das so bestimmte R immer nur die untere Grenze für den Widerstand.

307. Um noch eine obere Grenze für den Widerstand angeben zu können, legen wir wieder innerhalb des Conductors Flächen, die wir aber diesmal als für Electricität vollkommen undurchgängig annehmen. Zwei Systeme solcher Flächen zerlegen den Conductor in einzelne Röhren, die den Strom der Electricität reguliren. Dadurch wird der Widerstand des Conductors vermehrt und bleibt nur dann ganz ungeändert, wenn diese Flächen mit den Stromflächen des Conductors, die Röhren also mit den Stromröhren in seinem natürlichen Zustande zusammenfallen. Der Widerstand jeder Röhre kann aber nach der für feine Drähte im vorigen Artikel schon auseinandergesetzten Methode berechnet werden. Summirt man dann die reciproken Werte der Widerstände der einzelnen Röhren, so erhält man nach Art. 276 eine untere Grenze für den reciproken Betrag des Widerstandes des Conductors in seiner natürlichen Beschaffenheit. Je mehr sich die Flächen den eigentlichen Stromflächen des Conductors anschliessen, desto mehr fällt dieser angenäherte Wert für seine Leitungsfähigkeit mit dem wahren Werte zusammen.

Als Beispiel betrachte ich den Fall eines verlängerten Rotationskörpers, in welchem die x Coordinaten längs der Axe gemessen werden und der Radius eines durch einen Punkt gelegten Querschnittes gleich b ist. Von den beiden Systemen nicht leitender Flächen, deren Wahl durch die Form des Conductors einigermassen vorgeschrieben ist, soll eines aus Ebenen bestehen, die durch die Axe gehen und unter Winkeln φ gegen die xy Ebene geneigt sind. Das zweite System soll von Rotationsflächen gebildet werden, für welche

$$y^2 = \psi\, b^2$$

ist, und ψ eine zwischen 0 und 1 liegende Zahl angiebt.

Der zur x Axe senkrechte Querschnitt eines Röhrenstückes, welches von den Flächenpaaren φ, $\varphi + d\varphi$; ψ, $\psi + d\psi$; x, $x + dx$ begrenzt wird, ist

$$y\, dy\, d\varphi = \tfrac{1}{2} b^2\, d\psi\, d\varphi.$$

Digitized by Google

Bezeichnet aber ϑ den Winkel, den die Röhre mit der x Axe bildet, so hat man

$$\operatorname{tg}\vartheta = \psi^{\frac{1}{2}} \frac{db}{dx},$$

ferner für die wahre Länge eines Röhrenelements

$$dl = \sec\vartheta\, dx,$$

und für den wahren Querschnitt

$$y \cos\vartheta\, dy\, d\varphi = \tfrac{1}{2} b^2 \cos\vartheta\, d\psi\, d\varphi.$$

Der Widerstand des Röhrenelements wird demnach

$$R' = 2\rho \sec^2\vartheta \frac{dx}{b^2\, d\psi\, d\varphi} = 2\rho \left[1 + \psi \left(\frac{db}{dx}\right)^2\right] \frac{dx}{b^2\, d\psi\, d\varphi}.$$

Setzt man

$$A = \int \frac{\rho}{b^2} dx,\ B = \int \frac{\rho}{b^2} \left(\frac{db}{dx}\right)^2 dx,$$

und erstreckt die Integrationen über die ganze Länge x des Leiters, so ist der Widerstand der von den Flächen φ und $\varphi + d\varphi$, ψ und $\psi + d\psi$ begrenzten Röhre $d\psi\, d\varphi$ gleich

$$\frac{2}{d\psi\, d\varphi} \left(A + \psi B\right)$$

und die Leitungsfähigkeit

$$\frac{d\psi\, d\varphi}{2(A + \psi B)}.$$

Die gesammte Leitungsfähigkeit ergiebt sich durch Integration dieses Ausdrucks nach φ von 0 bis 2π und nach ψ von 0 bis 1 zu

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\pi}{B} \log\left(1 + \frac{B}{A}\right).$$

Die Grösse rechter Hand ist dann die untere Grenze für die wirkliche Leitungsfähigkeit des Conductors in seinem ursprünglichen Zustand.

Ist db/dx verhältnismässig klein, so ist auch B/A unbeträchtlich und dann hat man durch Entwickelung

$$\frac{1}{R_2} = \frac{\pi}{A} \left(1 - \frac{1}{2}\frac{B}{A} + \frac{1}{3}\frac{B^2}{A^2} - \frac{1}{4}\frac{B^3}{A^3} + \cdots\right).$$

Das erste Glied π/A fällt mit der obern Grenze zusammen, wie wir sie nach der im vorhergehenden Artikel auseinandergesetzten Methode für die Leitungsfähigkeit gefunden haben würden. Der wirkliche Betrag der Leitungsfähigkeit ist also kleiner als das erste Glied der Reihe für $1/R_2$, aber grösser als die Summe der ganzen Reihe.

Digitized by Google

Die obere Grenze für den Widerstand des Conductors ist gleich dem reciproken Wert jener Reihe, also

$$R_2 = \frac{A}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{B}{A} - \frac{1}{12}\frac{B^2}{A^2} + \frac{1}{24}\frac{B^3}{A^3} - \cdots\right).$$

Hätten wir ausser der Annahme, dass der Strom durch die Flächen φ und ψ dirigirt wird, auch noch vorausgesetzt, dass seine Stärke in jeder Röhre proportional $d\varphi\, d\psi$ ist, so würden wir

$$R_2' = \frac{A}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{B}{A}\right)$$

erhalten haben, also einen Wert, der sich mehr von dem wahren Betrag des Widerstandes entfernt, als der zuerst angeführte, wie das auch wegen der hinzugefügten Einschränkung der Fall sein muss. Von einer solchen weitern Einschränkung ist Rayleigh in seiner citirten Abhandlung ausgegangen, demgemäss findet er auch für den Widerstand R'_2 als obere Grenze, die etwas grösser als die durch die Reihe R_2 dargestellte ist.

308. Ich wende dieselbe Methode an, um die Aenderung, welche der Widerstand eines Cylinders erleidet, wenn man ihn mit einer massiven Electrode von einem andern Metall in Verbindung setzt, zu bestimmen.

Zur Berechnung der untern Grenze für den Widerstand schiebe ich zwischen Cylinder und Electrode eine Scheibe von vollkommen leitendem Material ein, wodurch das Potential in allen Punkten des an die Electrode anstossenden Cylinderendes einen und denselben Wert erhält.

Das Potential in dem Cylinder wird dann eine Function seiner Länge allein. Setzt man dann noch voraus, dass die Dimensionen der Electrode nach jeder Richtung hin sehr gross gegen den Durchmesser des Cylinders sind, und dass die Electrode da, wo sie an den Cylinder stösst, nahezu eben begrenzt ist, so ist die Potentialverteilung näherungsweise dieselbe, wie die, welche von einer leitenden Scheibe im unendlichen Raume hervorgebracht wird.

Ist E die Potentialdifferenz der Scheibe gegen entfernte Teile der Electrode, C die Stärke des Stromes, der von der Scheibe sich in die Electrode ergiesst, ρ' der specifische Widerstand des Materials, aus dem die Electrode besteht, Q die auf der Scheibe vorhandene und nach den diesbezüglichen Ergebnissen des Art. 151 verteilte Electricitätsmenge, und a der Radius des Cylinders, so hat man, wie in dem citirten Artikel gezeigt wird,

$$\rho' C = \tfrac{1}{2}\, 4\pi Q = 2\pi \frac{Ea}{\frac{\pi}{2}} = 4\, Ea\,.$$

Bis zur Scheibe fliesst der Strom durch den Cylinder gleichförmig, er hat also in allen Punkten eines Querschnitts dieselbe Stärke. Von der

Digitized by Google

Scheibe ab aber geht aus jedem Punkt in die Electrode ein Strom, dessen Stärke nach dem Ohmschen Gesetz und nach Art. 177 umgekehrt proportional der kürzesten, durch diesen Punkt gelegten Sehne der Scheibe ist. Die Gesammtstärke dieser einzelnen von der Scheibe in die Electrode sich ergiessenden Ströme

1) $$C = \frac{4Ea}{\rho'}$$

ist zu dem Strom, wie er sonst durch den Cylinder fliessen würde, wenn dieser nicht an die massive Electrode befestigt wäre, hinzuzufügen. Bezeichnet also L die Länge des Cylinders von einem gegebenen Querschnitt bis zu seiner Verbindungsstelle mit der Electrode und ρ den specifischen Widerstand des Cylinders, so ist der Widerstand von dem gegebenen Querschnitt des Cylinders ab bis zu einer in der Electrode von ihrer Verbindung mit dem Cylinder weit entfernten Stelle

2) $$R_1 = \rho \frac{L}{\pi a^2} + \frac{\rho'}{4a} = \frac{\rho}{\pi a^2}\left(L + \frac{\rho'}{\rho}\frac{\pi a}{4}\right).$$

Die Grösse $\rho' \pi a / 4\rho$, um welche man die Länge des Cylinders zu corrigiren hat, um dem Einfluss, den seine Verbindung mit der Electrode auf seinen Widerstand ausübt, Rechnung zu tragen, ist, wenn der Cylinder, wie das in der Praxis meist zutrifft, die Form eines Drahtes von der Dicke $2a$ hat, sehr klein.

R_1 ist aber die untere Grenze des wahren Wertes des Widerstandes und ihre Abweichung von diesem Werte wird dadurch bedingt, dass in Wahrheit das Potential auf der Anheftungsscheibe zwischen Cylinder und Electrode nicht überall denselben Wert hat, sondern von der Mitte nach der Kante zu abnimmt, so dass auch die von den einzelnen Punkten der Scheibe in die Electrode sich ergiessenden Ströme von Punkt zu Punkt weniger stark variiren als zur Ableitung der Grenze R_1 angenommen worden ist.

309. Eine obere Grenze für den Widerstand erhalten wir dadurch, dass wir den Strom, etwa durch electromotorische Kräfte, welche senkrecht zur Scheibe wirken, zwingen, mit derselben Stärke durch alle Punkte der Scheibe in die Electrode zu fliessen.

Bezeichnet C wieder die Stärke des ganzen, durch die Scheibe in die Electrode gehenden Stromes, so ist die von jedem Punkt der Scheibe ausgehende Stromstärke gleich $C/\pi a^2$, also das Potential auf der Scheibe ebenso gross, wie das einer Scheibe, auf der die Electricität mit der Dichte

$$\sigma = \frac{C\rho'}{2\pi^2 a^2}$$

gleichmässig verteilt ist.

Digitized by Google

Ich schliesse mich in den folgenden Auseinandersetzungen einer von Cayley veröffentlichten Abhandlung an.*)

Zunächst hat, wie man leicht findet, das Potential an der Kante der Scheibe den Wert $4a\sigma$.

Die Arbeit, die man aufwenden muss, um an den Umfang der Scheibe einen Streifen von der Breite da anzufügen, ist also $2\pi a\sigma da \,.\, 4a\sigma$. Somit wird die gesammte potentielle Energie der Scheibe

$$P = \int_0^a 8\pi a^2 \sigma^2 da = \frac{8}{3}\pi a^3 \sigma^2 .$$

Ferner ist die Arbeit, die der Strom C bei der Ueberwindung des Widerstandes R' der Electrode leistet, gleich $C^2 R'$, und weil die auf die Flächeneinheit der Scheibe bezogene Stromstärke gleich

$$-\frac{1}{\rho'}\frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{4\pi}{\rho'}\sigma$$

ist, so wird diese Arbeit auch gleich

$$C^2 R' = \frac{4\pi P}{\rho'},$$

also zufolge des Wertes von P und C

$$R' = \frac{8\rho'}{3\pi^2 a}.$$

Ist demnach der wahre Widerstand des Cylinders von der Länge L nach seiner Verbindung mit der massiven Electrode gleich R, so haben wir

$$\frac{\rho}{\pi a^2}\left(L + \frac{\rho'}{\rho}\frac{\pi a}{4}\right) < R < \frac{\rho}{\pi a^2}\left(L + \frac{\rho'}{\rho}\frac{8a}{3\pi}\right).$$

Die an die Länge L des Cylinders nach seiner Verbindung mit der Electrode anzubringende Correction beträgt also $an\rho'/\rho$ wo n eine Zahl ist, die zwischen $\pi/4$ und $8/3\pi$, das heisst zwischen 0,785 und 0,849 liegt. Uebrigens hat Rayleigh in zweiter Annäherung für die obere Grenze von n die Zahl 0,8282 gefunden.**)

*) *London, Math. Soc. Proc.* VI. p. 47.

**) *Phil. Mag.* 1872, Nov. In den *London Math. Soc. Proc.* VIII., p. 74 giebt er später 0,8242.

Digitized by Google

Cap. IX.

Leitung durch heterogene Media.

—×—

Bedingungen an der Trennungsfläche zweier leitenden Medien.

310. Die Stromverteilung in heterogenen Medien wird im allgemeinen durch zwei Bedingungen, die an jeder der Trennungsflächen der einzelnen Medien zu erfüllen sind, bestimmt. Nach der ersten Bedingung muss das Potential, nach der zweiten der Strom continuirlich von einem Medium zum andern übergehen.

Die erste Bedingung verlangt also, dass das Potential in zwei unendlich nahen, zu beiden Seiten einer Trennungsfläche liegenden Punkten einen und denselben Wert hat. Dabei ist aber vorausgesetzt, dass das Potential jedes dieser Punkte durch directe vermittelst einer Electrode von gegebenem Metall bewerkstelligte Verbindung des Punktes mit einem Electrometer gemessen wird. Bestimmt man dagegen das Potential eines Leiters nach der in den Art. 222, 246 auseinandergesetzten Methode, indem man in den Leiter einen Hohlraum ausarbeitet und daselbst eine zu einem Electrometer führende Electrode versenkt, so weichen die Potentiale in den benachbarten zu beiden Seiten der Trennungsfläche liegenden Punkten um eine von der Natur und Temperatur der beiden aneinander stossenden Leiter abhängige Grösse von einander ab.

Die zweite Bedingung verlangt, dass man für die Stromstärke stets denselben Wert erhält, an welcher Seite der Trennungsfläche man sie auch messen mag.

Um diese beiden Bedingungen analytisch auszudrücken, bezeichne ich mit V_1, V_2 die Potentiale, mit u_1, v_1, w_1; u_2, v_2, w_2 die Stromcomponenten in zwei aneinanderstossenden Medien, mit l, m, n die Richtungscosinusse der Normale der Trennungsfläche, und habe dann an der Trennungsfläche der beiden Medien

1) $$V_1 = V_2,$$

2) $$l u_1 + m v_1 + n w_1 = l u_2 + m v_2 + n w_2.$$

Digitized by Google

Im allgemeinsten Fall sind die Stromcomponenten u, v, w lineare homogene Functionen der electromotorischen Kraftcomponenten X, Y, Z, nämlich

$$3) \qquad \begin{aligned} u &= r_1 X + p_3 Y + q_2 Z, \\ v &= q_3 X + r_2 Y + p_1 Z, \\ w &= p_2 X + q_1 Y + r_3 Z. \end{aligned}$$

Strom aus einem isotropen in ein anisotropes Medium.

311a. Ich nehme speciell an, dass eines der Medien isotrop ist, während das andere ganz beliebig bleibt, und beziehe accentuirte Symbole auf das isotrope, nicht accentuirte auf das anisotrope Medium.

Aus der ersten Bedingung $V = V'$ folgt an der Grenzfläche

$$1') \qquad X dx + Y dy + Z dz = X' dx + Y' dy + Z' dz.$$

Lässt man also l, m, n die Richtungscosinusse der nach dem isotropen Medium im Punkte x, y, z der Trennungsfläche gezogenen Normale bedeuten und beachtet, dass die Beziehung

$$l dx + m dy + n dz = 0$$

identisch erfüllt wird, so ergeben sich die drei Gleichungen

$$1) \qquad X' = X + 4\pi\sigma l, \quad Y' = Y + 4\pi\sigma m, \quad Z' = Z + 4\pi\sigma n.$$

Ferner folgt aus der zweiten Bedingung

$$l u' + m v' + n w' = l u + m v + n w,$$

weil

$$u' = r X', \quad v' = r Y', \quad w' = r Z'$$

ist, an der Trennungsfläche

$$r (l X + m Y + n Z + 4\pi\sigma)$$
$$= l(r_1 X + p_3 Y + q_2 Z) + m (q_3 X + r_2 Y + p_1 Z) + n (p_2 X + q_1 Y + r_3 Z)$$

oder

$$2) \quad 4\pi r\sigma = X \{ l(r_1 - r) + m q_3 + n p_2 \} + Y \{ l p_3 + m (r_2 - r) + n q_1 \} + Z \{ l q_2 + m p_1 + n (r_3 - r) \}.$$

Diese Gleichung dient zur Berechnung der Dichte der Ladung an der Trennungsfläche zweier Medien. Bei krystallinischen und organischen Substanzen hängt diese Ladung sowohl von der Orientirung der Trennungsfläche in dem anisotropen Medium als von der Grösse der senkrecht gegen sie wirkenden Kraft ab. Bei isotropen Substanzen aber sind die p und q der Null gleich, und die r haben alle denselben Wert r_1, hier wird also

$$2_1) \qquad 4\pi\sigma = \left(\frac{r_1}{r} - 1\right)(l X + m Y + n Z)$$

Digitized by Google

r_1 und r sind die Leitungsfähigkeiten der beiden Substanzen und l, m, n die Richtungscosinusse der nach der Substanz mit der Leitungsfähigkeit r an die Trennungsfläche gezogenen Normale.

Strom aus einem isotropen in ein anderes isotropes Medium.

311b. Sind beide aneinander stossenden Medien isotrop, so lässt sich die zweite Grenzbedingung beträchtlich vereinfachen.

Ist nämlich k der auf Volumeinheit bezogene Widerstand eines isotropen Mediums, so hat man nach dem Ohmschen Gesetz

1) $$u = -\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial x}; \quad v = -\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial y}, \quad w = -\frac{1}{k}\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Giebt also ν die vom ersten Medium nach dem zweiten gezogene Normale der Trennungsfläche an, so wird die zweite Bedingung

2a) $$\frac{1}{k_1}\frac{\partial V_1}{\partial \nu} = \frac{1}{k_2}\frac{\partial V_2}{\partial \nu}.$$

Sind ϑ_1 und ϑ_2 die Winkel, welche eine Stromlinie in dem ersten bezüglich zweiten Medium mit der Normale an die Trennungsfläche bildet, so geht die vorstehende Gleichung über in

2b) $$k_1 \operatorname{tg} \vartheta_1 = k_2 \operatorname{tg} \vartheta_2.$$

Man hat also das folgende dem Brechungsgesetz für Strahlen entsprechende Brechungsgesetz für Stromlinien

1) die Tangente einer einfallenden Stromlinie liegt mit der Tangente der gebrochenen Stromlinie und mit dem Einfallslot in derselben Ebene,

2) die Tangente des Einfallswinkels steht zur Tangente des Brechungswinkels einer Stromlinie in demselben Verhältnis wie die Leitungsfähigkeit des ersten Mediums zu der Leitungsfähigkeit des zweiten.

Specielle Fälle der Stromverteilung in isotropen Medien.

Isotrope Kugel in einem isotropen Conductor.

312. Als erstes specielles Beispiel für die Bedingungen, welche beim Durchgang eines Stromes durch die Trennungsfläche zweier Leiter erfüllt werden müssen, betrachte ich den Fall, dass eine isotrope Kugel vom Radius a und dem specifischen Widerstand k_1 von einem isotropen Medium vom specifischen Widerstand k_2 umgeben wird.

Digitized by Google

Ich entwickele das Potential ausserhalb und innerhalb der Trennungsfläche nach harmonischen Raumfunctionen, und bezeichne mit V_1 bezüglich V_2 den von der harmonischen Flächenfunction S_i abhängigen Teil des innerhalb bezüglich ausserhalb der Kugelfläche geltenden Potentials.

Es ist dann

$$V_1 = (A_1 r^{+i} + B_1 r^{-(i+1)}) S_i,$$

$$V_2 = (A_2 r^{+i} + B_2 r^{-(i+1)}) S_i.$$

Die Grenzbedingungen müssen von jedem solchen Partialpotential erfüllt werden, wir haben aber für $r = a$

$$V_1 = V_2, \quad \frac{1}{k_1}\frac{\partial V_1}{\partial r} = \frac{1}{k_2}\frac{\partial V_2}{\partial r},$$

also

1') $$(A_1 - A_2)\, a^{2i+1} + B_1 - B_2 = 0,$$

2') $$\left(\frac{A_1}{k_1} - \frac{A_2}{k_2}\right) i a^{2i+1} - \left(\frac{B_1}{k_1} - \frac{B_2}{k_2}\right)(i+1) = 0.$$

Kennt man zwei der vier Grössen A_1, B_1, A_2, B_2, so lassen sich die beiden andern durch die obigen Gleichungen berechnen.

Sind A_1 und B_1 gegeben, so wird

1) $$A_2 = \frac{[k_1(i+1) + k_2 i]\, A_1 + (k_1 - k_2)(i+1)\, B_1 a^{-(2i+1)}}{k_1(2i+1)},$$

2) $$B_2 = \frac{[k_2(i+1) + k_1 i]\, B_1 + (k_1 - k_2)\, i\, A_1 a^{2i+1}}{k_1(2i+1)}.$$

So kann man die Bedingungen, denen die Coefficienten jedes Gliedes in der Entwickelung des Potentials nach harmonischen Functionen auf den Trennungsflächen concentrischer Kugelschichten zu gehorchen haben, aufstellen.

Isotrope Kugel umgeben von einer isotropen Schale in einem isotropen Conductor.

313a. Das System bestehe aus einer Kugel vom Radius a_1, einer diese umgebenden Kugelschicht von der Dicke $a_2 - a_1$ und einem alles umschliessenden Medium. Die specifischen Widerstände seien für die Kugel gleich k_1, für die Schale gleich k_2, für das übrige Medium gleich k_3.

Befinden sich innerhalb der Kugelflächen weder Quellen noch Abzüge für Electricität, so kann V innerhalb derselben nirgend unendlich werden,

Digitized by Google

die B_1 müssen also verschwinden, und wir erhalten für die Coefficienten A_3, B_3 der nach harmonischen Kugelfunctionen verlaufenden Entwickelung des Potentials im äussersten Medium

$$1) \quad A_3 k_1 k_2 (2i+1)^2 = \Big[[k_1 (i+1) + k_2 i][k_2 (i+1) + k_3 i] + i(i+1)(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1} \Big] A_1,$$

$$2) \quad B_3 k_1 k_2 (2i+1)^2 = \Big[i[k_1 (i+1) + k_2 i](k_2 - k_3) a_2^{2i+1} + i[k_2 i + k_3 (i+1)](k_1 - k_2) a_1^{2i+1} \Big] A_1.$$

Im allgemeinen ist das Potential in diesem äussern Medium gegeben, und dort wird es teils von äussern electrischen Quellen, welche unabhängig von der Existenz der Kugel und der Schale in dieses Medium Ströme schicken, bestimmt, teils hängt es von den Störungen ab, welche durch die Einführung der Kugel verursacht werden. Das Potential besteht also aus zwei Teilen, deren erster, weil er innerhalb der Kugel nicht unendlich werden kann, nur harmonische Raumfunctionen positiven Grades enthält, während der zweite, der in unendlicher Entfernung von der Kugel verschwinden muss, aus solchen negativen Grades zusammengesetzt ist.

Man hat daher zunächst das Potential, welches von den äussern electromotorischen Kräften herrührt, in eine Reihe harmonischer Raumfunctionen positiven Grades zu entwickeln. Ist $A_3 S_i r^i$ ein Glied dieser Entwickelung, so lässt die erste der vorstehenden Formeln das entsprechende A_1 und die zweite dann das B_3 berechnen, B_3, der Coefficient des Gliedes $r^{-(i+1)} S_i$ in der Entwickelung des zweiten Teiles des Potentials, trägt dann der Aenderung des Potentials in dem äussern Medium durch Einführung der heterogenen Kugel Rechnung. Aus den Gleichungen 1) und 2) des vorigen Artikels folgen dann schliesslich noch die Werte von A_2 und B_2.

Isotrope Kugelschale in einem isotropen unendlichen Conductor.

313b. Ist speciell $k_3 = k_1$, so haben wir den Fall, wo ein unendlich ausgedehntes Medium durch eine Schale von einem Material mit dem specifischen Widerstand $k = k_2$ unterbrochen wird, also ausserhalb und innerhalb dieser Schale eine und dieselbe leitende Substanz vorhanden ist.

Setzt man zur Abkürzung

$$C = \frac{1}{(2i+1)^2 k_1 k_2 + i(i+1)(k_2 - k_1)^2 \left[1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right]},$$

so wird

Digitized by Google

1) $A_1 = k_1 k_2 (2i+1)^2 C A_3,$

2) $A_2 = k_2 (2i+1) [k_1 (i+1) + k_2 i] C A_3,$

3) $B_2 = k_2 i (2i+1) (k_1 - k_2) a_1^{2i+1} C A_3,$

4) $B_3 = (k_2 - k_1) i [k_1 (i+1) + k_2 i] (a_2^{2i+1} - a_1^{2i+1}) C A_3.$

Die Differenz zwischen A_3, dem Coefficienten in dem nicht gestörten Potential, und A_1 dem Werth, den dieser Coefficient nach Einführung der Kugelschicht innerhalb dieser annimmt, ist

5) $$A_3 - A_1 = (k_2 - k_1)^2 i (i+1) \left[1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2i+1}\right] C A_3.$$

Diese Differenz ist stets positiv, wie auch die Werte k_1 und k_2 sich zu einander verhalten mögen, demnach ist die electrische Action in dem von der Kugelschale eingenommenen Raum, gleichgiltig ob die Schale besser oder schlechter als das übrige Medium leitet, kleiner als sie sein würde, wenn die Kugelschale nicht vorhanden wäre. Leitet die Kugelschicht besser als das andere Medium, so sucht sie die Potentialwerte um die innere Kugel auszugleichen, leitet sie schlechter, so ist sie bestrebt, die Ströme von dieser innern Kugel abzuhalten.

Den Fall, wo eine Vollkugel in einem unendlichen Conductor eingeführt wird, kann man entweder aus dem obigen deduciren, indem man $a_1 = 0$ setzt, oder auch selbstständig behandeln.

313 c. Das wichtigste Glied in der harmonischen Entwickelung des Potentials ist dasjenige, für welches $i = 1$, also

$$C = \frac{1}{9 k_1 k_2 + 2 (k_1 - k_2)^2 \left[1 - \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3\right]},$$

$$A_1 = 9 k_1 k_2 C A_3,$$

$$A_2 = 3 k_2 (2 k_1 + k_2) C A_3,$$

$$B_2 = 3 k_2 (k_1 - k_2) a_1^3 C A_3,$$

$$B_3 = (k_2 - k_1) (2 k_1 + k_2) (a_2^3 - a_1^3) C A_3,$$

wird.

Im Falle einer Vollkugel vom specifischen Widerstand k_2 haben wir $a_1 = 0$, also

$$A_2 = \frac{3 k_2}{k_1 + 2 k_2} A_3,$$

$$B_2 = 0,$$

$$B_3 = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + 2 k_2} a_2^3 A_3.$$

Digitized by Google

Daraus folgt, dass die in der Existenz des Coefficienten B_3 sich manifestirende durch eine Kugelschicht von der Dicke $a_2 - a_1$ und dem specifischen Widerstande k_2 in dem äussern Medium verursachte Potentialänderung ebenso gross ist, wie die durch eine Vollkugel vom Radius a_2 und dem specifischen Widerstand

$$K = \frac{(2k_1 + k_2)\,a_2^3 + (k_1 - k_2)\,a_1^3}{(2k_1 + k_2)\,a_2^3 - 2(k_1 - k_2)\,a_1^3}\,k_2$$

hervorgerufene, denn für beide Fälle findet man, wie man sich leicht überzeugt, denselben Wert für den Coefficienten B_3.

Mehrere isotrope Vollkugeln in einem unendlichen isotropen Leiter.

314. Befinden sich in einem Medium vom specifischen Widerstand k_2 n Kugeln vom gleichen specifischen Widerstande k_1 und gleichem Radius a_1 in solchen Abständen von einander, dass die Störungen, die sie einzeln in dem Laufe des Stromes hervorbringen, von einander unabhängig sind, so ist das Potential in einem grossen Abstande r von dem Mittelpunkt einer um alle n Kugeln mit dem Radius a_2 geschlagenen Kugelfläche von der Form

1') $$V = (Ar + nBr^{-2})\cos\vartheta,$$

wo nach dem vorigen Artikel

a) $$B = \frac{k_1 - k_2}{k_2 + 2k_1}\,a_1^3 A$$

zu setzen ist.

Bezeichnet man mit p das Verhältnis des Volumens der n Kugeln zu dem der sie umfassenden ideellen Kugel, macht also

b) $$p = \frac{n a_1^3}{a_2^3},$$

so hat man

1) $$V = A\left\{r + p a_2^3 \frac{k_1 - k_2}{2k_1 + k_2}\frac{1}{r^2}\right\}\cos\vartheta.$$

Wäre die grosse Kugel vom Radius a_2 allein vorhanden und bestände sie aus einem Material vom specifischen Widerstand K, so würde

$$V = A\left\{r + a_2^3 \frac{K - k_2}{2K + k_2}\frac{1}{r^2}\right\}\cos\vartheta$$

Digitized by Google

sein, und dieses Potential wird gleich dem vorigen, wenn die grosse Kugel ideelle und die kleinen Kugeln reale Existenz haben, falls man

$$2) \qquad K = \frac{2k_1 + k_2 + p(k_1 - k_2)}{2k_1 + k_2 - 2p(k_1 - k_2)} k_2$$

macht.

K ist also der specifische Widerstand eines hetrogenen Mediums, das aus einer Substanz vom specifischen Widerstand k_2 und einer Reihe in dieser Substanz zerstreut liegender kleiner Kugeln zusammengesetzt ist, deren Gesammtvolumen zu dem Volumen des Mediums im Verhältnis von p zu 1 steht, und deren specifische Leitungsfähigkeit gleich k_1 ist.

Es müssen aber, damit die zur Giltigkeit der Formeln notwendige Voraussetzung, dass die Störungen der einzelnen Kugeln nicht mit einander interferiren, gemacht werden darf, die Radien der Kugeln sehr klein gegen ihre gegenseitigen Abstände sein, so dass p ein kleiner Bruch wird.

Man kann übrigens zu demselben Resultat auch auf andern Wegen gelangen. Hier folgt es direct aus den für eine einzelne Kugel schon erhaltenen Ergebnissen.

Sind die Abstände der Kugeln von einander nicht gross genug gegen ihre Radien und hat der Bruch

$$\frac{k_1 - k_2}{2k_1 + k_2}$$

einen beträchtlichen Wert, so treten in den Ausdruck für das Potential noch andere Glieder ein, auf deren nähere Construction ich hier nicht eingehen mag. Diese neu hinzukommenden Glieder bewirken aber, dass der Widerstand des Mediums nach Einführung der Kugeln nicht mehr nach allen Richtungen von derselben Grösse ist; der Widerstand nach einer bestimmten Richtung hängt dann auch noch von dem Arrangement der einzelnen Kugeln in dem Medium ab.

Abbildung einer Electricitätsquelle.

Zwei isotrope durch eine Ebene getrennte Medien.

315. Um zu zeigen, wie die Methode der electrischen Abbildung zur Lösung hierher gehöriger Aufgaben zu verwenden ist, nehme ich den Fall, dass aus einer in einem Medium befindlichen Electricitätsquelle S in der Zeiteinheit eine Electricitätsmenge S in dieses Medium hineinströmt und von da sich in ein anstossendes Medium verbreitet.

Digitized by Google

Die Trennungsfläche der beiden Medien sei eine im Abstande a von der Electricitätsquelle laufende Ebene.

Wäre das Medium, in welchem sich die Electricitätsquelle befindet, nach allen Seiten unendlich ausgedehnt, so würde der Strom von der Quelle aus sich geradlinig ausbreiten und das Potential in einem um r_1 von S abstehenden Punkt P wäre gleich

$$P = \frac{E}{r_1} = \frac{Sk_1}{4\pi r_1}.$$

Um den tatsächlichen Verhältnissen Rechnung zu tragen, bilden wir die Electricitätsquelle S in der Trennungsebene ab. Das Bild liegt dann in dem zweiten Medium in einem Punkte J, der auf dem von S auf die Ebene gefällten Lote in einem Abstande a von derselben sich befindet, der durch die Gleichung $SJ = 2a$ bestimmt wird.

Ist dann r_1 die Entfernung eines Punktes P von der Electricitätsquelle S und r_2 die von dem Bilde J der Quelle, so wird für Punkte der Trennungsebene

$$r_1 = r_2,$$

$$\frac{dr_1}{d\nu} = -\frac{dr_2}{d\nu}.$$

Das Potential V_1 in einem Punkte des ersten Mediums möge so gross sein wie das von den Electricitätsmengen E, E_2 herrührende, die in S bezüglich J concentrirt sind; ähnlich soll das Potential V_2 in einem Punkte des zweiten Mediums so gross sein, wie wenn es von einer Electricitätsmenge E_1, die in S vereinigt ist, verursacht würde. Wir haben dann

1) $$V_1 = \frac{E}{r_1} + \frac{E_2}{r_2}, \quad V_2 = \frac{E_1}{r_1},$$

und da an der Trennungsfläche

$$V_1 = V_2, \quad \frac{1}{k_1}\frac{\partial V_1}{\partial \nu} = \frac{1}{k_2}\frac{\partial V_2}{\partial \nu}$$

sein muss, so haben die Electricitätsmengen E, E_2, E_1 den Bedingungen

$$E + E_2 = E_1,$$

$$\frac{1}{k_1}(E - E_2) = \frac{1}{k_2}E_1$$

zu genügen, woraus dann folgt

2) $$E_1 = \frac{2k_2}{k_1 + k_2}E, \quad E_2 = \frac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2}E.$$

E ist dabei gleich $Sk_1/4\pi$ zu setzen.

Digitized by Google

Daraus ergiebt sich:

Werden zwei isotrope Medien, in deren einem sich eine Electricitätsquelle S befindet, die in der Zeiteinheit eine Electricitätsmenge S ausströmt, durch eine Ebene von einander getrennt, so ist

I. Das Potential in Punkten des ersten Mediums ebenso gross wie das electrostatische Potential in Punkten, die im freien Raume gelegen sind, wenn in S eine Ladung $E = Sk_1/4\pi$ und in ihrem Bilde J eine solche $E_2 = Sk_1\ (k_2 - k_1)/4\pi\ (k_1 + k_2)$ concentrirt ist; im zweiten Medium so gross wie im freien Raum, wenn in S sich eine Electricitätsmenge $E_1 = 2\,S\,k_1\,k_2/4\pi\,(k_1 + k_2)$ befindet.

II. Die Stromstärke in einem Punkte des ersten Mediums so gross, wie wenn der Strom ausser von der Electricitätsquelle S mit der Stärke S noch von einer andern Electricitätsquelle J mit der Stärke $S\,(k_2 - k_1)/(k_2 + k_1)$ genährt, und das Medium sich nach allen Seiten unendlich ausdehnen würde; in einem Punkte des zweiten Mediums so gross, wie wenn der Strom aus einer Quelle S mit der Stärke $2\,S\,k_2/(k_1 + k_2)$ flösse, und das zweite Medium überallhin sich in's Unendliche erstreckte.

Wir können also die Theorie der electrischen Bilder vollständig auf unsern Fall, wo zwei leitende Medien durch eine Ebene getrennt sind, anwenden, und wir gelangen stets zur Bestimmung der Potentialverteilung in dem ersten Medium, welcher Natur auch die dort herrschenden electromotorischen Kräfte sein mögen, wenn wir ihre Wirkung mit der ihres Bildes combiniren.

Ist das zweite Medium ein vollkommener Leiter, so wird $k_2 = 0$, also $E_1 = 0$ und $E_2 = -E$. Das Bild der Quelle strömt demnach in der Zeiteinheit dieselbe, aber entgegengesetzte Electricitätsmenge aus wie die Quelle selbst. Ein solcher Zustand ist in der electrostatischen Theorie der electrischen Bilder supponirt.

Ist das zweite Medium umgekehrt ein vollkommener Nichtleiter, so wird $k_2 = \infty$, also $E_1 = 2\,E$ und $E_2 = E$. Das Bild strömt dann eine gleiche und auch gleichnamige Electricitätsmenge aus wie die Quelle. In diesem Fall befinden sich zum Beispiel die Bilder in der Hydrodynamik, wenn es sich um die Bewegung einer Flüssigkeit handelt, die von einer ebenen festen Wand begrenzt ist.

316. Die Methode der Inversion in drei Dimensionen, die sich in der Electrostatik, wo die Leiter als vollkommen betrachtet werden, in so mannichfacher Weise benutzen lässt, ist in dem allgemeinern Fall, wo Conductoren von verschiedener Leitungsfähigkeit aneinanderstossen, nicht mehr verwendbar. Dagegen lässt sich von der Inversion in zwei Dimensionen ebenso wie von der allgemeinern, in Art. 190 auseinandergesetzten Theorie der Transformation in zwei Dimensionen hier nicht minder gut wie in der Electrostatik Gebrauch machen.*)

*) Kirchhoff, *Pogg. Ann.* LXIV. 497 und LXVII. 344; Quincke, *Pogp. Ann.* XCVII. 382; Smith *Proc. R. S. Edin.* 1869–70, pag. 79.

Digitized by Google

Leitung durch eine zwei isotrope Medien trennende Platte.

317. Ich betrachte ferner den Einfluss, den eine Platte von der Dicke AB und dem Widerstand k_2, wenn sie zwei Medien von den Widerständen k_1 und k_3 trennt, auf das Potential, welches von einer im ersten Medium gelegenen Electricitätsquelle S herrührt, ausübt.

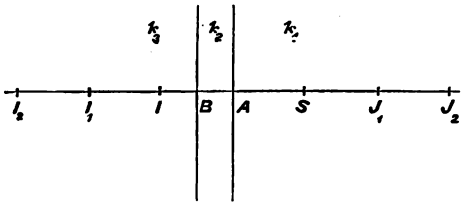


Fig. 24.

Bildet man die Quelle S in den beiden Begrenzungsebenen der Platte successive ab, so wird das Potential ebenso gross, wie das von gewissen in den Bildpunkten concentrirten, im freien Raume liegend gedachten Ladungen.

Macht man also

$$AI = SA,\ BI_1 = SB,\ AJ_1 = I_1 A,\ BI_2 = J_1 B,\ AJ_2 = I_2 A \text{ u. s. f.}$$

so haben wir zwei Reihen von Punkten J, I, deren Abstände von einander nach Art. 316 gleich der doppelten Dicke der Platte sind.

Das Potential in einem Punkte P des ersten Mediums wird

1′) $$P = \frac{E}{PS} + \frac{I}{PI} + \frac{I_1}{PI_1} + \frac{I_2}{PI_2} + \cdots,$$

das in einem Punkte P' der Platte

2′) $$P' = \frac{E'}{P'S} + \frac{I'}{P'I} + \frac{I_1'}{P'I_1} + \frac{I_2'}{P'I_2} + \cdots + \frac{J_1'}{P'J_1} + \frac{J_2'}{P'J_2} + \cdots,$$

und das in einem Punkte P'' des andern Mediums

3′) $$P'' = \frac{E''}{P''S} + \frac{J_1}{P''J_1} + \frac{J_2}{P''J_2} + \frac{J_3}{P''J_3} + \cdots,$$

wo I, I', J', J die Ladungen bezeichnen, die in die betreffenden Bilder zu concentriren sein würden, und die mit einem einfachen Accent versehenen Buchstaben sich auf die Platte beziehen.

Nach dem Art. 316 ist aber wegen der Existenz der durch A gehenden Ebene

$$I = \frac{k_2 - k_1}{k_2 + k_1} E,\ E' = \frac{2k_2}{k_2 + k_1} E$$

und wegen Existenz der Fläche durch B

$$I_1' = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2} E',\ E'' = \frac{2k_3}{k_3 + k_2} E'.$$

Digitized by Google

Ferner ist wegen der Abbildung des zweiten Bildes durch A

$$J_1' = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} I_1', \; I_1 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} I_1',$$

und wegen der Abbildung des ersten Bildes durch B

$$I_2' = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2} J_1', \; J_1 = \frac{2k_3}{k_2 + k_3} J_1'$$

u. s. f.

Setzt man also zur Abkürzung

$$\rho = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \; \rho' = \frac{k_3 - k_2}{k_3 + k_2},$$

so wird das Potential für einen Punkt P des ersten Mediums

$$1) \quad P = E\left(\frac{1}{PS} - \frac{\rho}{PI}\right) + \rho'(1-\rho^2) E\left\{\frac{1}{PI_1} + \frac{\rho\rho'}{PI_2} + \cdots + \frac{(\rho\rho')^{n-1}}{PI_n}\right\},$$

und in einem Punkt P' des dritten

$$2) \quad P'' = (1+\rho')(1-\rho) E\left\{\frac{1}{P''S} + \frac{\rho\rho'}{P''J_1} + \cdots + \frac{(\rho\rho')^n}{P''J_n}\right\}.$$

Ist das dritte Medium ebenso beschaffen wie das erste, so wird $k_1 = k_3$ und $\rho = \rho'$, das Potential auf der andern Seite der Platte, wo also keine Stromquellen vorhanden sind, geht dann über in

$$2_1) \quad P'' = (1-\rho^2) E\left\{\frac{1}{P''S} + \frac{\rho^2}{P''J_1} + \cdots + \frac{\rho^{2n}}{P''J_n}\right\}.$$

Leitet die Platte beträchtlich besser als eines der durch sie getrennten Medien, so wird ρ nahezu gleich $+1$, leitet sie beträchtlich schlechter, so wird ρ nahezu gleich -1, leitet sie endlich fast ebenso gut, wie das Medium, in das sie eingeschoben ist, so unterscheidet sich ρ nur wenig von Null und ist eine kleine positive oder negative Grösse.

318. Die auf diesen Fall bezüglichen Formeln sind zuerst von Green in seiner Theorie der magnetischen Induction (*Essay* pag. 65) entwickelt worden, doch ist das Resultat, zu dem er gelangt, nur dann richtig, wenn ρ nahezu den Wert $+1$ hat.*) Die von ihm benutzte Grösse g hängt mit der hier eingeführten ρ durch die Gleichungen

$$g = \frac{2\rho}{3-\rho} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + 2k_2}, \quad \rho = \frac{3g}{2+g} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}$$

zusammen.

---

*) W. Thomson, *Note on Induced Magnetism in a Plate*, *Camb. and Dub. Math. Journal*, 1845 Nov. oder *Reprint*, Art. IX. § 156.

Digitized by Google

Setzt man in den obigen Formeln $\rho = 2\pi\varkappa/(1+2\pi\varkappa)$, so geben sie die Auflösung des Problems des in eine unendliche Platte, welche $\varkappa$ zur Magnetisirungsconstante hat, durch einen magnetischen Pol inducirten Magnetismus.

Geschichteter Leiter.

319. Ich bestimme noch den Widerstand eines Leiters, der aus einer Reihe von Schichten zusammengesetzt ist, deren Dicken abwechselnd c und c' sind, und welche aus zwei Materialien von verschiedener Leitungsfähigkeit herausgeschnitten wurden.

Die Symbole, welche sich auf die aus dem zweiten Material gebildeten Schichten beziehen, unterscheide ich durch Accente von den den Schichten aus dem ersten Material zugehörigen; die Symbole, welche für den zusammengesetzten Leiter gelten sollen, überstreiche ich.

Wählt man die z Axe senkrecht zu den Begrenzungsebenen der Schichten, so ergeben die beiden Bedingungen an jeder Begrenzungsebene dasselbe System von Gleichungen

$$1)\qquad \begin{aligned} \overline{X} = X = X', \quad (c+c')\,\overline{u} &= cu + c'u', \\ \overline{Y} = Y = Y', \quad (c+c')\,\overline{v} &= cv + c'v', \\ (c+c')\,\overline{Z} = cZ + c'Z', \qquad \overline{w} &= w = w' \quad . \end{aligned}$$

Die sechs Grössen u, u', v, v', Z, Z' bestimmen sich aus den Widerstandsgleichungen, die nach dem Muster der in Art. 297 oder 298 gegebenen Formeln für jedes der Medien als Functionen von $\overline{X}, \overline{Y}$ und $\overline{w}$, die mit den X, X'; Y, Y'; w, w' gleiche Werte haben, zu bilden sind.

Bezeichnet man also mit D die Determinante der Widerstandscoefficienten, so ergeben sich die Gleichungen

$$2)\qquad \begin{aligned} ur_3 D &= R_2\overline{X} - Q_3\overline{Y} + \overline{w}q_2 D, \\ vr_3 D &= R_1\overline{Y} - P_3\overline{X} + \overline{w}p_1 D, \\ Zr_3 &= -p_2\overline{X} - q_1\overline{Y} + \overline{w}, \end{aligned}$$

nebst drei ähnlich gebildeten Gleichungen für u', v', Z'. Hat man mit den so bestimmten Werten der 6 Grössen u, v, Z, u', v', Z' aus den unter 1) angeführten Formeln die $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{Z}$ berechnet, so findet man für die neun Coefficienten der Leitungsfähigkeit des geschichteten Conductors die Beziehungen

Digitized by Google

$$\bar{p}_1 = \frac{hp_1 + h'p_1'}{h+h'},$$

$$\bar{q}_1 = \frac{hq_1 + h'q_1'}{h+h'},$$

$$\bar{p}_2 = \frac{hp_2 + h'p_2'}{h+h'},$$

$$\bar{q}_2 = \frac{hq_2 + h'q_2'}{h+h'},$$

3)
$$\bar{p}_3 = \frac{cp_3 + c'p_3'}{c+c'} - \frac{hh'(q_1 - q_1')(q_2 - q_2')}{(h+h')(c+c')},$$

$$\bar{q}_3 = \frac{cq_3 + c'q_3'}{c+c'} - \frac{hh'(p_1 - p_1')(p_2 - p_2')}{(h+h')(c+c')},$$

$$\bar{r}_1 = \frac{cr_1 + c'r_1'}{c+c'} - \frac{hh'(p_2 - p_2')(q_2 - q_2')}{(h+h')(c+c')},$$

$$\bar{r}_2 = \frac{cr_2 + c'r_2'}{c+c'} - \frac{hh'(p_1 - p_1')(q_1 - q_1')}{(h+h')(c+c')},$$

$$\bar{r}_3 = \frac{c+c'}{h+h'}.$$

$$\left(h = \frac{c}{r_3}, \quad h' = \frac{c'}{r_3'}\right).$$

320. Wenn in keinem der beiden Materialien, aus welchen die Schichten des Conductors geschnitten sind, der in Art. 303 definirte Vector T einen von Null verschiedenen Wert hat, so sind die P und p gleich den ihnen entsprechenden Q bezüglich q. Daraus folgt dann, dass auch in dem zusammengesetzten Conductor

3_1) $$\bar{p}_1 = \bar{q}_1, \quad \bar{p}_2 = \bar{q}_2, \quad \bar{p}_3 = \bar{q}_3$$

ist. Ein aus Schichten in der angegebenen Weise gebildeter Conductor hat also keine an die Existenz des rotatorischen Vectors T sich knüpfenden Eigenschaften, wenn seine einzelnen Schichten sie nicht besitzen.

321. Setzen wir also voraus, dass $T = T'' = 0$ ist und ferner, dass die Axen der x, y, z mit den Hauptleitungsaxen zusammenfallen, so verschwinden die Coefficienten p und q, und es bleibt

3_2) $$\bar{r}_1 = \frac{cr_1 + c'r_1'}{c+c'}, \quad \bar{r}_2 = \frac{cr_2 + c'r_2'}{c+c'}, \quad \bar{r}_3 = \frac{c+c'}{\frac{c}{r_3} + \frac{c'}{r_3'}}.$$

Haben die beiden Materialien, aus denen die Schichten gebildet sind, isotrope Structur, so wird

3_3) $$\bar{r}_1 = \bar{r}_2 = \frac{cr + c'r'}{c+c'}, \quad \bar{r}_3 = \frac{c+c'}{\frac{c}{r} + \frac{c'}{r'}}.$$

Digitized by Google

Der Widerstand hat also in allen Richtungen, die parallel den Trennungsebenen laufen, einen und denselben Wert; in Richtungen, die geneigt zu den Trennungsebenen sind, hängt sein Betrag von der Neigung ab, in der der Strom die Trennungsebene trifft. Den grössten Widerstand findet ein Strom in der zu den Schichtebenen senkrechten Richtung.

Isotropes Medium mit eingestreuten parallelen Parallelepipeden.

322. Ich setze noch einen Leiter durch die folgenden Operationen zusammen.

Ich zerschneide einen isotropen Leiter, der einem Strome den specifischen Widerstand $1/r$ entgegensetzt, in äusserst dünne Streifen von der Dicke a und lege diese Streifen senkrecht zur x Axe alternirend neben und über Streifen, die in der Dicke $\lambda_1 a$ aus einem andern Material von dem specifischen Widerstand $1/s$ herausgeschnitten sind. Dann zerschneide ich den so gebildeten Leiter parallel der y Axe in Streifen von grösserer Dicke b und setze sie wieder alternirend mit Streifen, deren Widerstand $1/s$ und deren Dicke $\lambda_2 b$ ist, zusammen. Endlich zerschneide ich den neuen Leiter in Streifen, die parallel der z Axe laufen und von noch grösserer Dicke c sind, und setze sie alternirend mit Streifen von dem Widerstand $1/s$ und der Dicke $\lambda_3 c$ zusammen.

Das Resultat dieser drei Operationen besteht darin, dass man eine Substanz von der specifischen Leitungsfähigkeit r in rechtwinklige Parallelepipede von den Seiten a, b, c, wo a sehr klein gegen b und b sehr klein gegen c ist, zerschnitten, und dass man die Parallelepipede in eine Substanz von der specifischen Leitungsfähigkeit s so eingebettet hat, dass sie in Richtung der drei Axen der x, y, z um die bezüglichen Grössen $\lambda_1 a$, $\lambda_2 b$, $\lambda_3 c$ von einander abstehen.

Die Leitungscoefficienten des so componirten Conductors erhält man durch drei aufeinanderfolgende Anwendungen der im vorhergehenden Artikel abgeleiteten Formeln, und es ergiebt sich so für den Fall, dass $T = T' = 0$ ist und die Coordinatenaxen mit den Hauptaxen der Leitungsfähigkeit zusammenfallen,

$$r_1 = s\,\frac{r\{1+\lambda_1(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)\}+s\{\lambda_2+\lambda_3+\lambda_2\lambda_3\}}{(1+\lambda_2)(1+\lambda_3)(\lambda_1 r+s)},$$

1)
$$r_2 = s\,\frac{r\{1+\lambda_2+\lambda_2\lambda_3\}+s\{\lambda_1+\lambda_3+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\}}{(1+\lambda_3)\{r\lambda_2+s(1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)\}},$$

$$r_3 = s\,\frac{(1+\lambda_3)\{r+s(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2)\}}{r\lambda_3+s\{1+\lambda_1+\lambda_2+\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_2\lambda_3\}}.$$

Digitized by Google

Die Anwendbarkeit dieser Formeln hängt aber von der Genauigkeit ab, mit der die verschiedenen Grössenordnungen der einzelnen Dimensionen bei jedem der Parallelepipedchen inne gehalten sind, denn diese Genauigkeit bestimmt, bis zu welchem Grade man die Bedingungen, die sonst noch an den Kanten und Ecken der Parallelepipede zu erfüllen sein würden, ausser Acht lassen darf.

Nimmt man $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, so wird

$$1_1) \qquad r_1 = s\,\frac{5r+3s}{4r+4s},\quad r_2 = s\,\frac{3r+5s}{2r+6s},\quad r_3 = s\,\frac{2r+6s}{r+7s}.$$

Für $r = 0$ sind die Parallelepipede vollkommene Isolatoren, und man erhält

$$1_2) \qquad r_1 = \tfrac{3}{4}s,\quad r_2 = \tfrac{5}{6}s,\quad r_3 = \tfrac{6}{7}s.$$

Ist $r = \infty$, sind also die Parallelepipede vollkommene Leiter, so wird

$$1_3) \qquad r_1 = \tfrac{5}{4}s,\quad r_2 = \tfrac{3}{2}s,\quad r_3 = 2s.$$

Man überzeugt sich leicht, dass stets, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ ist, von den r dasjenige das grössere ist, welches den grössern Index hat. Am besten leitet also der zusammengesetzte Conductor in Richtung der grössten und am schlechtesten in Richtung der kürzesten Dimension der Parallelepipeda.

Parallelepiped von einem isolirten Draht diagonal durchsetzt.

323. Ich bestimme ferner die Widerstandsänderung, die in einem festen leitenden Parallelepiped eintritt, wenn man durch sein Inneres diagonal einen isolirten Draht hindurchführt, der so dünn ist, dass diese Aenderung lediglich dem durch den Draht hindurchgehenden Strome ihre Entstehung verdankt und nicht durch die Existenz des Canals an sich bedingt wird.

Ich wähle die Ecke, wo der Draht in das Parallelepiped eintritt, zum Coordinatenursprung und richte die Coordinatenaxen parallel den Kanten a, b, c des Parallelepipeds.

Ist dann die Leitungsfähigkeit des Drahtes, der sich von der Ecke $x = y = z = 0$ bis zu der $x = a$, $y = b$, $z = c$ erstreckt, gleich $Kabc$, und bedeutet C die Stärke des ihn durchsetzenden Stromes, so hat man, weil die zwischen den Drahtenden wirkende electromotorische Kraft

$$1) \qquad E = aX + bY + cZ$$

ist,

$$2) \qquad C = Kabc\,(aX + bY + cZ).$$

Die Stärke des durch die Fläche bc des Parallelepipeds gehenden Stromes ist bcu, und sie wird zufolge der für die Dicke des Drahtes fest-

Digitized by Google

gesetzten Bedingung einerseits durch die Leitungsfähigkeit des Parallelepipeds und andererseits durch die des Drahtes bestimmt. Man hat also

$$bcu = bc\,(r_1 X + p_3 Y + q_2 Z) + Kabc\,(aX + bY + cZ),$$

woraus sich ergiebt

$$3) \qquad u = (r_1 + Ka^2)\,X + (p_3 + Kab)\,Y + (q_2 + Kac)\,Z.$$

Entsprechende Gleichungen findet man für die beiden andern Stromcomponenten v, w. Die diagonale Durchführung des dünnen Drahtes bewirkt also, dass das System

$$\begin{matrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{matrix}$$

der Leitungscoefficienten des Parallelepipeds übergeht in

$$4) \qquad \begin{matrix} r_1 + Ka^2 & r_2 + Kb^2 & r_3 + Kc^2 \\ p_1 + Kbc & p_2 + Kac & p_3 + Kab \\ q_1 + Kbc & q_2 + Kac & q_3 + Kab. \end{matrix}$$

Die mit demselben Index versehenen Coefficienten p, q erhalten bei Einführung des Drahtes dieselbe Correction, sind demnach diese Coefficienten von vornherein gleich, so bleiben sie es auch. Es ist also nicht möglich durch Durchführung von Canälen durch die einzelnen Volumelemente eines Körpers dem Vector T einen von Null verschiedenen Wert zu geben, wenn er nicht schon vorher einen solchen besessen hat.

Netzwerk linearer Leiter.

324. Zum Schluss löse ich noch die Aufgabe aus linearen Leitern ein Netzwerk zusammenzusetzen, das ein symmetrisches System vorgeschriebener Leitungscoefficienten besitzt.

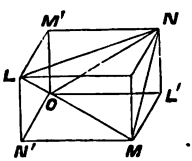


Fig. 25.

Das Netzwerk zerlegt den Raum in lauter gleiche Würfel, von denen einer durch die beistehende Figur dargestellt sein soll.

Ich ordne den vier Punkten O, L, M, N die Coordinaten und Potentiale so zu

	x	y	z	Potential
O	0	0	0	$X + Y + Z$
L	0	1	1	X
M	1	0	1	Y
N	1	1	0	Z

Digitized by Google

und verbinde diese Punkte durch sechs Drähte

$$OL,\quad OM,\quad ON,\quad MN,\quad NL,\quad LM,$$

deren Leitungsfähigkeiten bezüglich durch

$$A,\quad B,\quad C,\quad P,\quad Q,\quad R$$

gegeben sein sollen.

Die längs den Leitern wirkenden electromotorischen Kräfte sind dann

$$Y+Z,\quad Z+X,\quad X+Y,\quad Y-Z,\quad Z-X,\quad X-Y,$$

und die sie durchsetzenden Ströme haben die Intensitäten

$$A(Y+Z),\ B(Z+X),\ C(X+Y),\ P(Y-Z),\ Q(Z-X),\ R(X-Y).$$

Davon führen die Ströme LM, LN, OM, ON Electricität in Richtung der positiven x Axe, und demnach wird

$$\begin{aligned} u &= (B+C+Q+R)X+(C-R)Y &&+(B-Q)Z,\\ v &= (C-R)X &&+(C+A+R+P)Y+(A-P)Z,\\ w &= (B-Q)X &&+(A-P)Y+(A+B+P+Q)Z. \end{aligned}$$

Durch Vergleichung mit den in Art. 298 gegebenen Leitungsformeln findet man

$$\begin{aligned} 4A &= r_2+r_3-r_1+2p_1, & 4P &= r_2+r_3-r_1-2p_1,\\ 4B &= r_3+r_1-r_2+2p_2, & 4Q &= r_3+r_1-r_2-2p_2,\\ 4C &= r_1+r_2-r_3+2p_3, & 4R &= r_1+r_2-r_3-2p_3, \end{aligned}$$

wodurch die Wahl der sechs Drähte, also auch die des ganzen Netzwerks bestimmt ist.

Digitized by Google

Cap. X.

Leitung in Dielectricis.

325. Eine electromotorische Kraft bringt nach frühern Auseinandersetzungen in einem dielectrischen Medium einen besondern gezwungenen Zustand hervor, den ich als den der Polarisation bezeichnet habe. Der Zustand äussert sich darin, dass in dem Medium eine gewisse electrische Verschiebung Platz greift, welche in isotropen Mitteln in Richtung der Wirkung der electromotorischen Kraft vor sich geht, und dass gleichzeitig jedes der Volumelemente, in die das Medium zerlegt werden kann, eine Ladung erhält, die auf der Seite, wo die Wirkungsrichtung der Kraft das Element trifft, positiv und auf der Seite, wo sie das Element verlässt, negativ sein sollte.

In leitenden Medien bringt eine electromotorische Kraft statt der Verschiebung einen Strom hervor.

Nun sind einerseits die dielectrischen Medien, wenn überhaupt, jedenfalls mit sehr wenigen und zudem zweifelhaften Ausnahmen mehr oder weniger gute Leiter, und andererseits zeigen viele unvollkommene Isolatoren dieselben Erscheinungen der dielectrischen Induction wie die Dielectrica. Wir haben daher die Vorgänge in Medien zu untersuchen, in denen neben der Leitung auch noch dielectrische Induction Platz greift.

Die dielectrische Polarisation ist ein statischer Zustand, die electrische Strömung ein kinematischer. In solchen Medien wird also neben der Poissonschen Gleichung auch noch die Continuitätsgleichung für electrische Ströme gelten.

Der Einfachheit wegen setze ich voraus, dass das betreffende Medium isotrop, wenn auch nicht in seinen verschiedenen Teilen homogen ist, dann haben wir einerseits die Poissonsche Gleichung (s. Art. 83)

$$1) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial V}{\partial z}\right)+4\pi\rho=0$$

Digitized by Google

und andererseits die Continuitätsgleichung

$$2) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial z}\right)-\frac{\partial \rho}{\partial t}=0.$$

K ist die specifische inductive Capacität und r der specifische Widerstand des betreffenden Mediums bezogen auf die Volumeinheit.

Sind K und r discontinuirlich, das Medium also heterogen, so hat man jene Gleichungen so umzuwandeln, wie sie sich für Discontinuitätsflächen eignen.

Bei streng homogen isotropen Mitteln sind K und r beide constant, also gehen die Gleichungen 1) und 2) über in

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=-\frac{4\pi\rho}{K}=r\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

und daraus folgt

$$\rho = Ce^{-\frac{4\pi}{Kr}t}$$

oder, indem man $T=Kr/4\pi$ setzt,

$$\rho = Ce^{-\frac{t}{T}}.$$

T ist eine positive Grösse. Befindet sich also ein homogener isotroper Körper, dessen Inneres ursprünglich irgendwie geladen ist, unter dem Einfluss externer electromotorischer Kräfte, so schwindet seine innere Ladung allmälig mit einer von der Grösse der externen Kräfte unabhängigen Geschwindigkeit. Zuletzt ist das Medium seiner ganzen innern Ladung beraubt, und so lange die Beziehungen zwischen electromotorischer Kraft, electrischer Polarisation und electrischer Leitungfähigkeit für den Körper dieselben bleiben, kann auch keine externe Kraft in irgend einem innern Teile des Mediums eine Ladung hervorbringen oder erhalten.

Tritt aber eine disruptive Entladung ein, so hören jene Beziehungen auf zu gelten, und dann kann sich irgend ein innerer Teil des Mediums wieder mit Electricität laden.

Ladung und Entladung eines Condensators.

326. Sei C die Capacität eines Condensators, R sein Widerstand und E die ihn angreifende electromotorische Kraft, das heisst, die Differenz der Potentiale seiner Electrodenflächen.

Die Electricitätsmenge auf der Seite des Condensators, die zuerst von der Wirkungsrichtung der electromotorischen Kraft getroffen wird, ist dann gleich CE und die Stärke des Stromes, der durch den Condensator bei der Entladung in Richtung der electromotorischen Kraft geht, gleich E/R.

Digitized by Google

Gewöhnlich unternimmt man mit einem Condensator die folgenden Operationen.

Man schaltet ihn in den Stromkreis einer electrischen Batterie ein.

Ist dann E die den Condensator zu einer bestimmten Zeit t angreifende electromotorische Kraft und dQ/dt die Stärke, mit der der Strom durch seinen Kreis fliesst, so hat man

1a) $$\frac{dQ}{dt} = \frac{E}{R} + C\frac{dE}{dt}.$$

Bezeichnet aber E_0 die electromotorische Kraft der Batterie und r_1 ihren Widerstand, so ist auch

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{E_0 - E}{r_1},$$

also

1b) $$\frac{E_0 - E}{r_1} = \frac{E}{R} + C\frac{dE}{dt},$$

woraus durch Integration die Potentialdifferenz E_1 des Condensators zur Zeit t_1 nach seiner Einschaltung in den Stromkreis sich zu

2_1) $$E_1 = E_0 \frac{R}{R + r_1}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}}\right), \quad T_1 = \frac{CRr_1}{R + r_1}$$

ergiebt.

Man unterbricht zur Zeit t_1 den Strom und überlässt den Condensator durch eine Zeit t_2 sich selbst, am Schluss dieser Zeit ist dann

2_2) $$E_2 = E_1 e^{-\frac{t_2}{T_2}}, \quad T_2 = CR.$$

Endlich setzt man die beiden Flächen des Condensators durch einen Draht vom Widerstande r_3 mit einander in leitende Verbindung und hat zur Zeit t_3 nach dieser Verbindung

2_3) $$E_3 = E_2 e^{-\frac{t_3}{T_3}}, \quad T_3 = \frac{CRr_3}{R + r_3}.$$

Für die während der Zeit t_3 durch den Draht hindurchgehende Electricitätsmenge Q_3, also für die Entladung, die durch den Draht vor sich geht, nachdem man den Condensator während der Zeit t_1 mit einer Batterie verbunden und während der Zeit t_2 isolirt gehalten hat, findet man demnach

3) $$Q_3 = E_0 \frac{CR^2}{(R + r_1)(R + r_3)}\left(1 - e^{-\frac{t_1}{T_1}}\right) e^{-\frac{t_2}{T_2}}\left(1 - e^{-\frac{t_3}{T_3}}\right).$$

Wählt man t_1 und t_3, wie das meist geschieht, so gross, dass einerseits der Condensator, so weit es die Umstände gestatten, sich voll zu laden und

Digitized by Google

nachher sich vollständig zu entladen vermag, so hat man für die gesammte entladene Electricitätsmenge

$$3_1) \qquad Q_3 = E_0 \frac{CR^2}{(R+r_1)(R+r_3)} e^{-\frac{t_2}{CR}}.$$

327. Die Giltigkeit dieser Formeln beruht auf der Voraussetzung, dass in einem solchen Condensator, der zuerst irgendwie geladen und dann durch einen Draht von geringem Widerstande entladen wird, wenn man ihn wieder isolirt, weiter keine Electricität erscheint. In der Praxis findet man aber, dass in den meisten gebräuchlichen Condensatoren einige Zeit nach ihrer Entladung und Isolirung eine neue Ladung — man nennt sie das *Electrische Residuum* — sich entwickelt, die mit der ersten das gleiche Zeichen hat, aber weniger intensiv ist als diese. Zur Erklärung dieser Erscheinung müssen wir für die Dielectrica eine andere Constitution annehmen, als wir sie hier vorausgesetzt haben. Ich werde aber bald zeigen, dass ein Medium, welches aus einem Conglomerat kleiner Stückchen verschiedener diese Erscheinung nicht zeigender Substanzen zusammengesetzt ist, im allgemeinen doch die Eigenschaft, ein Residuum zu entwickeln, besitzt.

Theorie der zusammengesetzten Dielectrica.

Geschichtetes Dielectricum.

328. Der Einfachheit wegen setze ich voraus, dass das betreffende Medium aus einer Reihe planer und paralleler Schichten von verschiedenen Substanzen zusammengesetzt ist, und dass die electromotorische Kraft senkrecht zu den Schichten wirkt. Die erste und die letzte Schicht sollen aus gut leitendem Material hergestellt sein.

Ich nehme den Inhalt der Begrenzungsflächen der einzelnen Schichten gleich 1 an, und bezeichne in den einzelnen Schichten mit

$a_1, a_2, \ldots$ die Dicken,
$X_1, X_2, \ldots$ die resultirenden Kräfte,
$p_1, p_2, \ldots$ die Stärken der geleiteten Ströme,
$f_1, f_2, \ldots$ die electrischen Verschiebungen,
$u_1, u_2, \ldots$ die gesammten Stromstärken, die teils der Leitung, teils der Variation der Verschiebung ihre Entstehung verdanken,
$r_1, r_2, \ldots$ die specifischen Widerstände bezogen auf Volumeinheit,
$K_1, K_2, \ldots$ die specifischen inductiven Capacitäten,
$k_1, k_2, \ldots$ die reciproken Werte der eben genannten specifischen inductiven Capacitäten,
$\sigma_{12}, \sigma_{23}, \ldots$ die Flächendichte der auf der Trennungsfläche zweier aufeinanderfolgender Schichten aufgesammelten Electricität.

Digitized by Google

Weiter nenne ich

E die Grösse der electromotorischen Kraft einer Voltaschen Batterie, die sich in demselben Kreise wie das Medium befindet und einen Strom von seiner letzten zu seiner ersten Schicht sendet,

Q die durch den Teil des Kreises, wo das Medium eingeschaltet ist, bis zur Zeit t hindurchgeflossene Electricitätsmenge,

R_0 den Widerstand der Batterie zusammen mit dem der verbindenden Drähte.

Beziehen wir den Index 1 auf irgend ein Stratum, so ist nach dem Ohmschen Gesetz

a) $$X_1 = r_1 p_1,$$

und nach der in Art. 75 auseinandergesetzten Theorie der electrischen Verschiebung auch

b) $$X_1 = 4\pi k_1 f_1.$$

Ferner nach der Definition dieser Grössen

c) $$u_1 = p_1 + \frac{df_1}{dt}.$$

Weiter haben wir wegen Gleichung b) und der charakteristischen Bedingung (Art. 83a, 2)

d) $$\sigma_{12} = f_2 - f_1,$$

also

e) $$\frac{d\sigma_{12}}{dt} = \frac{df_2}{dt} - \frac{df_1}{dt}.$$

Andererseits ist aber

f) $$\frac{d\sigma_{12}}{dt} = p_1 - p_2,$$

somit

g) $$p_1 + \frac{df_1}{dt} = p_2 + \frac{df_2}{dt} = u \text{ etwa.}$$

Beachtet man die Gleichung c), so folgt hieraus als erstes allgemeines Ergebnis

1) $$u_1 = u_2 = u_3 = \ldots = u.$$

Der Gesammtstrom geht also durch alle Schichten mit einer und derselben Stärke durch, und zwar, weil die erste und die letzte Schicht aus guten Leitern bestehen sollten, mit der Stärke, die er in der Batterie und in dem Schliessungsdraht hat.

Ferner folgt aus den Gleichungen unter a), b), c) und 1)

2) $$u = \frac{1}{r_1} X_1 + \frac{1}{4\pi k_1} \frac{dX_1}{dt},$$

Digitized by Google

also bei Benutzung einer leichtverständlichen Bezeichnung für inverse Operationen

3) $$X_1 = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{4\pi k_1}\frac{d}{dt}\right)^{-1} u.$$

Die gesammte electromotorische Kraft ist

4a) $$E = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots,$$

somit haben wir

4) $$E = \left\{a_1\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{4\pi k_1}\frac{d}{dt}\right)^{-1} + a_2\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{4\pi k_2}\frac{d}{dt}\right)^{-1} + \ldots\right\} u,$$

eine Gleichung, die eine Beziehung zwischen der externen electromotorischen Kraft und der externen Stromstärke ausdrückt.

Hat das Verhältnis der specifischen Leitungsfähigkeit zur specifischen inductiven Capacität in allen Schichten eine und dieselbe Grösse, so reducirt sich die Gleichung 4) auf die lineare Differentialgleichung erster Ordnung

4_1) $$E + \frac{r}{4\pi k}\frac{dE}{dt} = (a_1 r_1 + a_2 r_2 + \ldots) u.$$

Aus einer Vergleichung mit der in Art. 326 abgeleiteten Gleichung 1a) ergiebt sich also, dass die obige Voraussetzung bei Substanzen eintrifft, die kein Residuum nach der Entladung aufweisen.

Im allgemeinen ist aber die Gleichung unter 4), wenn das Medium aus n Substanzen zusammengesetzt ist, eine lineare Differentialgleichung der $n$ten Ordnung nach E und der $(n-1)$ten Ordnung nach u, in der t als unabhängige Variabele figurirt.

Aus der Form der Differentialgleichung folgt auch, dass die Reihenfolge, in der die einzelnen Schichten aneinandergelegt sind, den Wert der electromotorischen Kraft nicht beeinflusst. Sind also mehrere Schichten von demselben Material vorhanden, so kann man sie, ohne das Phänomen abzuändern, zu einer Schicht vereinigen.

Electrisches Residuum.

329a. *Wirkung einer momentanen Kraft.* Für specielle Anwendungen setze ich voraus, dass im Beginn des Versuches $f_1 = f_2 = \ldots 0$ ist, und suche den unmittelbaren Effect, den eine plötzlich auftretende electromotorische Kraft E in dem Medium hervorbringt.

Aus der Integration der Gleichung 2) ergiebt sich

1) $$Q = \int u\,dt = \frac{1}{r_1}\int X_1\,dt + \frac{1}{4\pi k_1} X_1 + \text{Const.}$$

Digitized by Google

Das Integrationsintervall sollte sehr eng sein, und da X_1 stets endlich ist, so wird $\int X_1 dt$ eine zu vernachlässigende Grösse werden. Ferner sollte die electromotorische Kraft plötzlich auftreten, mithin verschwindet die Constante, und es bleibt

2) $$X_1 = 4\pi k_1 Q.$$

Aus der Gleichung unter 4a) folgt dann

3) $$E = 4\pi(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \ldots) Q,$$

und damit erhalten wir für die Capacität C des Mediums gemessen durch diese unmittelbar nach Entstehung der electromotorischen Kraft auftretende Ladung

4) $$C = \frac{Q}{E} = \frac{1}{4\pi(a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots)},$$

also dasselbe Resultat, wie wenn wir die Leitungsfähigkeit der einzelnen Schichten ganz vernachlässigt hätten.

329b. *Wirkung eines lang andauernden Stromes auf die nachfolgende Entladung.* Zweitens nehme ich an, dass die electromotorische Kraft E schon seit langer Zeit mit derselben Stärke wirkt, so dass ein gleichförmiger geleiteter Strom von der Stärke p das Medium durchfliesst.

Man hat dann

1) $$X_1 = r_1 p, \ldots$$

also

2) $$E = (r_1 a_1 + r_2 a_2 + \ldots) p.$$

Daraus ergiebt sich der gesammte Widerstand des Mediums

3) $$R = \frac{E}{p} = r_1 a_1 + r_2 a_2 + \ldots$$

Gleichzeitig ist nach b)

4) $$f_1 = \frac{r_1}{4\pi k_1} p,$$

also

5) $$\sigma_{12} = \left(\frac{r_2}{4\pi k_2} - \frac{r_1}{4\pi k_1}\right) p.$$

Verbindet man jetzt plötzlich die beiden Endschichten des Mediums durch einen Draht von geringem Widerstande, so geht E auf einmal von seinem ursprünglichen Wert E_0 auf Null zurück, und es fliesst durch den Draht eine Electricitätsmenge Q hindurch, die sich leicht bestimmen lässt.

Da nämlich $E = 0$ ist, so wird

$$0 = a_1 X_1' + a_2 X_2' + \ldots,$$

wo X_1', X_2' die in dem neuen Zustande auftretenden Kräfte bezeichnen.

Digitized by Google

Andererseits ist aber nach den Gleichungen 1) und 2) des voraufgehenden Artikels

6) $$X_1' = X_1 + 4\pi k_1 Q,$$

somit

7) $$0 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + 4\pi(a_1 k_1 + a_2 k_2 + \ldots) Q,$$

oder wegen Gleichung 4a) des Art. 328 und der Gleichung 4) des Art. 329a

8) $$0 = E_0 + \frac{Q}{C}.$$

Die plötzliche Entladung Q ist also gleich $-CE_0$, das heisst ebensostark wie die früher betrachtete plötzliche Ladung.

Unterbricht man unmittelbar nach dieser Entladung die Verbindung der beiden Endschichten, so wird $u = 0$, also nach der Gleichung 2) des Art. 328

9a) $$X'' = X' e^{-\frac{4\pi k_1}{r_1} t},$$

wo X' den Anfangswert von X nach der Entladung angiebt, also zufolge des aus 6) und 8) sich ergebenden Wertes von X'

9) $$X'' = E_0 \left\{\frac{r_1}{R} - 4\pi k_1 C\right\} e^{-\frac{4\pi k_1}{r_1} t},$$

somit

10) $$E = E_0 \left\{a_1 \left(\frac{r_1}{R} - 4\pi k_1 C\right) e^{-\frac{4\pi k_1}{r_1} t} + a_2 \left(\frac{r_2}{R} - 4\pi k_2 C\right) e^{-\frac{4\pi k_2}{r_2} t} + \ldots\right\}.$$

Lässt man z dieser Zeit das Medium sich wieder plötzlich entladen, so ist die Electricitätsmenge, die dieser zweite Entladungsstrom mit sich führt, gleich CE, und diese Electricitätsmenge ist das, was man als electrisches Residuum bezeichnet.

Die Summe aller Coefficienten der Exponentialfunctionen in dem Ausdruck 10) für E ist nach den voraufgehenden Gleichungen für R und C gleich Null, wird also $r_1/k_1 = r_2/k_2 = \ldots$, so reducirt sich auch E auf Null, es tritt dann, wie auch schon früher bemerkt, kein Residuum auf.

Ordnet man ferner die Glieder in 10) nach steigender Grösse der Verhältnisse r/k, so nehmen die Coefficienten der Exponentialfunctionen und auch die Exponentialfunctionen für positive t den absoluten Beträgen nach ab, für $t = 0$ ist aber $E = 0$, somit ist E für $t > 0$ stets positiv, das heisst, das electrische Residuum hat dasselbe Zeichen wie die erste Entladung.

Wird t unendlich gross, und ist unter den Schichten keine aus einem vollkommen isolirenden Material gebildet, so verschwinden alle Glieder in dem Ausdruck 10) für E, es findet sich dann auch kein Residuum mehr vor.

Digitized by Google

Isolirt aber eine Schicht vollkommen, so dass etwa $r_1 = \infty$ wird, so ist der Endwert von E nicht gleich Null, sondern gleich

$10_1)$ $$E = E_0 (1 - 4\pi a_1 k_1 C).$$

Man kann also in einem zusammengesetzten Medium eine residuelle Entladung unbegrenzte Zeit erhalten, wenn einige seiner Componenten, aber nicht alle, aus vollkommenen Isolatoren gebildet sind.

330. Ich bestimme ferner die durch einen Draht, welcher permanent mit den Endschichten verbunden ist und einen Widerstand R_0 besitzt, vor sich gehende totale Entladung, wenn das Medium vorher durch lang andauernde Anwendung einer electromotorischen Kraft E geladen worden ist.

In irgend einem Augenblick der Entladung ist nach den Gleichungen der vorhergehenden Artikel

11) $$E = a_1 r_1 p_1 + a_2 r_2 p_2 + \ldots + R_0 u = 0,$$

und da nach der Gleichung c) des Art. 328

$$u = p_1 + \frac{df_1}{dt}$$

ist, so wird

12) $$(R + R_0) u = a_1 r_1 \frac{df_1}{dt} + a_2 r_2 \frac{df_2}{dt} + \ldots$$

Daraus folgt durch Integration

$$(R + R_0) Q = a_1 r_1 (f_1' - f_1) + a_2 r_2 (f_2' - f_2) + \ldots,$$

wo die f die Anfangs- und f' die Schlusswerte der f angeben.

Es ist aber für unsern Fall $f_1' = f_2' = \ldots 0$, und nach b) in Art. 328 und 9) in Art. 329b)

13) $$f_1 = E_0 \left(\frac{r_1}{4\pi k_1 R} - C \right),$$

somit wird

14) $$(R + R_0) Q = -\frac{E_0}{4\pi R} \left(\frac{a_1 r_1^2}{k_1} + \frac{a_2 r_2^2}{k_2} + \ldots \right) + E_0 C R$$
$$= -\frac{C E_0}{R} \sum\sum \left[a_1 a_2 k_1 k_2 \left(\frac{r_1}{k_1} - \frac{r_2}{k_2} \right)^2 \right]$$

wo die Summationen sich auf alle Grössen von der Form des angegebenen Gliedes, die irgend einem Paar Schichten angehören, beziehen.

Q ist negativ, die Entladung findet also in entgegengesetzer Richtung wie die Ladung statt.

Es zeigt sich aber, dass ein Dielectricum, wenn es aus einzelnen verschiedenen Substanzen angehörigen Schichten zusammengesetzt ist,

Digitized by Google

die Erscheinungen der electrischen Absorption und des electrischen Residuums selbst dann hervortreten lassen kann, wenn sie in keinem der Materialien, aus denen die Schichten geschnitten sind, für sich angetroffen werden.

Ein ähnliches Resultat würde man durch complicirtere Rechnungen für Dielectrica auch dann erhalten, wenn ihre Componenten in anderer, weniger einfacher Weise, angeordnet wären.

Man kann also überhaupt schliessen, dass im allgemeinen electrische Absorption und electrisches Residuum überall da auftreten werden, wo man es mit Dielectricis zu tun hat, die aus, selbst mikroskopisch kleinen Teilchen verschiedener Substanzen zusammengesetzt sind, wenn auch diese Substanzen für sich jene Erscheinungen nicht zeigen.

Daraus folgt aber keineswegs, dass auch jedes Medium, bei welchem jene Erscheinungen angetroffen werden, aus verschiedenen Substanzen zusammengesetzt sein muss, denn es ist sehr wohl möglich, dass die fraglichen Phänomene die Existenz einer ganz besondern Art von electrischer Polarisation in homogenen Mitteln anzeigen, einer Art, die vielleicht mehr der electrochemischen als der hier supponirten dielectrischen Polarisation ähnelt.

Ich habe auch die obige Untersuchung mehr zu dem Zwecke angestellt, um mathematisch scharf den Charakter der sogenannten electrischen Absorption zu fixiren, und um den fundamentalen Unterschied zwischen diesem Phänomen und der mit demselben Namen bezeichneten auf den ersten Blick analogen Erscheinung in der Wärmetheorie klar hervortreten zu lassen.

Strom durch ein System von Condensatoren.

331. Erhitzt man die eine Seite einer dicken Platte so stark, dass ein Wärmestrom durch sie hindurchfliesst, kühlt sie dann plötzlich bis auf die Temperatur der andern Seite ab, und überlässt die Platte sich selbst, so strömt Wärme aus dem Innern der Platte zurück, und die früher erhitzte Seite derselben wird nochmals wärmer als die andere nicht erhitzte.

Ein ganz entsprechendes Phänomen kann man auch mit der Electricität zu Stande bringen, und trifft es auch wirklich bei telegraphischen Kabeln an. Die mathematischen Gesetze, nach denen diese electrische Erscheinung vor sich geht, stimmen mit denen, die für die analoge thermische Erscheinung gelten, überein, sind aber gänzlich verschieden von den Gesetzen, welchen die Erscheinung des Residuums in geschichteten Condensatoren gehorchen.

Ganz streng ist die Analogie zwischen der genannten thermischen Erscheinung und der entsprechenden electrischen nicht, denn bei der Erwärmung eines Körpers geht mit der Temperaturerhöhung gleichzeitig eine wirkliche Absorption von Wärme Hand in Hand, die bei der Electricität nicht zu Stande zu bringen ist.

Man kann aber doch die genannte thermische Erscheinung in der folgenden, für einen Vorlesungsversuch geeigneten Weise nachahmen.

Digitized by Google

Es seien $A_1, A_2 \ldots$ die innern und $B_0, B_1 B_2, \ldots$ die äussern leitenden Belegungen einer Reihe von Condensatoren. Ich verbinde die innern Belegungen $A_1, A_2, \ldots$ mit einander durch Drähte von den Widerständen R_1, $R_2, \ldots$ und ziehe von der ersten und letzten innern Belegung eine Leitung, die zu bezüglichen Polen einer Batterie führt. Alle innern Belegungen werden dann von der Linken zur Rechten von einem Strome

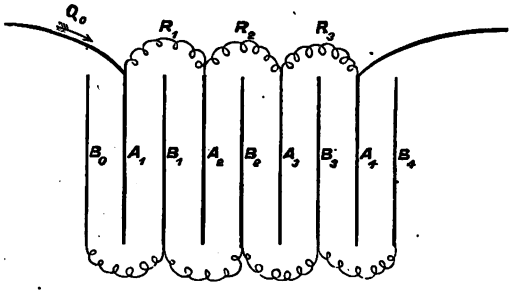


Fig. 26.

durchflossen. Die äussern Belegungen $B_0, B_1, B_2, \ldots$ erhalte ich zunächst isolirt, die Summe ihrer Ladungen kann sich dann nicht über Null erheben, und da in jedem Falle die Electricitätsmenge einer Belegung A gleich und entgegengesetzt der ihr gegenüberstehenden Fläche sein muss, so werden sie überhaupt nicht electrisirt, und ihre Anwesenheit ist auf den Strom ohne Einfluss.

Verbindet man jetzt die Belegungen B alle mit einander und mit der Erde, so fallen ihre Potentialniveaus auf Null, und da das Potential auf den A positiv ist, so laden sich die A positiv und die B negativ.

Ich bezeichne mit $P_1, P_2, \ldots$ die Potentiale der Belegungen A, nenne $C_1, C_2, \ldots$ die Capacitäten derselben und lasse von der Batterie zur ersten Belegung die Electricitätsmenge Q_0, von dieser zur zweiten durch R_1 die Electricitätsmenge Q_1 u. s. f. zuströmen. Die Ladung von A_1 ist dann gleich $Q_0 - Q_1$, die von A_2 ist $Q_1 - Q_2$ u. s. f. und man hat die Beziehungen

$$1) \qquad \begin{aligned} Q_0 - Q_1 &= C_1 P_1, \\ Q_1 - Q_2 &= C_2 P_2, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Nach dem Ohmschen Gesetz ist aber auch

$$2) \qquad \begin{aligned} P_1 - P_2 &= R_1 \frac{dQ_1}{dt}, \\ P_2 - P_3 &= R_2 \frac{dQ_2}{dt}, \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Digitized by Google

Richtet man sich also so ein, dass alle Belegungen dieselbe Capacität C und alle Verbindungsdrähte denselben Widerstand R besitzen, so hat man

3)
$$Q_0 - 2Q_1 + Q_2 = RC\frac{dQ_1}{dt},$$
$$Q_1 - 2Q_2 + Q_3 = RC\frac{dQ_2}{dt},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hat man n Electricitätsmengen zu bestimmen, und ist entweder die gesammte electromotorische Kraft oder etwas anderes mit ihr zusammenhängendes gegeben, so folgt aus dem obigen System von Gleichungen für jede der zu berechnenden Grössen eine lineare Differentialgleichung von der $n$ten Ordnung.

Indem Varley einen derartigen Apparat zusammensetzte, konnte er die electrische Wirkung eines etwa 3000 Meilen langen Kabels auf einen Strom nachahmen.

Wenn der Strom von links durch die Belegungen zu fliessen beginnt, so wird er zunächst hauptsächlich zur Ladung der Condensatoren in Anspruch genommen, und es kommt von ihm eine geraume Zeit hindurch nur ein geringer Bruchteil im Ableitungsdraht zum Vorschein. Er ladet erst A_1, dann A_2, dann A_3 u. s. f. Schaltet man also in die Verbindungsdrähte R_1, R_2, R_3.... Galvanometer ein, so werden diese eines nach dem andern vom Strom afficirt, und es verfliesst eine um so grössere Zeit, ehe ein Galvanometer einen Strom anzeigt, je weiter dasselbe von der Eintrittstelle des Stromes entfernt ist.

Telegraphische Kabel.

332. Bei einem telegraphischen Kabel ist der Leitungsdraht von äussern Leitern durch eine cylindrische Umkleidung von Guttapercha oder einem andern nicht leitenden Material getrennt. In einem solchen Kabel bildet also jedes Stück einen Condensator, dessen äussere Belegung das Potential Null hat.

Die auf der Oberfläche des betreffenden Drahtstückes befindliche freie Electricitätsmenge ist also gleich dem Producte aus dem daselbst herrschenden Potential in die Capacität des als Condensator betrachteten Kabelstückes.

Nach Art. 126 ist diese Capacität für die Längeneinheit des Kabels

1)
$$c = \frac{K}{2\log\frac{a_1}{a_2}},$$

Digitized by Google

wenn K die specifische inductive Capacität der isolirenden Hülle, a_1 ihren äusseren und a_2 ihren innern Radius angiebt, und der Draht als überall gleich dick angenommen wird.

Die zwischen zwei von einander um δx abstehenden Querschnitten des Drahtes enthaltene Electricitätsmenge ist $cv\delta x$, wo v das Potential des Drahtes an der Stelle x angiebt.

Bezeichnet aber Q die Electricitätsmenge, welche seit Beginn des Stromes bis zur Zeit t durch einen bei x befindlichen Querschnitt des Drahtes geflossen ist, so haben wir für die zwischen den zwei Querschnitten bei x und $x + \delta x$ zur Zeit t enthaltene Electricitätsmenge auch den Ausdruck

$$Q - \left(Q + \frac{\partial Q}{\partial x}\delta x\right), \text{ also } -\frac{\partial Q}{\partial x}\delta x,$$

somit ergiebt sich die Gleichung

$$2) \qquad cv = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ferner ist die zwischen den beiden Querschnitten wirkende electromotorische Kraft $-\partial v/\partial x$ nach dem Ohmschen Gesetz

$$3) \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = k\frac{\partial Q}{\partial t},$$

wo k den Widerstand der Längeneinheit des Drahtes bezeichnet.

Eliminirt man Q aus den Gleichungen 2) und 3), so folgt

$$4_1) \qquad ck\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Diese partielle Differentialgleichung, der das Potential in jedem Punkte des Drahtes zu gehorchen hat, ist der Form nach identisch mit der von Fourier zur Bestimmung der Temperatur in den Querschnitten eines Körpers, der senkrecht zu diesen Querschnitten von Wärme durchströmt wird, gegebenen Differentialgleichung. Dort bezeichnet aber c — in Fouriers Symbolen CD — die auf Volumeinheit bezogene Wärmecapacität des Körpers und giebt k den reciproken Wert der Wärmeleitungsfähigkeit.

Die obige Differentialgleichung erfordert eine Abänderung, wenn die Hülle des Drahtes nicht vollkommen isolirt, denn dann muss der Strom nicht blos so viel Electricität, als zur Ladung des Drahtes nöthig ist, mit sich führen, sondern er muss auch die Electricitätsmenge, welche sich durch die Hülle zerstreut, ersetzen. Der Betrag der Ladung ist nach wie vor gleich cv, und die durch die Mantelfläche gehende Electricitätsmenge gleich v/k_1, wo k_1 den Widerstand einer Längeneinheit der Hülle gegen

Digitized by Google

die radiale Leitung des Stromes angiebt. Daher ist die gesammte verwendete Electricitätsmenge

$$-\frac{\partial^2 Q}{\partial x\,\partial t} = c\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{v}{k_1},$$

somit nach Gleichung 3)

$$4) \qquad ck\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{k}{k_1}v,$$

und das stimmt mit der von Fourier*) für die Fortpflanzung der Wärme durch einen Stab oder einen Ring unter Berücksichtigung der äussern Leitungsfähigkeit gegebenen Differentialgleichung überein.

Bezeichnet ρ_1 den specifischen Widerstand der isolirenden Hülle, so ist, wie man leicht findet,

$$k_1 = \frac{\rho_1}{2\pi}\log\frac{a_1}{a_2}.$$

333. Dieselben Gleichungen hätten wir auch erhalten, wenn wir von der Voraussetzung ausgegangen wären, dass die Ladung eines Körpers zu einem hohen Potentialniveau in einer Electrisirung seiner ganzen Substanz besteht, wie wenn die Electricität in ihn hineingepresst worden wäre. Es ist bemerkenswert, dass Ohm selbst, irregeführt durch die Analogie, die scheinbar zwischen der Fortpflanzung von Electricität und der von Wärme besteht, für eine solche Voraussetzung eingenommen gewesen ist. In der Tat glaubte er sich berechtigt, die Fourierschen Gleichungen für die Wärmeleitung ohne weiteres auf die Electricitätsleitung übertragen zu dürfen. Ohm ist also durch nicht stichhaltige Voraussetzungen zu den richtigen Gesetzen für die Leitung der Electricität durch einen langen Draht gelangt, lange ehe man den wahren Grund für die Existenz jener Gesetze vermutet hat.**)

Mechanische Versinnbildlichung der Eigenschaften eines Dielectricums.

334. Der Apparat, dessen ich mich zur Versinnbildlichung der Vorgänge in einem Dielectricum bedienen will, besteht aus 5 gleich weiten Röhren *A*, *B*, *C*, *D*, *P*, die mit einander in der durch die beistehende Figur angegebenen Weise verbunden sind. Die vier erstgenannten Röhren laufen vertical, die fünfte *P* erstreckt sich horizontal.

*) *Théorie de la chaleur*, Art. 105.

**) Dieser wahre Grund ist bekanntlich von Kirchhoff aufgefunden worden. Anm. d. Uebers.

Digitized by Google

Die untern Hälften der vier Röhren A, B, C, D sind mit Quecksilber gefüllt, die obern Hälften enthalten ebenso wie die Röhre P Wasser.

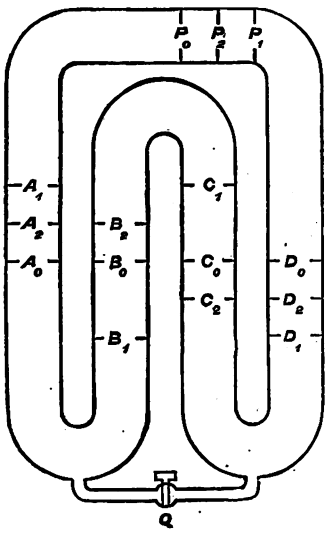


Fig. 27.

Eine enge Röhre mit einem Hahn bei Q dient zur Verbindung der untern Teile des Röhrenpaars A, B mit dem untern Teile des Röhrenpaars C, D, und ein in der horizontalen Röhre P gleitender Stempel gestattet durch seine Verschiebung in den einzelnen Röhren Druckdifferenzen hervorzubringen.

Beim Beginn des Experiments sollen sich die Quecksilberniveaus A_0, B_0, C_0, D_0 in allen vier Röhren A, B, C, D in gleicher Höhe befinden, die Lage, die dann der Stempel in der Röhre P einnimmt, bezeichne ich mit P_0.

Schliesst man den Hahn Q und bewegt den Stempel von P_0 bis P_1 durch eine Strecke a, so steigt, weil alle 5 Röhren gleich weit sind, das Quecksilberniveau in den Röhren A und C um die Strecke a bis A_1, C_1 an und sinkt in den Röhren B und D um dieselbe Strecke a bis B_1, D_1.

Die Druckdifferenz zu beiden Seiten des Stempels beträgt also $4a$.

Stellt man sich unter Wasser positive, unter Quecksilber negative Electricität, und unter der zu beiden Seiten des Stempels herrschenden Druckdifferenz eine electromotorische Kraft vor, so repräsentirt jenes Arrangement den Zustand eines Dielectricums, das von einer electromotorischen Kraft $4a$ angegriffen ist; das eine Ende A_1 erhält einen Ueberschuss an negativer und das andere D_1 einen an positiver Electricität. Die Differenz des Potentials auf der positiven Seite des Dielectricums gegen das Potential auf der negativen Seite wird dann durch die Differenz des Druckes auf der D zugewandten Seite des Stempels gegen den der andern Seite des Stempels herrschenden Druck dargestellt.

Kann sich der Stempel in der Röhre P frei bewegen, so geht er in seine Gleichgewichtslage zurück, und dem entspricht eine vollständige Entladung des Dielectricums.

Während der Stempel zurückgeht, verschiebt sich auch die Flüssigkeit in der ganzen Röhrencombination nach rückwärts, und das hat sein Analogon in der Aenderung der electrischen Verschiebung, die in Dielectricis Platz greifen sollte.

Nimmt man noch zudem an, dass das Wasser sowohl wie das Quecksilber gänzlich incompressibel sind, so ist damit auch der Eigenschaft einer electrischen Verschiebung Rechnung getragen, dass während eine solche vor

Digitized by Google

sich geht, an keiner Stelle des Dielectricums eine reelle Aufhäufung von Electricität stattfindet.

Oeffnet man, während der Stempel sich in P_1 befindet, den Hahn Q, so treten die Röhren A und D, B und C unmittelbar mit einander in Verbindung. In A und D bleibt das Quecksilberniveau unverändert in den bezüglichen Lagen A_1 und D_1, dagegen steigt es in B und fällt in C, bis es in beiden Röhren in die ursprüngliche Stellung B_0 bezüglich C_0 gelangt ist. Die Druckdifferenz zu beiden Seiten des Stempels fällt, während das Quecksilber durch Q von C nach B übergeht, von $4\,a$ bis auf $2a$.

Der Existenz der Ausgleichungsbahn Q entspricht in dem Dielectricum die Existenz eines Substanzteiles, welches ein schwaches Leitungsvermögen besitzt, das aber nicht das ganze Dielectricum durchzieht, also keinen leitenden Canal bildet.

Die Ladungen der entgegengesetzten Seiten des Dielectricums bleiben dann immer noch von einander isolirt, aber ihre Potentialdifferenz verringert sich, ganz so wie auch die Druckdifferenz zu beiden Seiten des Stempels durch Oeffnung des Canals Q abnimmt.

Schliesst man wieder den Hahn Q und gestattet dem Stempel sich frei zu bewegen, so kommt er schon in P_2 zur Ruhe, und dem entspricht, dass in dem Dielectricum die Entladung nur halb so gross zu sein scheint, als sie früher war. Das Niveau des Quecksilbers bleibt in den Röhren A, B bei A_2, B_2, um $a/2$ über A_0, B_0, und in den Röhren C, D bei C_2, D_2, um $a/2$ unter C_0, D_0 stehen.

Hält man wieder den Stempel an und öffnet die Ausgleichungsbahn Q, so fliesst wieder Quecksilber von B nach C bis das Niveau in beiden Röhren gleich hoch bei B_0, C_0 steht, zugleich steigt die Druckdifferenz zu beiden Seiten des Stempels bis auf a. Schliesst man Q und lässt den Stempel sich frei bewegen, so bleibt er auf halbem Wege zwischen P_2 und P_0 in P_3 stehen, und diese zweite Druckausgleichung entspricht der residuellen Entladung, die man zu beobachten Gelegenheit hat, wenn ein Dielectricum erst geladen, dann entladen, sich selbst überlassen und wieder entladen wird. Indem man nochmals Q öffnet, kann man eine erneute Druckdifferenz zu beiden Seiten des Stempels und dann nach Schliessung von Q eine erneute Druckausgleichung erlangen, der in Dielectricis eine dritte residuelle Entladung entspricht. Die Druckausgleichungen nehmen ebenso wie die aufeinanderfolgenden Entladungen allmälig an Bedeutung ab. Bei unserm illustrirenden Beispiel ist jede erneute Druckdifferenz, der im Dielectricum eine erneute Potentialdifferenz, also eine erneute Ladung entspricht, halb so gross wie die vorhergehende, und die einzelnen Druckausgleichungen, denen die Entladungen entsprechen, beziehen sich auf $1/2$, $1/4$, $1/8$ ... der ursprünglichen Druckdifferenz (Ladung). Alle Druckausgleichungen zusammen reduciren schliesslich die ursprüngliche Druckdifferenz auf Null.

Hätten wir den Hahn, statt ihn abwechselnd zu öffnen und zu schliessen, durch das ganze Experiment beinahe, aber nicht ganz, geschlossen erhalten,

Digitized by Google

so würden wir einen Vorgang beobachtet haben, der dem in einem electrischen Dielectricum gliche, welches vollständig isolirt und auch noch die Erscheinung der electrischen Absorption zeigt.

Wollen wir auch noch den Fall veranschaulichen, wo das Dielectricum die Electricität tatsächlich leitet, so haben wir entweder den Stempel aus durchlässigem Material zu bilden oder die obern Enden von A und D direct mit einander zu verbinden.

So können wir uns die electrischen Eigenschaften jedes Dielectricums durch mechanische Vorgänge versinnbildlichen, indem wir die beiden Electricitätsarten durch zwei wirkliche Flüssigkeiten darstellen, und ein electrisches Potential durch einen Flüssigkeitsdruck repräsentiren. Laden und Entladen ist dann so viel wie den Stempel vor- bezüglich zurückbewegen. Die electromotorische Kraft hat ihr Analogon in der den Stempel angreifenden resultirenden Druckkraft.

Digitized by Google

Cap. XI.

Messung des electrischen Widerstandes.

Normal-Widerstandseinheiten.

335. Die Bestimmung des electrischen Widerstandes eines Leiters bildet im gegenwärtigen Stande der Wissenschaft bei allen electrischen Untersuchungen in demselben Sinne die Cardinaloperation wie die Bestimmung des Gewichts eines Körpers bei chemischen Arbeiten.

Bei Bestimmung anderer electrischer Grössen in absoluten Maasseinheiten, wie bei der von Electricitätsmengen, electromotorischen Kräften, Stromstärken u. s. f. hat man jedesmal eine complicirte Reihe von Operationen, die sich meist auf die Messung von Zeitintervallen, Längen und Trägheitsmomenten beziehen, auszuführen; und diese Operationen müssen ganz oder teilweise bei jeder neuen Bestimmung wiederholt werden, weil es nicht möglich ist eine Electricitätsmenge oder eine electromotorische Kraft oder eine Stromstärke längere Zeit unverändert zu erhalten, man also für diese Grössen keine unveränderlichen Vergleichsnormale herzustellen vermag.

Ganz anders verhält es sich mit der Messung des electrischen Widerstandes. Diese Grösse hat für einen und denselben Körper unter denselben Verhältnissen stets denselben Betrag, und wenn man sie einmal für einen besonders gestalteten und aus besonderem Material hergestellten Körper bestimmt hat, so findet man sie immer in der einmal bestimmten Grösse wieder, so lange der Zustand des Körpers sich nicht geändert hat. Man kann also einen solchen Körper als Standard benutzen und aus seinem Widerstand den andern Körper ableiten. Die Vergleichung zweier Widerstände lässt sich aber mit äusserster Schärfe durchführen.

Ist einmal eine Einheit für den electrischen Widerstand fixirt, so kann man sie in beliebigem Material copiren und in der Form von Widerstandsrollen den Electrikern zum Gebrauch überweisen. Man würde dann in

Digitized by Google

der ganzen Welt electrische Widerstände in derselben Einheit auszudrücken vermögen. Die Normal-Widerstandsrollen bilden bis jetzt das einzige Beispiel electrischer materieller Standards, die man beliebig aufbewahren, vervielfältigen und bei Messungen stets mit demselben Erfolg verwenden kann. Die Methoden, die man bis jetzt zur Messung der electrischen Capacität von Conductoren, deren Kenntnis für die Praxis ebenfalls von hoher Bedeutung ist, ersonnen hat, lassen noch wegen des störenden Einflusses der electrischen Absorption viel zu wünschen übrig.

336. Die Einheit für den Widerstand kann zunächst ganz willkürlich festgesetzt werden. Jacobis Etalon bestand aus einem gewissen Kupferdraht von 22,4932 g Gewicht, 7,61975 m Länge und 0,667 mm Durchmesser. Leyser in Leipzig hat eine Anzahl Copieen dieses Etalons angefertigt, die man noch in manchen Laboratorien finden kann.

Nach einer andern Methode wird die Widerstandseinheit als der Widerstand eines Stückes einer bestimmten Substanz von bestimmten Dimensionen unter bestimmten Verhältnissen definirt. So ist die *Siemenssche Widerstandseinheit* als der Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt bei 0° C. festgesetzt.

337. Endlich kann man die Widerstandseinheit auch in das System der electrostatischen oder electromagnetischen Einheiten einrangiren. In der Praxis bedient man sich bei allen telegraphischen Operationen lediglich electromagnetischer Maasseinheiten, und diese sind tatsächlich die einzigen im gewöhnlichen Gebrauch befindlichen systematischen Einheiten.

Im electromagnetischen System ist aber, wie wir noch später, Art. 628, sehen werden, der Widerstand von den Dimensionen einer Geschwindigkeit, er kann also direct als Geschwindigkeit ausgedrückt werden.

338. Die ersten wirklichen Messungen in diesem System von Maasseinheiten sind von Weber ausgeführt worden. Seine Widerstandseinheit entsprach der Geschwindigkeit, mit der ein gleichförmig sich bewegender Körper ein Millimeter in einer Secunde zurücklegt. Thomson setzte dafür später einen Fuss in einer Secunde, eine grosse Anzahl von Electrikern ist aber jetzt darin übereingekommen, die *British Association Einheit* zu benutzen, die einen Widerstand repräsentiren soll, welcher als Geschwindigkeit aufgefasst, einen Körper in einer Secunde zehn Millionen Meter fortbewegen würde. Die Grösse dieser Einheit ist geeigneter als die von Weber gewählte, die zu klein ausgefallen ist. Man bezeichnet sie öfters als die *B. A. Einheit*, um sie aber mit dem Namen des Entdeckers der Gesetze, denen der Widerstand unterworfen ist, in Verbindung zu bringen, nennt man sie ein *Ohm*.

339. Der Leser wird sich den Wert dieser Widerstandseinheit leichter dem Gedächtnis einprägen, wenn er bemerkt, dass die zehn Millionen Meter gleich der Bogenlänge des Pariser Meridians vom Nordpol bis zum Aequator sein sollten. Legt also ein Körper in gleichförmiger Bewegung auf der

Digitized by Google

Erde in der Secunde den Weg vom Pol durch Paris zum Aequator zurück, so hat er eine Geschwindigkeit, die im electromagnetischen Maasssystem durch den festgesetzten Widerstand, „ein Ohm", repräsentirt sein würde.

Ich sage festgesetzt, weil, wenn etwa spätere genauere Untersuchungen zeigen sollten, dass das Ohm, wie es durch die von der British Association construirten materiellen Standards fixirt ist, nicht streng jener Geschwindigkeit entspricht, weil also dann die Electriker nicht ihre Standards abändern, sondern an ihre Angaben Correctionen hinzufügen werden. So ist ja auch das Meter seiner Festsetzung nach der zehnmillionste Teil eines gewissen Erdquadranten, und obgleich man jetzt weiss, dass seine materiellen Typen dem nicht genau entsprechen, so hat man diese doch nicht abgeändert, sondern es vorgezogen, die Dimensionen der Erde durch diese Typen selbst zu messen und sie so in weniger einfachen Zahlen auszudrücken.

In dem Maasssystem der British Association ist der absolute Wert der Widerstandseinheit ursprünglich so gewählt, dass er einer aus dem electromagnetischen System abgeleiteten Grösse so nahe als möglich kommt.

340. Nach Fertigstellung einer materiellen Repräsentation für diese abstracte Einheit schaffte man eine Anzahl anderer Normale, indem man dieses Prototyp copirte, was mit grosser Genauigkeit — mit verhältnismässig grösserer zum Beispiel als man Längen nach einer Standardlänge zu copiren vermag — geschehen konnte.

Diese aus möglichst unveränderlichem Material hergestellten Copieen schickte man nach allen Teilen der Erde hin, und das Ohm wird ohne Schwierigkeit reconstruirt werden können, falls etwa die Prototype verloren gehen sollten.

Da man aber auch eine solche Einheit wie die Siemenssche ohne viel Mühe mit grosser Genauigkeit herzustellen vermag, so wird man auch mit Hilfe der bekannten Relation zwischen ihr und dem Ohm das Ohm stets finden können, wenn man auch kein zu copirendes Standard besitzt. Freilich würde einerseits die Arbeit, die die Reconstruction des Ohms aus der Siemensschen Einheit erfordern dürfte, sehr beträchtlich sein, und andererseits liesse sie sich lange nicht mit der Präcision durchführen, die man beim Copiren nach einem vorliegenden Standard zu erreichen vermag.

Endlich kann man das Ohm, falls es verloren gehen sollte, auch direct durch ähnliche electromagnetische Versuche, wie man sie bei seiner ursprünglichen Festsetzung ausgeführt hat, nochmals ableiten. Die Construction des Ohms aus seiner Definition ist aber sehr viel mühseliger als zum Beispiel die des Fusses aus der Länge des Secundenpendels und sie lässt sich auch nicht mit der Genauigkeit ausführen, mit der man ein Ohm aus einem andern Ohm oder aus einer Siemensschen Einheit abzuleiten

Digitized by Google

vermag. Da man aber andererseits bei den mächtigen Fortschritten, die unsere Wissenschaft macht, doch die möglich genaueste Relation zwischen der wirklichen electromagnetischen Widerstandseinheit und dem Ohm erstreben muss, so wird eine Wiederholung jener Construction des Ohms aus seiner Definition sich nicht nachdrücklich genug empfehlen lassen.*)

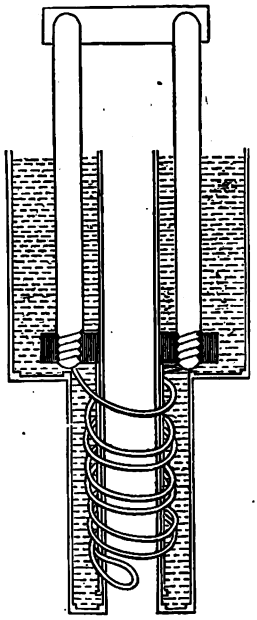


Fig. 28.

Die Widerstandsrollen, welche Copieen des Ohms darstellen sollten, sind in Form von Drähten, deren Durchmesser zwischen 0,5 und 0,8 mm und deren Länge von ein bis zwei Meter schwankte, aus einer Legirung von zwei Teilen Silber und einem Teile Platin hergestellt worden. Die Drähte wurden mit zwei Lagen Seide umsponnen, in festes Paraffin eingebettet und mit einem dünnen Messingetui umgeben. Ihre Enden lötete man an die Enden von zwei dicken Kupfer-Electroden. Die Normaltemperatur, bei der der Draht genau den Widerstand eines Ohms zeigen sollte, ist an der isolirenden Handhabe angemerkt, und kann in jedem Falle durch Erhitzung des Messinggehäuses und damit des den Draht umgebenden Paraffins hergestellt werden.

Die Fig. 28 bringt einen Durchschnitt durch eine solche Rolle zur Ansicht.

Widerstandsrollen.

341. Unter *Widerstandsrolle* versteht man einen Conductor, der leicht in den Kreis einer Voltaschen Batterie eingeschaltet werden kann, und der daselbst den Widerstand um eine ganz bestimmte Grösse erhöht.

Die Electroden einer solchen Rolle müssen so geformt sein, dass kein bemerkenswerter Irrtum durch die Art, wie die Verbindung der Rolle mit der Batterie hergestellt wird, entstehen kann.

Repräsentirt die Rolle einen bedeutenden Widerstand, so genügt es, wenn man ihre Electroden aus möglichst dicken Kupferdrähten oder Kupferstäben bildet. Die Enden der Electroden drückt man gegen flache amalgamirte Kupferstücke, die in Quecksilberkuppen tauchen.

Bei excessiv grossen Widerständen verfährt man auch so, dass man die Electroden aus dicken Messingstücken herstellt und die Verbindung mit der

*) Neuerdings ist eine internationale Commission zur Festsetzung der electrischen und magnetischen Maasse zusammenberufen worden. Anm. d. Uebers.

Digitized by Google

Batterie durch Klumpen von Messing oder Kupfer bewerkstelligt. Solche Verbindungen haben sich als sehr empfehlenswert erwiesen.

Die Widerstandsrolle selbst besteht aus einem mit Seide umsponnenen Draht, dessen Enden permanent durch Anlötung mit den Electroden verbunden sind.

Die äussere Einrichtung ist so zu treffen, dass die Temperatur der Rolle leicht und sicher bestimmt werden kann. Zu dem Behufe rollt man den Draht auf einer Röhre auf, und schiebt darüber eine andere Röhre. Man tut dann das Ganze in ein Gefäss mit Wasser und lässt sowohl die Innenseite als die Aussenseite der Rolle von dem Wasser umspülen.

Zur Vermeidung electromagnetischer Wirkung, die der durch den Draht gehende Strom sonst hervorbringen würde, biegt man den Draht, ehe man ihn auf die Röhre wickelt, um, man legt ihn also doppelt. Der Strom durchfliesst dann zwei nebeneinander liegende Drahtteile in entgegengesetzten Richtungen.

Will man zwei Drähte mit einander auf ihren Widerstand vergleichen, also mehr sich davon versichern, ob sie beide — wie das bei den betreffenden Drähten der Wheatstoneschen Brücke nötig ist — dem Strom genau gleiche Widerstände entgegensetzen, als die absoluten Beträge dieser Widerstände kennen, so legt man sie nebeneinander, wickelt sie zusammen auf die Röhre auf und tut sie in das Wasserbad. Sie befinden sich dann bei der Vergleichung beide auf derselben Temperatur. Als man zuerst Widerstände zu messen begann, stellte man sich die Rollen dadurch her, dass man einen nichtumsponnenen Draht auf einen mit einer entsprechenden spiralförmig laufenden Vertiefung versehenen Cylinder aus isolirendem Material aufrollte. Der Cylinder konnte durch eine Kurbel um seine Axe gedreht werden. Die eine Electrode des Drahtes war wie gewöhnlich geformt, die andere aber war in ihrer Lage veränderlich und wurde meist dadurch hergestellt, dass ein mit einer passenden Rinne versehenes metallenes Rädchen gegen den Draht drückte. Ein solches Instrument nannte man einen *Rheostat*. Man fand aber bald, dass die Genauigkeit, mit der man sonst Widerstände vergleichen konnte, beträchtlich viel grösser war, als man sie mit einem Apparate, in welchem die Contacte nicht vollkommener als in dem Rheostat functionirten, zu erreichen vermochte. Indessen verwendet man den Rheostat noch heutzutage, wenn es sich mehr darum handelt einen Widerstand zu justiren, als ihn wirklich zu messen.

Man stellt die Rollen aus einem Metall her, welches einen möglichst grossen, aber mit der Temperatur möglichst wenig variirenden Widerstand zeigt. Dazu würde sich Neusilber sehr gut eignen, wenn sich nicht gezeigt hätte, dass diese Legirung im Laufe der Zeit manchmal seine Eigenschaften ändert.

Man hat daher die Normal-Rollen aus einigen reinen Metallen, sowie aus einer Mischung von Silber und Platin angefertigt, und es scheint selbst für die jetzt in der Widerstandsmessung erreichbare Präcision das relative

Digitized by Google

Verhalten jener Rollen als für mehrere Jahre unveränderlich angesehen werden zu dürfen.

342. Bei sehr grossen Widerständen, wie es etwa mehrere Millionen Ohms bieten, müsste man die Rollen aus entweder sehr langem oder sehr dünnem Draht construiren, und das ist einerseits nicht leicht ausführbar und andererseits mit bedeutenden Kosten verbunden. Man hat daher Tellur und Selen zur Anfertigung von Normalwiderständen vorgeschlagen. Ich erwähne das ingeniöse und leicht durchführbare Verfahren, das von Phillips angegeben worden ist.*)

Man zieht auf einer Platte aus Ebonit oder mattem Glase mit dem Bleistift eine feine Linie, verbindet die Enden dieser Linie mit Electroden und überstreicht das Ganze mit einem isolirenden Firniss. Sollte es sich herausstellen, dass der Widerstand einer solchen Linie constant bleibt, so dürfte man nach dieser Methode am besten und raschesten sich Widerstände, die mehrere Millionen Ohms repräsentiren, verschaffen können.

343. Zur Einschaltung der Widerstandsrollen in einen Stromkreis hat man mehrere Einrichtungen getroffen.

In dem in der Fig. 29 abgebildeten Siemens'schen Arrangement stellt man eine Anzahl von Rollen, deren Widerstände die bezüglichen Grössen 1, 2, 4, 8, 16, ... haben, also nach Potenzen von 2 fortschreiten, reihenweise

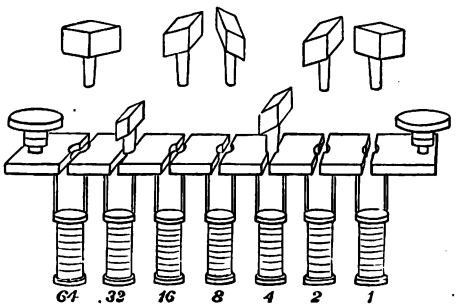


Fig. 29.

in einen Kasten. Jede Rolle hat zwei aus dicken Messingplatten bestehende Electroden, die ausserhalb des Kastens so angeordnet sind, dass bis auf die Endelectroden jede Electrode in einer Reihe zugleich zweien Rollen angehört. Steckt man zwischen zwei Electroden einen dazu gehörigen Messingstöpsel, so wird die betreffende Rolle, weil dann der Strom direct durch die Electroden geht, aus dem Stromkreis ausgeschaltet.

Bei jedem Intervall zwischen zwei Electroden steht die Zahl, welche den Widerstand der darunter befindlichen Rolle markirt. Soll der Widerstand des ganzen Kastens zum Beispiel 107 betragen, so drücken wir die

*) *Phil. Mag.* 1870, Juli.

Digitized by Google

107 erst nach der duadischen Scale durch 64 + 32 + 8 + 2 + 1 oder 1 101 011 aus, ziehen die Stöpsel bei 64, 32, 8, 2, 1 heraus und lassen die bei 16 und 4 vorhandenen stecken.

Dieses auf dem duadischen Zahlensystem gegründete Arrangement empfiehlt sich einerseits deshalb, weil es die geringste Anzahl von getrennten Rollen beansprucht, und andererseits dadurch, dass es am leichtesten einer Prüfung unterzogen werden kann. Will man zum Beispiel den Kasten mit einer Normalrolle 1′ vergleichen, so untersucht man erst die Gleichheit seiner Rolle 1 mit 1′, dann die der Rolle 2 mit 1′ + 1, dann die der Rolle 4 mit 1′ + 1 + 2 u. s. f. Die Anordnung hat aber die Unzuträglichkeit, dass sie den Experimentator als vollständig mit dem Gebrauch des duadischen Zahlensystems vertraut voraussetzt, während das bei Leuten, die nach dem dekadischen Zahlensystem zu rechnen gewöhnt sind, nicht immer der Fall sein wird.

344. Etwas anders richtet man den Widerstandskasten ein, wenn man nicht Widerstände, sondern Leitungsfähigkeiten messen will. Man stellt die Rollen auf ein langes dickes Messingstück, welches als gemeinschaftliche Electrode dient und versieht die freien Enden derselben wie früher mit dicken Messingplatten. Darüber bringt man in einiger Entfernung ein zweites langes dickes Messingstück an, welches als andere Electrode dienen soll. Steckt man zwischen eine Rolle und die obere Electrode einen Messingstöpsel, so wird die Rolle in den Stromkreis eingeschaltet. Je mehr Rollen man so nebeneinander mit der Electrode in Verbindung bringt, desto geringer wird der Widerstand des Kastens, seine Leitungsfähigkeit ist nach Art. 276 gleich der Summe der Leitungsfähigkeiten der einzelnen Rollen.

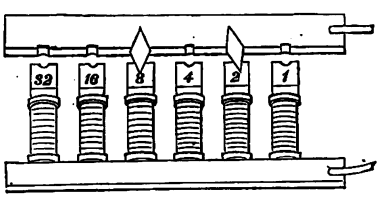


Fig. 30.

In der Fig. 30 ist der Fall dargestellt, dass die Rollen die bezüglichen Widerstände 1, 2, 4, ... haben, und dass die Messingstöpsel bei 2 und 8 mit der obern Electrode verbunden sind, die Leitungsfähigkeit des Kastens ist also = 1/2 + 1/8 = 5/8 und sein Widerstand 8/5 oder 1 . 6.

Man kann darnach den Widerstandskasten in dieser von Thomson herrührenden Anordnung der Rollen nebeneinander auch zur Messung von Bruchtheilen von Widerständen verwenden.

Vergleichung von Widerständen.

Methode von Ohm.

345. Bezeichnet E die electromotorische Kraft einer Batterie und R den Widerstand der Batterie zusammen mit dem ihrer Schliessungsdrähte und

Digitized by Google

des Galvanometers, das zur Messung der Stromstärke dienen soll, giebt ferner J die Stärke des Stromes, wenn er den Widerstand R überwindet, und J_1 bezüglich J_2 die, wenn in seinen Kreis neue Widerstände r_1 bezüglich r_2 eingeschaltet werden, so hat man nach dem Ohmschen Gesetz die drei Gleichungen

$$E = JR = J_1 (R + r_1) = J_2 (R + r_2).$$

Nach Elimination von E, der electromotorischen Kraft der Batterie, und von R, dem Widerstande der Batterie und ihrer Schliessungen, erhält man die von Ohm zuerst aufgestellte Formel

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{J_2 (J - J_1)}{J_1 (J - J_2)}.$$

Die Ohmsche Methode zur Vergleichung zweier Widerstände mit einander erfordert also die Bestimmung der Verhältnisse der Stromstärken J, J_1, J_2 gegen einander, und dazu gehört ein Galvanometer, welches absolute Messungen auszuführen gestattet.

Ist $r_1 = r_2$, so wird auch $J_1 = J_2$, man kann dann mit einem Galvanometer, welches sonst eine Messung des Verhältnisses von Stromstärken nicht zulässt, die Gleichheit zweier Widerstände prüfen.

Diese Bemerkung soll aber nur dazu dienen, die Methode durch ein Beispiel zu exemplificiren. Ihrer wirklichen Benutzung zur Bestimmung von Widerständen stellen sich unüberwindliche Schwierigkeiten entgegen, denn einerseits kann man die electromotorische Kraft E der Batterie nicht genügend constant erhalten, und andererseits variirt auch der Widerstand R fortwährend. Jede Methode, die auf der Voraussetzung einer, selbst kurze Zeit andauernden Constanz dieser Grössen basirt, muss also von vornherein als unpraktisch angesehen werden.

346. Eine ganz ausserordentliche Genauigkeit in der Vergleichung von Widerständen kann man dagegen durch Anwendung der folgenden beiden Methoden erreichen, die den Experimentator gänzlich von der eventuellen Veränderlichkeit der Grössen E und R unabhängig machen.

Methode von Becquerel.

Die erste Methode*) verlangt zu ihrer Durchführung die Benutzung eines *Differential-Galvanometers*, eines Galvanometers, welches zwei Drahtwindungen besitzt, also dem Strom zwei von einander unabhängige Bahnen bietet. Lässt man Ströme durch die beiden Windungen einander entgegen laufen, so wirken sie auf die Nadel des Galvanometers in entgegengesetzten Richtungen, und man kann durch gehörige Justirung der Ströme erreichen, dass ihre Gesammtwirkung auf die Nadel verschwindet.

*) Becquerel, *Ann. de Chim. et de Phys.*, Serie 3, Bd. 17, pag. 242 (1846).

Digitized by Google

Ich nehme nun an, dass beide Windungen des Galvanometers von einem und demselben Strome, dessen Stärke in dem Schliessungsdraht der Batterie gleich J ist, in entgegengesetzten Richtungen durchflossen werden, bezeichne mit α, β die bezüglichen Widerstände der Windungen und ihrer zugehörigen Nebenschliessungen und mit A, B zwei in die erste, bezüglich in die zweite Windung eingeschaltete Widerstände. Ist dann noch E die electromotorische

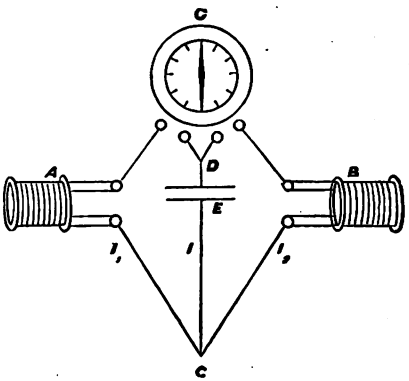


Fig. 31.

Kraft der Batterie, r der Widerstand derselben zusammen mit dem ihrer Nebenschliessungen nach C und D und bezeichnet J_1, J_2 die Stärke des durch die erste, bezüglich zweite Windung des Galvanometers gehenden Stromes, so hat man die Gleichungen

$$J_1 (A + \alpha) = J_2 (B + \beta) = E - Jr,$$
$$J_1 + J_2 = J.$$

Eine Auflösung dieser Gleichungen nach J, J_1, J_2 ergiebt unter Benutzung der Abkürzung

$$D = (A + \alpha)(B + \beta) + r(A + \alpha + B + \beta)$$

$$J = E\,\frac{A + \alpha + B + \beta}{D},\quad J_1 = E\,\frac{B + \beta}{D},\quad J_2 = E\,\frac{A + \alpha}{D}.$$

Nun ist, wie ich schon bemerkt habe, die magnetische Wirkung eines Stromes proportional seiner Stärke, sind also m und n zwei Zahlen, so hat man für die durch die beiden in den Windungen fliessenden Ströme J_1, J_2 hervorgebrachte Ablenkung δ der Galvanometernadel

$$\delta = m J_1 - n J_2$$

oder

$$\delta = \frac{E}{D}\left\{ m (B + \beta) - n (A + \alpha) \right\}.$$

Digitized by Google

Hat diese Ablenkung keine beobachtbare Grösse, so unterscheidet sich der von den Klammern eingefasste Ausdruck in einem gewissen geringen Betrage von Null, der von der Stärke der Batterie, dem Arrangement des ganzen Apparates, der Feinheit des Galvanometers und der persönlichen Geübtheit des Experimentators abhängt.

Ich setze voraus, dass der Widerstand B soweit justirt ist, dass die Galvanometernadel in der Tat nicht aus ihrer Lage abgelenkt wird, wenn man den Strom schliesst.

Führt man dann an Stelle von A einen andern Widerstand A' ein, und justirt jetzt A' solange, bis jede Ablenkung der Galvanometernadel wieder verschwindet, so ist offenbar $A' = A$, man hat also einen neuen Widerstand gewonnen, der genau gleich einem schon vorhandenen Widerstande ist.

Um einen Ueberblick über die Genauigkeit, die man bei dieser Vergleichung zweier Widerstände mit einander zu erreichen vermag, zu erlangen, nehme ich an, dass nach Ausschaltung des Widerstandes A und Einführung des Widerstandes A' die Grössen D, E, δ in D', E', δ' übergegangen sind.

Dann ist

$$1) \qquad \begin{aligned} m(B+\beta) - n(A+\alpha) &= \frac{D}{E}\delta, \\ m(B+\beta) - n(A'+\alpha) &= \frac{D'}{E'}\delta', \end{aligned}$$

also

$$2) \qquad n(A'-A) = \frac{D}{E}\delta - \frac{D'}{E'}\delta'.$$

Hätte die Beobachtung sich darauf beschränkt zu constatiren, dass δ und δ' einander gleich sind und nicht jede dieser Grössen durch Justirung von B bezüglich A' wenigstens zum scheinbaren Verschwinden gebracht, so könnte sich die rechte Seite der letzten Gleichung nur dann auf Null reduciren, wenn $E = E'$ und $D = D'$ wäre. Der Beobachter würde also durch diese Methode nicht mehr als durch die Ohmsche erlangen, die Methode wäre aber dann auch nur eine Modification der Ohmschen.

Was die Methode also verlangt, das ist die Constatirung der Abwesenheit einer Ablenkung, und gerade darauf beruht das Hauptverdienst derselben.

Die Methode von Becquerel gehört zu den schon an einer andern Stelle charakterisirten Null-Methoden, bei denen auf die Nichtexistenz einer Kraft geschlossen wird, wenn man durch kein Mittel eine durch sie hervorgebrachte Wirkung wirklich beobachten kann.

Wird die Methode so durchgeführt, wie sie durchgeführt werden soll, so reduciren sich δ und δ' auf sehr kleine Grössen, und deshalb kann, wie die Gleichung 2) zeigt, die Veränderlichkeit von E und D keinen merkbaren Einfluss auf die Vergleichung von A mit A' ausüben.

Digitized by Google

Will man genauere Daten über das, was man mit dieser Methode zu erreichen vermag, haben, so verfährt man so, wie man immer bei physikalischen Beobachtungen zu verfahren pflegt; man macht eine ganze Reihe von von einander unabhängigen Beobachtungen, in deren jeder man A' apart justirt bis δ' verschwindet, und vergleicht die Einzelresultate mit dem aus allen Beobachtungen gezogenen Mittelresultat.

Hebt man ferner die Justirung von A' dadurch wieder auf, dass man zu A oder zu B den hundertsten Teil des Widerstandes von A oder von B hinzufügt, so giebt die Beobachtung der Ablenkung der Galvanometernadel die Anzahl von Graden, welche einem Irrtum von 1% in der Widerstandsbestimmung entsprechen würden. Lässt man dann den zu A zugelegten Widerstand so lange abnehmen, bis die Ablenkung der Galvanometernadel für die Beobachtung gerade verschwindet, so hat man in dem Verhältnis der noch übrig gebliebenen, durch weitere Verringerung der Zulage scheinbar nicht mehr abnehmenden Ablenkung der Nadel zu der Ablenkung, welche die Zulage von einem Procent hervorbrachte, ein Maass für die mit dem betreffenden Apparat erreichbare Präcision.

Hat*) man die Widerstände von A und B mit einander zu vergleichen, so verfährt man so wie bei der Gaussischen Wägung mit Vertauschung der Gewichte. Man beobachtet erst die Ablenkung δ der Galvanometernadel, wenn A und B in der in der Figur angegebenen Lage sich befinden, und dann die Ablenkung δ', nachdem man A mit B vertauscht hat. Man hat dann die beiden Gleichungen

$$m(B+\beta) - n(A+\alpha) = \frac{D}{E}\delta,$$

$$m(A+\beta) - n(B+\alpha) = \frac{D'}{E'}\delta',$$

also

$$3) \qquad (m+n)(B-A) = \frac{D}{E}\delta - \frac{D}{E'}\delta'.$$

Sind m und n, A und B, α und β einander näherungsweise gleich, so wird

$$3_1) \qquad B-A = \frac{1}{2nE}(A+\alpha)(A+\alpha+2r)(\delta-\delta'),$$

und man darf für $\delta - \delta'$ die kleinste noch beobachtbare Ablenkung der Galvanometernadel nehmen.

Macht man den Draht des Galvanometers länger und dünner, ohne zugleich seine Gesammtmasse zu ändern, so variirt n wie die erste Potenz und α wie das Quadrat der Länge. Demnach erreicht die Grösse

$$\frac{(A+\alpha)(A+\alpha+2r)}{n}$$

*) Die folgenden Untersuchungen sind Webers Abhandlung *Zur Galvanometrie.* Abhandl. der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. X. p 65 entnommen.

Digitized by Google

ein Minimum, wenn

a) $$\alpha = \frac{1}{3}(A+r)\left\{2\sqrt{1-\frac{3}{4}\frac{r^2}{(A+r)^2}}-1\right\}$$

wird.

Ist der Widerstand r der Batterie gering gegen den Widerstand A, so erhält man

a_1) $$\alpha = \frac{1}{3}A.$$

Man hat also dann die beiden Windungssysteme des Galvanometers so zu wählen, dass für jedes derselben der Widerstand ein Drittel von dem zu messenden Widerstand wird. Die Widerstandsdifferenz $B - A$ ergiebt sich dann aus der Gleichung

3_2) $$B - A = \frac{8}{9}\frac{A^2}{nE}(\delta - \delta').$$

Diese Differenz kann auch noch in anderer Weise ausgedrückt werden. Lässt man nämlich den Strom nur durch eines der beiden Windungssysteme des Galvanometers gehen, so ist die Ablenkung der Galvanometernadel (vorausgesetzt, dass die Ablenkungen streng proportional der ablenkenden Kraft eintreten)

b) $$\Delta = \frac{nE}{A+\alpha+r},$$

also für $r = 0$ und $\alpha = A/3$

b_1) $$\Delta = \frac{3}{4}\frac{nE}{A},$$

und damit wird

3_3) $$\frac{B-A}{A} = \frac{2}{3}\frac{\delta-\delta'}{\Delta}.$$

Bei dem Differentialgalvanometer lässt man, wie wir gesehen haben, auf die Nadel zwei Ströme gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Wirkungen hervorbringen. Da nun die Grösse der Kraft, mit der ein Strom eine Magnetnadel angreift, nicht blos von der Stärke des Stromes, sondern auch von der Lage seiner Bahn gegen die Magnetnadel abhängt, so wird im allgemeinen, wenn nicht der Galvanometerdraht mit ganz ausserordentlicher Sorgfalt gewunden ist, das Verhältnis von m zu n mit der Lage, die die Nadel jeweilig gegen die Windungen einnimmt, variiren. Man wird daher dieses Verhältnis durch geeignete Experimente jedesmal bestimmen müssen, wenn man nicht sicher ist, dass die Nadel ihre Lage ungeändert beibehalten hat.

Digitized by Google

Methode von Wheatstone.

347a. *Theorie der Wheatstoneschen Brücke.* Die zweite*) der signalisirten Methoden, die Wheatstonesche, erfordert zu ihrer Durchführung eine sogenannte *Wheatstonesche Brücke* und ein gewöhnliches Galvanometer.**)

Auch bei dieser Methode hat man die Nichtablenkung der Galvanometernadel zu constatiren, doch bleibt diesmal die Nadel in ihrer Ruhelage nicht deshalb, weil sie von zwei antagonistischen Strömen angegriffen wird, sondern weil die Einrichtungen so getroffen werden, dass durch den Galvanometerdraht überhaupt kein Strom circulirt. Was hier beobachtet wird, ist also eigentlich nicht die Nichtablenkung der Nadel, sondern die Nichtexistenz eines Stromes, und daraus ergiebt sich, dass man bei der Wheatstoneschen Methode keine Verfälschung der Resultate durch etwaige Aenderung in der Lage der Windungen des Galvanometerdrahtes oder durch etwaige Unregelmässigkeiten in den Windungen selbst zu befürchten hat. Das Galvanometer hat eben lediglich die Aufgabe, hinlänglich sicher die Existenz und Richtung eines seinen Draht durchfliessenden Stromes anzugeben, es braucht dagegen weder die Messung der Stärke eines Stromes noch seine Vergleichung mit andern Strömen zu gestatten.

347b. Die Wheatstonesche Brücke besteht der Hauptsache nach aus sechs Leitern, die vier Punkte mit einander verbinden. Man lässt zwischen zwei der vier Punkte, zwischen B und C, indem man in den zugehörigen Draht BC eine Voltasche Batterie einschaltet, eine electromotorische Kraft wirken, und misst zwischen den zwei andern Punkten D und A mit einem Galvanometer die Stromstärke.

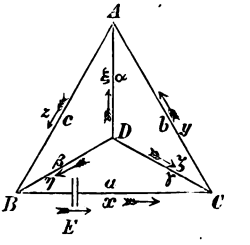


Fig. 32.

Durch geeignete Justirung der Widerstände der vier Leiter BD, CD, BA, CA kann man es dahin bringen, dass zwischen D und A überhaupt kein Strom fliesst. DA und BC heissen dann conjugirte Leiter (Art. 282a). Gerade diese Justirung der bezeichneten Widerstände giebt das Mittel zur Vergleichung von Widerständen mit einander.

Bezeichnet man das Potential in B, C, D, A durch die Buchstaben, welche diese Punkte markiren, und benutzt für die Widerstände in CA, AB, BD und DC die Symbole b, c, β, γ, so ist nach Art. 275

$$1) \qquad D = \frac{B\gamma + C\beta}{\beta + \gamma}, \quad A = \frac{Bb + Cc}{b + c}.$$

Soll aber die Stromstärke in DA gleich Null sein, so muss das Potential in D denselben Wert wie in A haben, also $D = A$, das heisst

*) Wheatstone, *Phil. Trans.* 1843, part II. pag. 323 und *Pogg. Ann.* Bd. 62 pag. 535.

**) Wofür neuerdings oft das Telephon benutzt wird. Anm. d. Uebers.

Digitized by Google

2) $$b\beta = c\gamma$$

sein.

Um auch bei dieser Methode einen Ueberblick über die durch sie erreichbare Genauigkeit zu gewinnen, nehme ich an, dass die unter 2) festgesetzte Bedingung nicht streng erfüllt ist, und bestimme die Stärke des Stromes, der dann in DA zum Vorschein kommt.

Es seien die Stromstärken in BC, CA und AB gleich x, y und z, und die daselbst herrschenden Widerstände gleich a, b, c. Für die Stromstärken in DA, DB, DC benutze ich die Symbole ξ, η, ζ und für die Widerstände die Symbole α, β, γ.

Wirkt die electromotorische Kraft E zwischen B und C, so ist

3)
$$\begin{aligned} ax &= B - C + E, & \alpha\xi &= D - A, \\ by &= C - A, & \beta\eta &= D - B, \\ cz &= A - B, & \gamma\zeta &= D - C. \end{aligned}$$

Dazu kommen noch die aus dem ersten Kirchhoffschen Gesetz folgenden Continuitätsgleichungen und drei andere aus dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz fliessende Formeln, wenn man die ganze Drahtverbindung als aus den drei Kreisen DBC, DCA, DAB, in denen die Ströme die bezüglichen Stärken x, y, z besitzen, betrachtet, nämlich

4)
$$\begin{aligned} \xi + y - z &= 0, & ax + \beta\eta - \gamma\zeta &= E, \\ \eta + z - x &= 0, & by + \gamma\zeta - \alpha\xi &= 0, \\ \zeta + x - y &= 0, & cz + \alpha\xi - \beta\eta &= 0. \end{aligned}$$

Die drei letzten Gleichungen folgen auch aus den zuerst aufgestellten sechs Beziehungen.

Durch Elimination von ξ, η, ζ erhält man

$$\begin{aligned} (a+\beta+\gamma)x \quad & -\gamma\, y \quad & -\beta\, z &= E, \\ -\gamma\, x + (b+\gamma+\alpha)y \quad & & -\alpha\, z &= 0, \\ -\beta\, x \quad & -\alpha\, y + (c+\alpha+\beta)z &= 0. \end{aligned}$$

Setzt man

5a)
$$M = \begin{vmatrix} a+\beta+\gamma & -\gamma & -\beta \\ -\gamma & b+\gamma+\alpha & -\alpha \\ -\beta & -\alpha & c+\alpha+\beta \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich

6a)
$$\xi = \frac{E}{M}(b\beta - c\gamma),$$

7)
$$x = \frac{E}{M}\{(b+\gamma)(c+\beta) + \alpha(b+c+\beta+\gamma)\}.$$

Digitized by Google

348. Durch Ausrechnung der Determinante M erhält man die symmetrische Form

$$M = abc + bc(\beta+\gamma) + ca(\gamma+\alpha) + ab(\alpha+\beta) + (a+b+c)(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta).$$

Da sich im Conductor a die Batterie und in dem Conductor α das Galvanometer G befindet, so ändere ich die bisherige Bezeichnung dahin ab, dass ich für a setze B und für α das G, somit wird

$$5b) \quad M = BG(b+c+\beta+\gamma) + B(b+\gamma)(\beta+c) + G(b+c)(\beta+\gamma) + bc(\beta+\gamma) + \beta\gamma(b+c).$$

Daraus ergiebt sich zunächst die Reciprocitätsbeziehung.

Fügt man die Batterie in den Conductor α ein, ohne daselbst den Widerstand zu ändern, und schaltet das Galvanometer in den Zweig BC wiederum ohne den Widerstand daselbst zu alteriren, so ist die Stärke, mit der der Strom jetzt durch BC fliesst, so gross wie sie früher in DA war. Verbindet man aber die Pole der Batterie statt mit B und C mit D und A und die Pole des Galvanometers statt mit D und A mit B und C, ohne auf die Widerstände der bezüglichen Conductoren DA und BC Rücksicht zu nehmen, so haben wir in M, um das dem neuen Zustand entsprechende M' zu erhalten, B mit G zu vertauschen, und es wird

$$8) \quad M - M' = (G-B)\{(b+c)(\beta+\gamma) - (b+\gamma)(\beta+c)\} = (B-G)(b-\beta)(c-\gamma).$$

Ich setze voraus, dass der Widerstand des Galvanometers grösser als der der Batterie ist, und nehme an, dass die Widerstände b, c der beiden Drähte, die in A zusammenkommen, beide grösser oder kleiner sind als die Widerstände β, γ der beiden Drähte, welche ihren Verknüpfungspunkt in D haben.

$b - \beta$ hat dann mit $c - \gamma$ dasselbe Zeichen, und demnach ist das Product $(b-\beta)(c-\gamma)$ positiv, das Zeichen von $M - M'$ hängt also nur noch von dem von $B - G$ ab.

Verbindet also das Galvanometer in seiner ursprünglichen Lage die beiden grössten Widerstände mit den beiden kleinsten und bietet es selbst dem Strom einen bedeutendern Widerstand als die Batterie, so ist M in der ersten Lage kleiner, also die Ablenkung der Galvanometernadel grösser, als wenn man die Positionen des Galvanometers und der Batterie vertauscht.

Daraus lässt sich die folgende Regel für die Anordnung des Apparates, wenn er unter gegebenen Verhältnissen seine grösste Empfindlichkeit zeigen soll, ableiten.

Man verbindet von den beiden Widerständen, dem der Batterie und dem des Galvanometers, den grössern Widerstand mit den Punkten, wo die beiden grössten bezüglich die beiden kleinsten der vier andern Widerstände der Wheatstoneschen Drahtcombination zusammenstossen.

Digitized by Google

349. Ich nehme jetzt an, dass die Widerstände der Conductoren AB und AC mit einander zu vergleichen sind, und dass zur Ausführung einer solchen Vergleichung auf dem Conductor BDC ein Punkt D so bestimmt werden muss, dass die Nadel eines Galvanometers, dessen Electroden mit A und D in Verbindung stehen, keine Ablenkung aus ihrer Ruhelage erfährt, wenn in den Draht BC eine Batterie eingeschaltet wird.

Der Conductor BDC kann entweder aus einem gewöhnlichen Draht von überall gleichem Widerstande bestehen, oder in der Nähe des Punktes D durch einen Draht und zu beiden Seiten desselben durch Widerstandsrollen gebildet sein. Immer aber soll das Verhältnis der Widerstände seiner beiden Teile BD und CD für jede Lage des Punktes D genau bekannt sein.

Ich verlasse die früher benutzte symmetrische Bezeichnungsweise und führe die folgenden Symbole ein.

R für den gesammten Widerstand von BAC, c für die Grösse mR, b für die Grösse $(1-m)R$, S für den gesammten Widerstand von BDC, β für die Grösse nS, γ für die Grösse $(1-n)S$. Der Wert von n soll direct gegeben sein und der von m sich aus ihm bestimmen, wenn das Galvanometer keine Ablenkung seiner Nadel aufweist.

Ferner sei der Widerstand der Batterie und ihrer Nebenschliessungen gleich B und der des Galvanometers und seiner Nebenschliessungen gleich G.

Wir haben dann wie früher

$$5c) \qquad M = G(BR + BS + RS) + m(1-m)R^2(B+S) + n(1-n)S^2(B+R) + (m+n-2mn)BRS,$$

$$6b) \qquad \xi = \frac{ERS}{M}(n-m).$$

Um ein möglichst präcises Resultat zu erlangen, hat man die Anordnung des Apparates so zu treffen, dass die Ablenkung ξ der Galvanometernadel so gross, als man es nur irgend bewerkstelligen kann, gegen $n-m$ ausfällt.

In dem Abschnitt (Art. 716), in welchem ich die Theorie des Galvanometers auseinanderzusetzen habe, werde ich nachweisen, dass, wenn man in einem Galvanometer die Form des Drahtes abändert ohne sein Gewicht zu alteriren, die durch eine Stromeinheit hervorgebrachte Ablenkung der Nadel wie die erste und der Widerstand des Galvanometers wie die zweite Potenz der Länge variirt. Daraus wird sich dann ergeben, dass der Ausschlag der Nadel eines Galvanometers für die Stromeinheit einen maximalen Betrag erreicht, wenn der Widerstand des Galvanometers gleich dem übrigen constanten Widerstand des Stromkreises ist.

Ist aber C eine Constante und δ die einem Strome von der Stärke ξ entsprechende Ablenkung der Galvanometernadel, so haben wir

$$9) \qquad \delta = C\sqrt{G}\,\xi = CERS(n-m)\frac{\sqrt{G}}{M}.$$

Digitized by Google

Differenzirt man diesen Ausdruck nach G und beachtet, dass in leicht verständlicher Abkürzung $M = \lambda G + \mu$ ist, so resultirt

$$\frac{\partial \delta}{\partial G} = CERS(n-m)\left(\frac{1}{2M\sqrt{G}} - \frac{\lambda\sqrt{G}}{M^2}\right).$$

Demnach wird δ ein Maximum werden, wenn in dem Ausdruck für M das Glied, welches G zum Coefficienten hat, also $G\lambda$ ebenso gross ist wie der Rest dieses Ausdrucks, also wie μ.

Macht man noch, was bei einer gut durchgeführten Versuchsreihe von selbst eintrifft, $m = n$, so wird also der vorteilhafteste Wert für den Widerstand des Galvanometers

10) $$G = n(1-n)(R+S).$$

Ebenso findet man durch Differentiation nach B als vorteilhaftesten Widerstand der Batterie, wenn die Electrodenflächen derselben vorgeschriebene Grössen besitzen,

11) $$B = \frac{RS}{R+S}.$$

Endlich bestimme ich noch den Wert, den man S erteilen muss, damit der Ausschlag der Nadel, der einer vorgeschriebenen Aenderung in dem Betrage von n entspricht, möglichst gross wird.

Eine Differentiation des Ausdrucks für ξ nach S ergiebt nämlich die Bedingung

12) $$S^2 = \frac{BR}{B+R}\left(R + \frac{G}{n(1-n)}\right).$$

Hat man eine grosse Anzahl von Widerstandsbestimmungen auszuführen, die sich alle auf nahezu gleiche Widerstände beziehen, so wird man gut tun sich das Galvanometer und die Batterie in der geeigneten Weise einzurichten. Dazu macht man

13) $$S = R,\ B = \tfrac{1}{2}R,\ G = 2n(1-n)R;$$

und wenn $n = \frac{1}{2}$ ist

$$G = \tfrac{1}{2}R.$$

350. *Anwendung der Wheatstoneschen Brücke.* Nachdem ich die Theorie der Wheatstoneschen Brücke auseinandergesetzt habe, will ich zeigen, wie sie zu wirklichen Messungen benutzt werden kann.

Die genannte Drahtcombination lässt sich zunächst mit der grössten Präcision zur Herstellung zweier gleicher Widerstände verwenden.

Sei β eine Normal-Widerstandsrolle und γ eine andere Rolle, deren Widerstand exact dem von β gleich gemacht werden soll.

Man stellt sich noch zwei Rollen b, c von gleichem oder nahezu gleichem Widerstande her und schaltet die vier Rollen (indem man ihre

Digitized by Google

Electroden in geeignete Quecksilberkuppen einsenkt) in den Kreis einer Batterie B so ein, dass der Strom sich in zwei Zweige verteilt, deren einer die Rollen β, γ und deren anderer die Rollen b, c enthält. Die Rollen b, c verbindet man noch ausserdem mit einem in seinem Widerstande möglichst gleichförmigen Draht PR, der längs einer gleichmässig geteilten Scala läuft. Von den beiden Electroden des Galvanometers G führt man eine zu dem Verbindungsdraht von β und γ und die andere zu dem bezeichneten Draht PR. Diese zweite Electrode Q ist längs PR verschiebbar, und man giebt ihr bei jedem Versuche eine derartige Lage, dass wenn man erst den Strom und dann das Galvanometer schliesst, die Nadel des letztern nach keiner Seite hin abgelenkt wird.

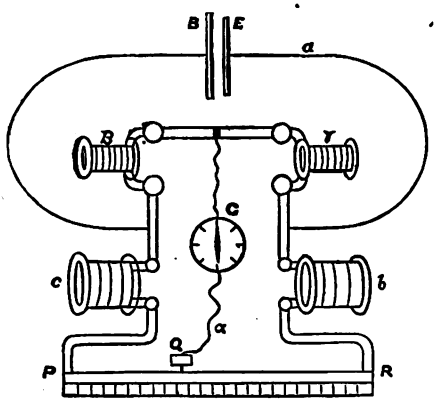


Fig. 33.

Man vertauscht dann die beiden Rollen β und γ mit einander und sucht die neue charakterisirte Lage von Q auf. Zeigt es sich, dass man die zweite Galvanometerelectrode Q nach der Vertauschung der Rollen in ihrer Lage nicht zu ändern braucht, so darf man schliessen, dass γ genau denselben Widerstand besitzt wie die Normalrolle β. Muss man aber Q auf PR verschieben, damit die Galvanometernadel wieder in ihre Ruhelage kommt, so lässt sich aus der Richtung und Grösse der Verschiebung von Q der Sinn und Betrag, um den γ von β verschieden ist, bestimmen.

Rechnet man zu den Widerstandsrollen b, c auch die daranstossenden bezüglichen ausserhalb der Teilung befindlichen Stücke des Drahtes PR und bezeichnet die Widerstände der so begrenzten Rollen, gemessen in Teilen des Drahtes PR, durch b bezüglich c, dann ist, wenn bei der ersten Lage von β und γ die Electrode Q sich bei der Teilung x und bei der zweiten Lage bei der Teilung y des Drahtes PR befand,

$$\frac{c+x}{b-x}=\frac{\beta}{\gamma},\quad \frac{c+y}{b-y}=\frac{\gamma}{\beta},$$

Digitized by Google

also

$$1) \qquad \frac{\gamma^2}{\beta^2} = 1 + \frac{(b+c)(y-x)}{(c+x)(b-y)}.$$

Nun wird einerseits $b-y$ nahezu gleich $c+x$ und andererseits b ebenso wie c sehr gross gegen x und y sein, wir haben daher auch

$$1_1) \qquad \frac{\gamma^2}{\beta^2} = 1 + 4\frac{y-x}{b+c},$$

oder

$$\gamma = \beta\left(1 + 2\frac{y-x}{b+c}\right).$$

Aus dieser Gleichung erhellt, dass bei derselben Differenz zwischen β und γ die Grösse $y-x$, also auch die Empfindlichkeit des Apparates um so grösser ist, je beträchtlicher die Widerstände b und c sind.

Hat man also mit bestimmten Rollen b und c die Rolle γ soweit, als man konnte, justirt, so wird man b und c mit grössern Rollen vertauschen und γ aufs Neue mit β vergleichen. Die noch übrig gebliebene Differenz zwischen β und γ erscheint dann bei dem zweiten Versuch in demselben Verhältnis wie die neuen Rollen b, c gegen die alten vergrössert.

Die Justirung eines Widerstandes mit Hilfe eines Drahtes, auf dem sich eine Galvanometerelectrode verschieben lässt*), ist durch einen Widerstandskasten leichter als durch Rollen ausführbar.

Bei der Anwendung der auseinandergesetzten Methode sollte man nie die Batterie statt des Galvanometers in den Draht mit der verschiebbaren Electrode Q einschalten, denn ein starker Strom greift den Normaldraht PR beim Durchgange durch die Contactstelle Q an. Das angegebene Arrangement eignet sich also für den Fall, dass der Widerstand des Galvanometers grösser als der der Batterie ist.

Oliver Heaviside**) hat gezeigt, dass, wenn der zu messende Widerstand γ, ferner der Widerstand a der Batterie und endlich der Widerstand α des Galvanometers gegeben sind, für die andern Widerstände b, c, β die geeignetste Wahl getroffen wird, wenn man

$$c = \sqrt{a\alpha},$$

$$b = \sqrt{a\gamma\frac{\alpha+\gamma}{a+\gamma}},$$

$$\beta = \sqrt{\alpha\gamma\frac{a+\gamma}{\alpha+\gamma}}$$

setzt.

*) Der Draht heisst auch *Rheochord*.
**) *Phil. Mag.* 1873, Febr.

Digitized by Google

Messung geringer Widerstände.

351. Der Widerstand eines kurzen dicken Conductors ist ausserordentlich gering gegen die Widerstände, welche der Strom beim Passiren der Verbindungsstellen, die ja weder durch Contacte noch durch Lötungen je vollständig hergestellt werden können, zu überwinden hat. Man kann deshalb die oben auseinandergesetzte Methode nicht ohne Weiteres zur Bestimmung geringer Widerstände verwenden. Derartige Bestimmungen hat man aber dann auszuführen, wenn es sich darum handelt, den specifischen Widerstand von Körpern zu beobachten, die sich nicht zu langen dünnen Drähten ausziehen lassen, oder wenn man ausser dem longitudinalen auch noch den transversalen Widerstand zu untersuchen hat.

Thomson*) hat nun eine Methode beschrieben, die sich gerade zur Bestimmung geringer Widerstände eignet und auf der Combination von neun Leitern beruht.

Bei Widerstandsmessungen will man im allgemeinen den Widerstand eines Leiters gegen einen ihn in Richtung seiner Axe gleichmässig durchfliessenden Strom kennen lernen. Da aber an den Enden des Leiters, wo der Strom ein- bezüglich abgeleitet wird, Electroden angelötet oder einfach angepresst werden, so hört daselbst die gleichförmige Stromverteilung auf.

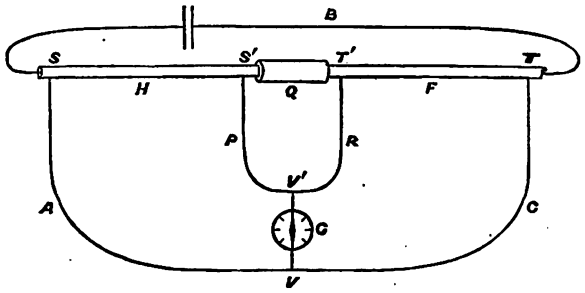


Fig. 34.

Deshalb bestimmt Thomson — und das ist für seine Methode charakteristisch — nicht den Widerstand des ganzen Leiters, sondern den eines zwischen zwei Marken gelegenen Stückes desselben. Die Marken können den Leiterenden ziemlich nahe liegen, denn der Strom wird schon in geringer Entfernung von den Electroden gleichförmig.

Ich schlage dem Leser vor, sich selbst aus den analytischen und geometrischen Untersuchungen des Art. 193, welche den Fall betreffen, wo Ströme sich in zerteilten Streifen bewegen, zu überzeugen, dass die Ströme bald den Seiten der Streifen parallel fliessen (s. Tafel XII).

*) *Proc. R. S.* 1861, Juni 6.

Digitized by Google

Es seien also die Widerstände zweier Leiterteile, die zwischen den bezüglichen Marken S, S'; T, T' gelegen sind, mit einander zu vergleichen.

Man verbindet die beiden Leiter hintereinander und schaltet sie durch möglichst vollkommene Contacte in den Stromkreis einer Batterie, die selbst einen nur geringen Widerstand besitzt, ein. Dann lässt man zwei Drähte SVT und $S'V'T'$ die bezüglichen Marken S, T und S', T' der beiden Leiter berühren und verknüpft V. und V' mit den Electroden eines Galvanometers.

Den Drähten SVT und $S'V'T'$ giebt man einen so grossen Widerstand, dass die Widerstände der etwa unvollkommenen Verbindungen bei S, T, S', T' dagegen vernachlässigt werden können, und wählt die beiden Punkte V, V', zwischen denen das Galvonometer eingeschaltet ist, so, dass in jedem der Drähte SVT und $S'V'T'$ die Widerstände der zu den bezüglichen Leitern SS', TT' führenden Teile SAV, VCT und $S'PV'$, $V'RT'$ zu einander in nahezu demselben Verhältnis stehen, wie die Widerstände der beiden zu vergleichenden Leiter SS' und TT'.

Ich nenne

H	den	Widerstand	des	Leiters	SS',
F	„	„	„	„	$T'T$,
A	„	„	„	Drahtes	SV,
C	„	„	„	„	VT,
P	„	„	„	„	$S'V'$,
R	„	„	„	„	$V'T'$,
Q	„	„	„	Verbindungsstückes	$S'T'$,
B	„	„	der	Batterie und ihrer Nebenschliessungen,	
G	„	„	des	Galvanometers und seiner Verbindungen.	

Die nebenstehende Figur 35 soll die bei der Bezeichnungsweise befolgte Symmetrie dartun und schematisch die Verbindung der neun Leiter versinnbildlichen.

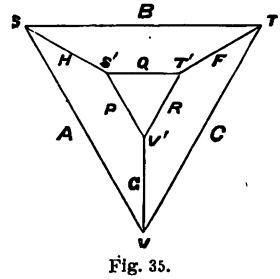


Fig. 35.

Aus frühern Untersuchungen (Art. 282a) findet man leicht, dass bei dieser Combination die Batterie und das Galvanometer conjugirte Conductoren darstellen, wenn zwischen den genannten Widerstandsgrössen die Beziehung

$$\frac{F}{C}-\frac{H}{A}+\left(\frac{R}{C}-\frac{P}{A}\right)\frac{Q}{P+Q+R}=0$$

erfüllt ist.

Den Widerstand Q des Verbindungsstückes $S'T'$ der beiden Leiter SS' und TT' kann man durch geeignete Wahl des Materials und der Form ausserordentlich reduciren.

Digitized by Google

Darf man also Q als sehr klein selbst gegen H und F betrachten, so wird

$$\frac{F}{C}=\frac{H}{A}.$$

Die Widerstände der beiden zu vergleichenden Leiter stehen dann ganz wie bei der Wheatstoneschen Drahtcombination in dem Verhältnis von C zu A.

352. So wie die Thomsonsche Methode hier dargestellt ist, hängt der Erfolg einer Widerstandsvergleichung von der grössern oder geringern Vollkommenheit der Contacte zwischen den Drähten und den zu untersuchenden Leitern ab. In der von Matthiessen und Hockin*) angegebenen und benutzten Modification derselben spielen diese Contacte keine Rolle mehr. Die Verbindung der beiden zu vergleichenden Leiter mit einander und mit der Batterie wird in derselben Weise wie früher und mit aller nur

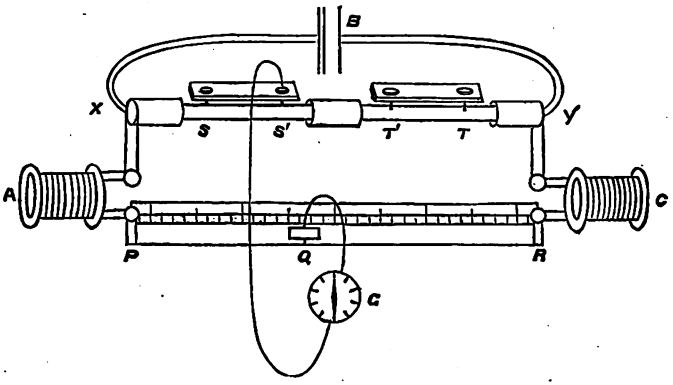


Fig. 36.

erreichbaren Vollkommenheit bewirkt. Die übrige Anordnung des Apparates wird mit Hilfe von Widerstandsrollen A und C und einem Normaldraht PR mit einer auf demselben gleitenden Electrode des Galvanometers ganz so wie bei der Wheatstoneschen Methode getroffen. Die Marken werden nicht direct auf die Leiter aufgetragen. Man befestigt in zwei isolirenden Brettchen je zwei metallene Spitzen oder Schneiden, die mit auf den Brettchen befindlichen Quecksilbernäpfchen in Verbindung stehen. Setzt man die Brettchen auf die Leiter, so hat man in den genau zu messenden Abständen ihrer bezüglichen Spitzen oder Schneiden die Strecken der Leiter, deren Widerstände mit einander verglichen werden. Die zweite Electrode des Galvanometers (die erste endet in Q) wird nacheinander in jedes der vier Quecksilbernäpfchen eingesenkt, also der Reihe nach mit den vier Marken in Verbindung gebracht.

*) Laboratory, *On Alloys.*

Digitized by Google

Wir verbinden das Galvanometer mit S und arrangiren die Widerstandsrollen A und C derartig, dass durch geeignete Verschiebung der Electrode Q auf PR das Galvanometer vollkommen stromlos wird, dann hat man

$$\frac{XS}{SY} = \frac{A_1 + PQ_1}{C_1 + Q_1 R},$$

wo XS, PQ... die Widerstände der in der Figur durch diese Symbole markirten Leiter angeben.

Daraus folgt

1) $$\frac{XS}{XY} = \frac{A_1 + PQ_1}{A_1 + C_1 + PR} = \frac{A_1 + PQ_1}{R}.$$

Wir senken jetzt die Electrode des Galvanometers statt in das Quecksilbernäpfchen bei S in das bei S' ein und transponiren so lange Widerstand von der Rolle C nach der Rolle A, bis die Electrode Q in eine neue Lage Q_2 gebracht werden kann, in der das Galvanometer wieder stromlos wird.

Beachtet man, dass

a) $$A_2 + C_2 + PR = A_1 + C_1 + PR = R$$

ist, so ergiebt sich ganz so wie früher

2) $$\frac{XS'}{XY} = \frac{A_2 + PQ_2}{R}.$$

Durch Subtraction der beiden Gleichungen 1) und 2) von einander folgt

3) $$\frac{SS'}{XY} = \frac{A_2 - A_1 + Q_1 Q_2}{R}.$$

Dann senkt man die Galvanometerelectrode in das Näpfchen bei T' bezüglich in das bei T, transponirt wieder Widerstand von C nach A oder umgekehrt von A nach C und verschiebt die Electrode Q auf PR nach Q_3 bezüglich Q_4, bis das Galvanometer stromlos wird, und erhält die Gleichungen

4) $$\frac{XT'}{XY} = \frac{A_3 + PQ_3}{R},$$

5) $$\frac{XT}{XY} = \frac{A_4 + PQ_4}{R},$$

und durch Subtraction

6) $$\frac{T'T}{XY} = \frac{A_4 - A_3 + Q_3 Q_4}{R}.$$

Aus den Gleichungen unter 3) und 6) folgt dann schliesslich für das gesuchte Verhältnis zwischen SS' und $T'T$

7) $$\frac{SS'}{T'T} = \frac{A_2 - A_1 + Q_1 Q_2}{A_4 - A_3 + Q_3 Q_4}.$$

Digitized by Google

Wird von der Bestimmung dieses Verhältnisses eine nur mässige Genauigkeit verlangt, dann darf man die Rollen A und C ganz fortlassen und hat einfacher

$$7_1) \qquad \frac{SS'}{T'T} = \frac{Q_1 Q_2}{Q_3 Q_4}.$$

Da aber einerseits die Lage der verschiebbaren Electrode Q auf dem Draht PR, wenn dieser ein Meter lang ist, auf nicht mehr als 0,1 mm fixirt werden kann, und andererseits der Widerstand dieses Drahtes PR an seinen verschiedenen Stellen wegen ungleichmässiger Temperirung, wegen der Reibung der verschiebbaren Electrode und noch anderer Umstände nicht in allen Punkten von derselben Grösse sein kann, so wird man bei Präcisionsmessungen sehr grosse Rollen A, C verwenden, deren Widerstandsverhältnis auch an sich schon sich sicherer bestimmen lässt als das zweier Drahtstücke.

Die durchgeführte Theorie zeigt, dass die Resultate unabhängig von der Güte der Contacte bei S, S', T', T sind.

Die Methode beruht auf der Vergleichung verschiedener Beobachtungen, deren jede für sich apart anzustellen ist. Die Widerstandsvergleichung wird also nach einer Differentialmethode mit der Wheatstoneschen Brücke ausgeführt.

Da die Hauptbedingung für die Verlässlichkeit ihrer Resultate darin besteht, dass die Verbindungen bei den Marken — sie mögen sonst so beschaffen sein wie sie wollen — sich während eines vollständigen Versuches nicht ändern, so wird man gut tun, den vollständigen Versuch zweimal durchzuführen, um sich zu versichern, ob diese Bedingung bei der gerade getroffenen Anordnung erfüllt war.

Vergleichung von bedeutenden Widerständen.

353. *Directe Methode.* Hat man bedeutende Widerstände zu messen, so bestimmt man ausser den Stromstärken noch mit Hilfe eines empfindlichen Electrometers, etwa des in Art. 219 beschriebenen Thomsonschen Quadrantenelectrometers, die Potentiale an verschiedenen Stellen der Leiter.

Sind nämlich die Leiter, deren Widerstände gemessen werden sollen, hintereinander in den Kreis eines sehr kräftigen Elements eingeschaltet, so geht der Strom durch alle mit derselben Stärke und die Potentialdifferenz der Enden jedes der Leiter ist dem bezüglichen Widerstande proportional.

Verbindet man also die Enden der einzelnen Leiter der Reihe nach mit den Electroden eines Electrometers, so kann man das Verhältnis, in welchem die zu vergleichenden Widerstände zu einander stehen, bestimmen.

Die directeste Methode zur Messung von Widerständen verlangt die Benutzung eines Electrometers, dessen Ablesungen zu einander in sichere Beziehung gebracht sind, und sie setzt voraus, dass man eine Batterie

Digitized by Google

zur Verfügung hat, deren Constanz man für die Dauer des Experiments zu garantiren vermag.

Man kann vier Leiter, wenn sie bedeutende Widerstände repräsentiren, auch nach der Wheatstoneschen Methode mit einander verbinden, das Galvanometer ersetzt man dann durch ein Electrometer.

Der Vorteil, den dieses Arrangement bietet, besteht darin, dass zur Ablenkung des Electrometers kein permanenter Strom erforderlich ist, während die Galvanometernadel nur durch einen solchen fliessenden Strom in ihrer Deflexion erhalten wird.

354. *Methode von Bright und Clark.* Ist der Widerstand eines Conductors so gross, dass man durch keine der gerade vorhandenen Batterien einen durch das Galvanometer hinlänglich sicher messbaren Strom durch ihn hindurch zu schicken im Stande ist, so lässt man die Electricität, nach ihrem Durchgang durch den Leiter, sich auf einem in den Stromkreis eingeschalteten Condensator einige Zeit lang aufhäufen. Entladet man den Condensator durch das Galvanometer, so kann man die Menge der in dieser Zeit aufgehäuften Electricität messen. Darauf beruht die Methode, nach welcher Bright und Clark die Verbindungen submariner Kabel untersucht haben.

355. *Methode von Siemens.* Am einfachsten bestimmt man aber den Widerstand eines schlechten Leiters, indem man einen Condensator von bedeutender Capacität ladet und seine Belegungen sowohl mit den Electroden eines Electrometers als mit den Enden des betreffenden Leiters verbindet.

Bezeichnet E die an dem Electrometer jederzeit beobachtbare Potentialdifferenz, S die Capacität des Condensators und Q die Ladung, welche jede seiner beiden Belegungen beherbergt, giebt ferner R den Widerstand des Leiters und x die Stärke des ihn bei der Entladung des Condensators durchsetzenden Stromes, so hat man nach der Theorie des Condensators zunächst

a) $$Q = SE.$$

Nach dem Ohmschen Gesetz ist aber

b) $$E = Rx,$$

und da x durch die Gleichung

c) $$x = -\frac{dQ}{dt}$$

definirt ist, so ergiebt sich

1_1) $$-Q = RS\frac{dQ}{dt},$$

oder

1) $$Q = Q_0 e^{-\frac{t}{RS}},$$

Digitized by Google

wo Q_0 die ursprünglich zur Zeit $t = 0$ auf einer Belegung des Condensators vorhandene Electricitätsmenge angiebt.

Aus der Gleichung unter a) folgt dann

$$2_1) \qquad E = E_0 e^{-\frac{t}{RS}},$$

wo E_0 die ursprüngliche, E die zur Zeit t vorgenommene Ablesung des Electrometers bezeichnet, und damit findet man in absoluten Maasseinheiten für den Wert des Widerstandes

$$2_2) \qquad R = \frac{t}{S(\log E_0 - \log E)}.$$

Die Form des auf der rechten Seite stehenden Ausdruckes zeigt, dass man den wirklichen Wert eines Scalenteils des Electrometers nicht zu kennen braucht.

Ist die Capacität S des Condensators electrostatisch durch eine gewisse Anzahl von Metern ausgedrückt, so wird R gleich dem reciproken Betrag einer Geschwindigkeit. Hat man aber S im electromagnetischen Maasssystem als von den Dimensionen $[T^2L^{-1}]$ bestimmt, so wird R gleich dem directen Betrag einer Geschwindigkeit.

Da das Zwischenmedium des Condensators die beiden Belegungen nicht vollständig von einander isoliren kann, so muss man bei jedem Experiment zwei Versuche anstellen. Der erste Versuch wird ohne Einschaltung des zu bestimmenden Leiters durchgeführt und dient lediglich zur Messung des Widerstandes des Condensators. Beim zweiten Versuch verfährt man genau so, wie früher angegeben worden ist.

Hat man für den Gesammtwiderstand beim ersten Versuch den Wert R_0 und beim zweiten den R_1 erhalten, so folgt für den Widerstand des betreffenden Conductors die Gleichung

$$2) \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0}.$$

Die auseinandergesetzte Methode rührt von Siemens her.

Thomsons Verfahren bei der Bestimmung des Widerstandes eines Galvanometers.

356. Eine der Wheatstoneschen Drahtverbindung ähnliche Combination hat Thomson*) unter Benutzung der Manceschen Methode, von der bald die Rede sein soll, zur Bestimmung des Widerstandes eines Galvanometers durch sich selbst angegeben.

*) *Proc. R. S.* 1871 Jan. 19.

Digitized by Google

Man schaltet die Batterie, wie in der zu Art. 347 gehörigen Figur der Wheatstoneschen Brücke angedeutet ist, wieder in den Zweig BC ein, verbindet aber das Galvanometer nicht mehr mit D und A, sondern mit C und A. Wenn jetzt — ich verweise auf die nachstehende Figur — die Differenz $b\beta - c\gamma$ verschwindet, so ist DA conjugirt zu BC. DA wird dann von keinem Strome durchflossen, wenn die Batterie sich in BC befindet, und die Stromstärken in den andern Drähten der Combination sind unabhängig von der Grösse des Widerstandes in DA. Ist das Galvanometer zwischen A und C eingeschaltet, so wird seine Nadel ohne Rücksicht darauf, ob der Widerstand in DA bedeutend oder gering ist, stets dieselbe Ablenkung zeigen.

Justirt man also die einzelnen Grössen b, c, γ, so dass in der Tat die Ablenkung der Galvanometernadel sich nicht ändert, wenn man den Wider-

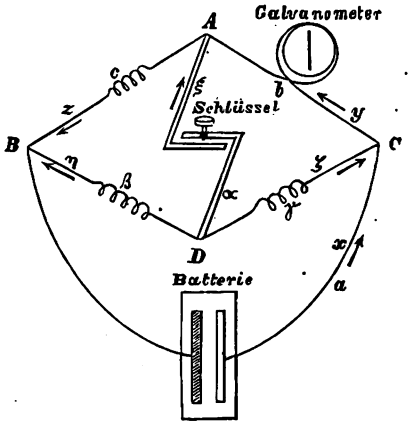


Fig. 37.

stand von DA einmal sehr gering und dann durch Unterbrechung dieser Zweigleitung sehr beträchtlich macht, so darf man sicher sein, dass der Widerstand b des Galvanometers sich aus der Gleichung

$$b = \frac{c\gamma}{\beta}$$

berechnet, in der c, γ, β die bekannten Widerstände der benutzten Rollen angeben.

Diese Methode gehört insofern nicht zu den Null-Methoden, als man den Apparat nicht so einrichtet, dass der Strom durch das Galvanometer gar nicht hindurchfliesst, da man aber auch hier das Nichteintreten eines Ereignisses, nämlich das der Aenderung in der Ablenkung der Galvanometernadel bei Schliessung eines gewissen Contacts beobachtet, so dürfte sie doch zu den Null-Methoden zu rechnen sein.

Digitized by Google

Eine auf der Unveränderlichkeit in der Lage der Galvanometernadel basirende Beobachtung hat ein grösseres Gewicht als eine Beobachtung, bei der die Gleichheit zweier zu verschiedenen Zeiten stattfindender Ausschläge derselben Galvanometernadel constatirt wird. Denn wenn bei jener während gewisser, beliebig zu wiederholender Abänderungen in dem Stromkreise die Lage der Nadel wirklich nicht alterirt wird, so hat man die Sicherheit, dass der Strom durch diese Abänderungen nicht beeinflusst worden ist. Bei der zweiten Beobachtungsweise dagegen kann der Strom im Laufe des Versuchs seine Stärke ändern, ohne dass man die Mittel besitzt, die Aenderung auch in Rechnung zu ziehen.

Uebrigens kann man den Widerstand des Galvanometerdrahtes auch auf der Wheatstoneschen Brücke bestimmen, man bedarf dann aber noch eines zweiten Galvanometers, während bei der eben auseinandergesetzten Methode das betreffende Galvanometer gewissermassen selbst seinen Widerstand misst.

Mances Methode zur Bestimmung des Widerstandes einer Batterie.

357. Der Widerstand einer Batterie ändert sich für einige Zeit beträchtlich, wenn man die Stärke ihres Stromes alterirt. Deshalb ist es unvergleichlich viel schwerer den Widerstand einer Batterie als den eines metallischen Leiters zu bestimmen, und man muss die Resultate mancher

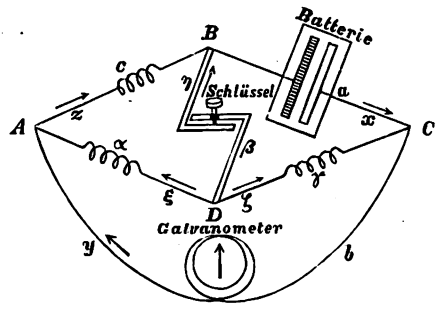


Fig. 38.

Methoden, die auf die signalisirten im Laufe eines Versuchs vor sich gehenden Aenderungen keine Rücksicht nehmen, als zweifelhaft betrachten.

Die von Mance*) herrührende Methode, welche ich hier auseinandersetzen will, ist frei von solchen Einwürfen.

Man schaltet die Batterie in BC, das Galvanometer in CA ein und öffnet und schliesst abwechselnd den Zweig DB. Sind BD und CA con-

*) *Proc. R. S.* 1871 Jan. 19.

Digitized by Google

jugirt zu einander, so darf man den Widerstand in DB beliebig abändern, ohne die Lage der Magnetnadel zu alteriren. Man kann dieses Resultat als speciellen Fall der in Art. 347 abgeleiteten Ergebnisse betrachten, oder man kann es durch Elimination von z und β aus den dort unter 4) gegebenen Gleichungen erhalten.

Die entscheidende Formel ist

$$(a\alpha - c\gamma)\,x + (c\gamma + c\alpha + cb + b\alpha)\,y = E\alpha.$$

Soll y von β, also (man sehe die Gleichung 7) des citirten Artikels) auch von x unabhängig sein, so muss der Factor von x verschwinden, mithin die Gleichung

$$a\alpha = c\gamma$$

erfüllt sein. Daraus folgt dann der Widerstand der Batterie

1) $$a = \frac{c\gamma}{\alpha}.$$

Für die Stärke des das Galvanometer durchfliessenden Stromes ergiebt sich unter diesen Umständen

2) $$C = \frac{E\alpha}{cb + \alpha(a+b+c)} = \frac{E\gamma}{ab + \gamma(a+b+c)}.$$

Um einen Ueberblick über die Genauigkeit, welche diese Methode zu erreichen gestattet, zu gewinnen, setze ich voraus, dass die unter 1) gegebene Gleichung nicht ganz streng, wol aber näherungsweise erfüllt ist. Die Werte für die in dem Galvanometer herrschenden Stromstärken y_0 bezüglich y_1, wenn der Zweig DB einmal nur wenig Widerstand bietet und dann gänzlich unterbrochen ist, ergeben sich aus dem allgemeinen Wert des y (s. Art. 347), wenn man β gleich 0 bezüglich gleich ∞ setzt.

Macht man von den in Art. 347, 348 eingeführten Bezeichnungen Gebrauch, so wird

$$y = \frac{c\gamma + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta}{M} E.$$

Daraus erhält man unter Benutzung der Gleichung 5b) in Art. 348 und der oben unter 2) für C abgeleiteten Relation näherungsweise

$$y_0 = C + \frac{c\,(c\gamma - a\alpha)}{\gamma\,(c+\alpha)} \frac{C^2}{E},$$

$$y_1 = C - \frac{b\,(c\gamma - a\alpha)}{\gamma\,(\gamma+\alpha)} \frac{C^2}{E},$$

also nach den Gleichungen 1) und 2) näherungsweise

$$\frac{y_0 - y_1}{C} = \frac{\alpha}{\gamma} \frac{c\gamma - a\alpha}{(c+\alpha)(\gamma+\alpha)}.$$

Digitized by Google

Soll die Grösse linker Hand verschwinden, so haben wir die Bedingungen zu erfüllen, dass der Widerstand c des Leiters AB gleich dem Widerstand a der Batterie ist, α und γ einander gleich und so klein als möglich ausfallen, b gleich $\alpha + \gamma$ wird.

Da ein Galvanometer um so empfindlicher ist, je weniger seine Nadel von ihrer Ruhelage absteht, so wird man gut tun, vor der Herstellung des Contacts zwischen D und B die Nadel durch einen festen Magneten möglichst in die Nulllage zu bringen.

Die auseinandergesetzte Methode hat, wenn richtig durchgeführt, den Vorzug, dass die Stärke des durch das Galvanometer gehenden Stromes während der Messung des Widerstandes der Batterie sich nicht ändert. Man kann also nach derselben den betreffenden Widerstand für jede Stromstärke bestimmen und dadurch eruiren, wie er etwa mit Abänderung der Stromstärke variirt.*)

Bezeichnet C die Stromstärke in dem Galvanometer, B_0 die in der Batterie, wenn die Brücke BD geschlossen, B_1, wenn sie geöffnet ist, so hat man neben den frühern Gleichungen für den Widerstand und die electromotorische Kraft der Batterie

1) $$a = \frac{c\gamma}{\alpha},$$

2) $$E = C\left(b + c + \frac{c}{\alpha}(b + \gamma)\right),$$

noch die Beziehungen

3) $$B_0 = C\left(1 + \frac{b}{\gamma} + \frac{\alpha c}{\gamma(\alpha + c)}\right),$$
$$B_1 = C\left(1 + \frac{b}{\alpha + \gamma}\right).$$

Die in Art. 356 als zur Bestimmung des Widerstandes eines Galvanometers geeignet angegebene Methode unterscheidet sich von der hier für die Messung des Widerstandes einer Batterie auseinandergesetzten lediglich dadurch, dass dort die Contacte in DA hier in DB unterbrochen und geschlossen werden. Vertauscht man also α und β mit einander, so ergiebt sich für jetzigen Fall

$$\frac{y_0 - y_1}{C} = \frac{\beta}{\gamma}\,\frac{c\gamma - b\beta}{(c + \beta)(\beta + \gamma)}.$$

*) In dem *Phil. Mag.* von 1877, I. pag. 515—525 macht Oliver Lodge darauf aufmerksam, dass, da die electromotorische Kraft der Batterie von der Stärke des durch sie gehenden Stromes abhängt, die Ablenkung der Galvanometernadel bei offener Brücke eine andere sein wird als bei geschlossener, vorausgesetzt dass die Bedingung $a\alpha = c\gamma$ wirklich besteht. Er beschreibt deshalb eine Modification der Manceschen Methode, die er mit gutem Erfolg angewendet haben will. Siehe auch Wiedemann, *Lehre von der Electricität* 1882, I. pag. 482.

Digitized by Google

Vergleichung electromotorischer Kräfte.

358. Die im folgenden auseinanderzusetzende Methode zur Vergleichung von electromotorischen Kräften Voltascher und thermoelectrischer stromloser Ketten verlangt zu ihrer Durchführung ausser zwei Galvanometern einen Satz Widerstandsrollen und eine constante Batterie.

Es seien E_1 und E_2 die mit einander zu vergleichenden Electromotoren, E bezeichne die constante Batterie, die ich als kräftiger wie E_1 und E_2 voraussetze.

Man ordnet die Apparate so, wie in der beistehenden Figur angegeben ist, und schaltet bei G_1 und G_2 Galvanometer ein.

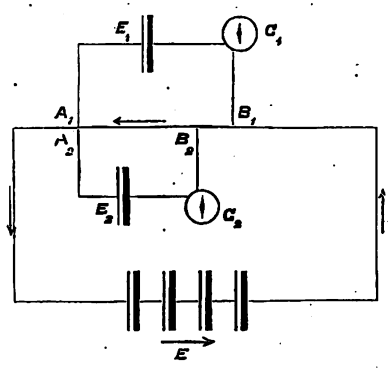


Fig. 39.

Wenn nun E grösser als E_1 ist, so kann man durch Vermehrung des Widerstandes (etwa durch Einschaltung von Widerstandsrollen) im Draht A_1B_1, der gleichzeitig dem Stromkreise der Batterie E und der E_1 angehört, bewirken, dass die von B_1 nach A_1 zufolge der Batterie E wirkende electromotorische Kraft genau gleich der des Electromotors E_1 wird. Sind dann die Electroden dieses Electromotors mit A_1 und B_1 verbunden, so kann durch ihn kein Strom fliessen. Zeigt also nach der Justirung des Widerstandes R_1 das Galvanometer G_1 keinen Strom an, während der Kreis der Batterie E von einem Strom mit der Stärke C durchflossen wird, so hat man

1) $$E_1 = CR_1.$$

Man justirt dann den Widerstand R_2 des der Batterie E und dem Electromotor E_2 gemeinsamen Drahtstückes A_2B_2 so lange, bis auch das Galvanometer G_2 keinen im Kreise von E_2 fliessenden Strom anzeigt, und hat

2) $$E_2 = CR_2.$$

Führt man die Justirung der Widerstände in A_1B_1 und A_2B_2 gleichzeitig aus, so hat C in beiden Gleichungen denselben Wert, und man erhält die Bestimmungsformel

3) $$E_1 : E_2 = R_1 : R_2.$$

Die Beziehung gestattet nur die Grösse einer electromotorischen Kraft durch die einer andern zu bestimmen. Absolute electrostatische oder electromagnetische Messungen führt man mit einem Electrometer oder einem absoluten Galvanometer aus.

Digitized by Google

Das oben auseinandergesetzte Verfahren, in dem man dafür sorgt, dass beide Electromotoren im Augenblick, wo ihre Kräfte verglichen werden, stromlos sind, bildet eine von Latimer Clark angegebene Modification der bekannten Poggendorffschen Methode.

Ich führe die von Clark für die electromotorischen Kräfte der Hauptelemente erhaltenen Zahlen an.

					Concentrirte Lösung von		Volts.*)
Daniell	I.	Amalgamirtes Zink	$H_2SO_4 + 4$ aq.		$CuSO_4$	Kupfer	1.079
„	II.	„	„	$H_2SO_4 + 12$ aq.	„	„	0.978
„	III.	„	„	„	$Cu(NO_3)_2$	„	1.00
Bunsen	I.	„	„	„	HNO_3	Kohle	1.964
Grove		„	„	$H_2SO_4 + 4$ aq.	HNO_3	Platin	1.956.

*) Ein Volt ist dabei gleich 100,000,000 electromotorischer Krafteinheiten des Centimeter-Gramm-Secunden-Systems gesetzt.

Digitized by Google

Cap. XII.

Electrischer Widerstand der Körper.

Classificirung der Körper.

359. Die Körper lassen sich in Bezug auf ihr Verhalten gegen den Durchgang der Electricität in drei Classen verteilen.

Die erste Classe umfasst die Metalle, ihre Legirungen und manche ihrer Verbindungen mit andern Körpern, so eine Reihe von Schwefelmetallen und Superoxyden. Es sind ihr ferner die Kohle in ihrer Form als Gaskohle und das krystallinische Selen zuzuzählen.

Die ihr angehörigen Substanzen werden vom Strom durchsetzt, ohne von ihm zerlegt oder in ihrer chemischen Structur, sei es in ihrem Innern oder an den Stellen, wo die Electricität ein- bezüglich austritt, verändert zu werden.

Zudem leisten sie alle dem Durchgange des Stromes einen um so grössern Widerstand, je höher temperirt sie sind.

Die zweite Classe wird von den Substanzen gebildet, welche als Electrolyte oder Leiter zweiter Classe bezeichnet werden, die also vom durchgehenden Strome in zwei an den Electroden erscheinende Componenten zerlegt werden.

Im allgemeinen ist ein Körper nur dann ein Electrolyt, wenn er sich in flüssigem Zustande befindet, doch giebt es auch einige Substanzen, welche wie Glas bei 100° C., den Strom electrolytisch leiten, trotzdem sie scheinbar starr sind.

Die Untersuchungen von B. C. Brodie zeigen, dass auch gewisse Gase, wenn man genügend grosse electromotorische Kräfte anwendet, electrolysirt werden.

Alle Substanzen, welche den Strom electrolytisch leiten, verringern ihren Widerstand, wenn man ihre Temperatur erhöht.

Zur dritten Classe rechne ich diejenigen Körper, welche eine so geringe Leitungsfähigkeit für Electricität besitzen, dass man den Durchgang der Electricität durch sie nur durch allerfeinste Methoden zu constatiren vermag. Das sind die sogenannten Dielectrica. Dahin gehört eine grosse Anzahl der festen Körper, von denen manche im geschmolzenen Zustand Electrolyte

Digitized by Google

sind. Dahin gehören ferner einige Flüssigkeiten, wie Terpentin, Naphta, geschmolzenes Paraffin, und ebenso alle Gase und Dämpfe. Die Kohle als Diamant und das Selen als amorpher Körper zählen ebenfalls zu den dielectrischen Medien.

Der Widerstand, den Körper dieser Classe dem Strome entgegensetzen, ist ganz enorm, viel grösser als der, den die Electricität bei den Metallen zu überwinden hat, doch nimmt er ab, wenn ihre Temperatur ansteigt. Die geringe Leitungsfähigkeit der Dielectrica bringt es mit sich, dass man nicht recht entscheiden kann, ob die Ströme in ihrer so bedeutend abgeschwächten Intensität von einer Electrolyse begleitet sind oder nicht.

Electrischer Widerstand der Metalle.

360. Kein Teil unserer Wissenschaft kann sich einer so grossen Anzahl von sorgfältig durchgeführten Experimenten rühmen, als der von der Bestimmung des Widerstandes der Metalle handelnde.

Da die Telegraphie grosses Gewicht darauf legen muss, dass die Metalle, aus denen sie ihre Leitungsdrähte herstellt, dem Strome den möglich geringsten Widerstand entgegensetzen, so ist man gezwungen, Widerstandsmessungen vor der Wahl des Materials anzustellen. Wenn ferner eine Telegraphenlinie an irgend einer Stelle defect geworden ist, so helfen wiederum Widerstandsmessungen zur Entdeckung der Stelle. Zu solchen Messungen verwendet man aber jetzt Personen jedes Standes, und deshalb müssen die dazu dienenden Widerstandsrollen aus Metallen hergestellt sein, deren electrisches Verhalten vorher an zuständigen Orten sorgfältig untersucht und gehörig fixirt ist.

Die electrischen Eigenschaften der Metalle und ihrer Legirungen sind durch Matthiessen, Vogt, Hockin und die Siemens studirt worden. Den letztern verdankt man auch noch die Einführung strenger und vorwurfsfreier electrischer Messungen in die Praxis.

Die Untersuchungen von Matthiessen haben gelehrt, dass eine Temperaturänderung den Widerstand vieler reiner Metalle in ganz gleicher Weise afficirt. Bei einer Temperaturerhöhung von 0° bis 100° C. steigt der Widerstand dieser Metalle im Verhältnis von 1 zu 1.414 an. Für reines Eisen beträgt das Verhältnis 1.645, für reines Thallium 1.458.

C. W. Siemens*) hat in noch weitern Temperaturgrenzen, nämlich von 0° bis 350° C., und in gewissen Fällen bis 1000° C., gearbeitet. Auch er findet, dass der Widerstand der Metalle mit wachsender Temperatur ansteigt, dass aber seine Aenderung pro 1° C. um so geringer ausfällt, je höher temperirt das Metall schon ist. Seine Interpolationsformel

$$r = \alpha \sqrt{T} + \beta T + \gamma,$$

*) *Proc. R. S.* 1871, April 27.

Digitized by Google

wo T die von — 273° C. gerechnete absolute Temperatur angiebt, soll sowohl mit seinen eignen in dem weiten Temperaturintervall von 0° bis 1000° C. erhaltenen Versuchsresultaten sehr genau übereinstimmen, als auch Matthiessens in verhältnismässig niedrigen Temperaturen eruirte Zahlen genügend darstellen.

Mit Einsetzung der Zahlenwerte für die Constanten α, β, γ ist für

$$\text{Platin} \ldots r = 0{,}034369 \sqrt{T} + 0{,}00216407\, T - 0{,}24130,$$
$$\text{Kupfer} \ldots r = 0{,}026577 \sqrt{T} + 0{,}00314430\, T - 0{,}22751,$$
$$\text{Eisen} \ldots r = 0{,}072545 \sqrt{T} + 0{,}00381330\, T - 1{,}23971.$$

Solche Widerstandsformeln können dann umgekehrt zur Bestimmung hoher Temperaturen dienen. Man hat zu dem Behufe einen so untersuchten Leiter, etwa einen Platindraht, der hohen zu messenden Temperatur auszusetzen, seinen Widerstand direct zu bestimmen, um damit aus der Widerstandsformel T zu berechnen.

Nach Matthiessen ist der Widerstand einer Legirung in den meisten Fällen grösser, als der aus der procentischen Zusammensetzung und den bezüglichen Widerständen der Componenten berechnete. Eine Legirung von Gold mit Silber leistet dem Strom einen grössern Widerstand, als reines Gold oder reines Silber, und sie ändert in gewissen Grenzen ihren Widerstand nur wenig mit Aenderung der Verhältnisse, zu welchen die genannten Metalle in die Legirung eingehen.

Temperaturänderungen alteriren den Widerstand der Legirungen im allgemeinen in geringerem Grade als den der reinen Metalle.

Das ist der Grund, weshalb das Neusilber zur Herstellung von Widerstandsrollen so geeignet ist, denn abgesehen davon, dass diese Legirung einen ziemlich beträchtlichen Widerstand besitzt, ändert sie ihn auch nur wenig der Temperatur.

Auch eine Legirung von Silber und Platin wird oft zur Anfertigung von Normalwiderstandsrollen verwendet.

361. Einige Metalle ändern ihren Widerstand, wenn man sie glüht, und können deshalb nicht eher zu Widerstandsmessungen verwendet werden, als bis man die aus ihnen gebildeten Drähte hohen Temperaturen ausgesetzt und durch wiederholte Prüfungen die Sicherheit gewonnen hat, dass sie ihren Widerstand nicht weiter verändern.

Bei andern Drähten variirt der Widerstand im Laufe der Zeit, wenn man sie auch keinen beträchtlichen Temperaturänderungen unterworfen hat.

Darum ist die Bestimmung des specifischen Widerstandes des Quecksilbers, welches als Flüssigkeit stets dieselbe moleculare Structur beibehält und durch Behandlung mit Salpetersäure und Destillation leicht gereinigt werden kann, von so grosser Bedeutung.

Die eingehendsten und sorgfältigsten Untersuchungen über den Widerstand des Quecksilbers haben W. und C. F. Siemens, als sie aus dem Quecksilber Normalmaasse für Widerstandsbestimmungen herstellen wollten,

Digitized by Google

ausgeführt. Ihre Messungen sind dann von Matthiessen und Hockin vervollständigt worden.

Sie leiteten den specifischen Widerstand des Quecksilbers aus dem Widerstande eines in einer Glasröhre befindlichen Quecksilberfadens, welcher bei einer Länge l ein Gewicht w besass, in der folgenden Weise her.

Man kann keine Glasröhren herstellen, welche ihrer ganzen Länge nach calibrisch sind. Bringt man aber in eine solche Röhre einen Quecksilbertropfen, der sich daselbst zu einem Faden von der Länge λ umformt, so wird der Querschnitt der Röhre in der Nähe der Mitte des Quecksilberfadens einen Flächeninhalt von der Grösse $s = C/\lambda$ haben. Verschiebt man den Faden in der Röhre, so kann sich λ und damit s ändern, C ist aber für denselben Faden eine Constante.

Bezeichnet man mit x den Abstand irgend eines Querschnitts der Röhre von einem Ende derselben, so wird das Gewicht eines die Röhre ausfüllenden Fadens von der Länge l

$$w = \rho \int s\,dx = \rho C \frac{l}{n} \sum \frac{1}{\lambda}.$$

Darin bedeutet n die Anzahl der auf der Röhre in gleichen Abständen verteilten Punkte, an denen die Länge λ des kleinen Quecksilberfadens bestimmt worden ist und ρ das Gewicht einer Volumeinheit des Quecksilbers.

Für den Widerstand des ganzen Fadens hat man den Ausdruck

1) $$R = \int \frac{r}{s}\,dx = \frac{r}{C}\,\frac{l}{n} \sum \lambda,$$

wo r den specifischen Widerstand des Quecksilbers für die Volumeinheit angiebt. Demnach wird

$$w R = r \rho \frac{l^2}{n^2} \sum \lambda \sum \frac{1}{\lambda},$$

und

2) $$r = \frac{w R}{\rho l^2} \cdot \frac{n^2}{\sum \lambda \sum \frac{1}{\lambda}}.$$

Den auf die Längeneinheit bezüglich Masseneinheit bezogenen Widerstand erhält man daraus durch Multiplication von r mit der Dichte ρ des Quecksilbers.

Nach den Untersuchungen von Matthiessen und Hockin hat eine gleichförmige Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 g Gewicht bei 0° C. einen Widerstand von 13,071 Ohms. Nimmt man also die Dichte des Quecksilbers bei dieser Temperatur zu 13,595 an, so wird der Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt gleich 0,96146 Ohm.*)

*) Wiedemann giebt *Lehre von der Electricität* 1882, Bd. I. pag 497 dafür 0,953 an. Neuerdings soll eine internationale Commission zur Regelung der Frage der electrischen Maasseinheiten und zur Herstellung von Normalen zusammentreten. Anm. d. Uebers.

Digitized by Google

362. In der folgenden, den Matthiessenschen*) Versuchen entnommenen Zusammenstellung bedeutet R den in Ohms gemessenen Widerstand einer Säule der betreffenden Substanz von 1 m Länge und 1 g Gewicht bei 0° C., und r giebt den Widerstand eines Cubikcentimeters der Substanz in Centimeter durch Secunde.

	Specifisches Gewicht	Beschaffenheit	R	r	Procentische Aenderung für 1° C. bei 20° C.
Silber	10,50	hart gezogen	0,1689	1609	0,377
Kupfer	8,95	hart gezogen	0,1469	1642	0,388
Gold	19,27	hart gezogen	0,4150	2154	0,365
Blei	11,391	gewalzt	2,257	19847	0,387
Quecksilber . . .	13,595	flüssig	13,071	96146	0,072
2 Gold + 1 Silber .	15,218	hart od. geglüht	1,668	10988	0,065
Selen bei 100° C.		krystallinisch		6×10^{13}	1,00

Electrischer Widerstand der Electrolyte.

363. Der Widerstand eines Electrolyts ist einigermassen schwer zu bestimmen, weil die an den Electroden sich ausbildende Polarisation die Potentialdifferenz der Electroden grösser als die electromotorische Kraft erscheinen lässt, welche tatsächlich den Strom durch das Electrolyt treibt.

Doch vermag man dieser Schwierigkeit in mannigfacher Weise Herr zu werden.

In einigen Fällen kann man durch Benutzung geeigneter Electroden die Polarisation überhaupt vermeiden, so wenn man eine Zinkelectrode in eine Lösung von Zinkvitriol senkt.

Nach einer andern Methode nimmt man Electroden, deren Flächeninhalt sehr gross gegen den Querschnitt des der Messung zu unterwerfenden Teiles des Electrolyts ist, und lässt den Strom immer nur kurze Zeit und in fortwährend wechselnder Richtung das Electrolyt durchsetzen. Man kann dann die Widerstandsmessung ausführen, ehe sich noch durch den primären Strom eine hindernde Polarisation ausgebildet hat.

Endlich vermag man auch noch durch zwei Versuche zum Ziele zu gelangen. Man lässt einen Strom zunächst einen langen Weg in dem Electrolyt zurücklegen, verkürzt dann die Bahn des Stromes und justirt die electromotorische Kraft der primären Batterie so, dass der Strom jetzt mit ganz derselben Stärke wie früher durch das Electrolyt fliesst. Lässt man den Strom beidemal gleich lange das Electrolyt durchsetzen, so kann man aus den Schlussgleichungen die Polarisation ganz eliminiren.

364. In den von Paalzow**) angestellten Untersuchungen war das Electrolyt in zwei flache Tröge verteilt, die mit einander einmal durch einen

*) *Phil. Mag.* 1865, Mai.
**) Monatsberichte der Berliner Academie der Wissenschaften 1868, Juli.

Digitized by Google

und dann durch einen andern langen mit der electrolytischen Flüssigkeit gefüllten Heber communicirten. Die Electroden bestanden aus grossen Scheiben und waren einzeln in die Tröge eingesenkt.

Paalzow bestimmte erst die Widerstandsdifferenz $R_1 - R_2$, die der Apparat zeigte, wenn erst der eine Heber und dann der andere die Tröge verband, füllte hierauf beide Heber mit Quecksilber und maass wiederum ihre Widerstandsdifferenz $R_1' - R_2'$ bezogen auf 0°C. Die Gleichung

$$\rho = \frac{R_1 - R_2}{R_1' - R_2'}$$

gab ihm dann den Widerstand des Electrolyts in Einheiten des Widerstandes des Quecksilbers bei 0°C.

Daraus folgt der Widerstand eines Cubikcentimeters des Electrolyts, wenn man ρ mit dem für 0°C geltenden Werte von r (s. Art. 361, 2) multiplicirt.

Ich lasse die von Paalzow gefundenen Zahlen folgen.

Schwefelsäure und Wasser.

	Temp.	Widerstand verglichen mit dem des Quecksilbers.
H_2SO_4	15° C.	96950
$H_2SO_4 + 14\,H_2O$	19° C.	14157
$H_2SO_4 + 13\,H_2O$	22° C.	13310
$H_2SO_4 + 499\,H_2O$	22° C.	184773

Zinkvitriol und Wasser.

$ZnSO_4 + 23\,H_2O$	23° C.	194400
$ZnSO_4 + 24\,H_2O$	23° C.	191000
$ZnSO_4 + 107\,H_2O$	23° C.	354000

Kupfervitriol und Wasser.

$CuSO_4 + 45\,H_2O$	22° C.	202410
$CuSO_4 + 105\,H_2O$	22° C.	339341

Schwefelsaure Magnesia und Wasser.

$MgSO_4 + 34\,H_2O$	22° C.	199180
$MgSO_4 + 107\,H_2O$	22° C.	324600

Salzsäure und Wasser.

$HCl + 15\,H_2O$	23° C.	13626
$HCl + 500\,H_2O$	23° C.	86679

365. F. Kohlrausch und W. A. Nippoldt*) haben den Widerstand verschieden concentrirter Mischungen von Schwefelsäure und Wasser nach

*) *Pogg. Ann.* Bd. 138 (1869), pag. 286.

Digitized by Google

der zweiten angeführten Methode untersucht. Sie benutzten magnetoelectrische Wechselströme, deren electromotorische Kraft zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{74}$ von der des Groveschen Elements schwankte. Mit Hilfe eines Thermoelements aus Kupfer und Eisen konnten sie sich auch eine electromotorische Kraft verschaffen, die nur den $\frac{1}{429000}$ ten Teil von der der Groveschen Zelle betrug.

Ihre Untersuchungen ergaben, dass das Ohmsche Gesetz in dem ganzen von den angeführten Grenzwerten der electromotorischen Kraft gebildeten Intervall exacte Geltung hatte.

Die Mischung setzte dem Strome den geringsten Widerstand entgegen, wenn sie etwa $^1/_3$ Schwefelsäure und $^2/_3$ Wasser enthielt.*)

Ausserdem bestätigten sie das Gesetz, wonach der Widerstand der Electrolyte mit steigender Temperatur kleiner werden sollte. Die folgende Tafel zeigt die procentische Abnahme des Widerstandes einer Mischung von Schwefelsäure und Wasser für 1° C.

Widerstand einer Mischung von Schwefelsäure und Wasser bei 22° C. bezogen auf den Widerstand des Quecksilbers bei 0° nach Kohlrausch und Nippoldt.

Specifisches Gewicht	Procente von H_2SO_4	Widerstand bei 22° ($Hg_0 = 1$)	Procentische Zunahme der Leitungsfähigkeit für 1° C.
0,9985	0,0	746300	0,47
1,00	0,2	465100	0,47
1,0504	8,3	34530	0,653
1,0989	14,2	18946	0,646
1,1431	20,2	14990	0,799
1,2045	28,0	13133	1,317
1,2631	35,2	13132	1,259
1,3163	41,5	14286	1,410
1,3547	46,0	15762	1,674
1,3994	50,4	17726	1,582
1,4482	55,2	20796	1,417
1,5026	60,3	25574	1,794

Electrischer Widerstand der Dielectrica.

366. Man hat für Guttapercha und andere Materialien, welche zum Isoliren verwendet werden, eine grosse Anzahl von Widerstandsmessungen ausgeführt, um ein Urteil über ihren Wert als Isolationen der Telegraphenkabel zu gewinnen.

*) Siehe jedoch wegen dieses Resultats und der folgenden Ergebnisse Wiedemann, *Lehre von der Electricität*, 1882, Bd. I. pag. 601, Note 3 und pag. 603.
Anm. des Uebers.

Digitized by Google

Man überzog gewöhnlich einen Telegraphendraht mit dem betreffenden isolirenden Material, legte das so hergerichtete Kabel in eine mit Wasser gefüllte Wanne und benutzte den Draht als eine, das Wasser als andere Electrode. Dadurch wurde der Strom gezwungen, einen cylindrischen Mantel von bedeutendem Flächeninhalt und geringer Dicke zu durchsetzen.

Von den Ergebnissen, zu denen man so gelangt ist, erwähne ich zunächst dasjenige, wonach der Strom, wenn die electromotorische Kraft zu wirken beginnt, in seiner Stärke, wie das Galvanometer anzeigt, schwankt. In der Tat besteht die erste Wirkung der electromotorischen Kraft darin, dass sie einen vorübergehenden intensiven Strom aussendet, der lediglich dazu dient, die Oberfläche des Isolators mit freier Electricität in dem Grade zu laden, wie es eben der betreffenden electromotorischen Kraft entspricht. Demgemäss ist die Stärke dieses ersten Stromes nicht als Maass für die Leitungsfähigkeit des Isolators, sondern als Maass seiner Capacität zu betrachten. Auch nach Ablauf dieses Ladungsstromes ist die Intensität des nachfolgenden regulären Stromes noch nicht constant, und kann demgemäss auch noch nicht zur Berechnung des wahren Wertes des Widerstandes im Isolator verwendet werden. Man hat nämlich gefunden, dass die Stromstärke mindestens eine halbe Stunde lang nach Schliessung des Kreises fortdauernd abnimmt. Je früher man also den Widerstand bestimmen würde, einen desto geringern Wert würde man für ihn erhalten.

So war bei Hoopers isolirendem Material der scheinbare Widerstand zehn Minuten nach Schluss des Stromes viermal und neunzehn Stunden später etwa drei und zwanzigmal so gross, als am Ende der ersten Minute. Kehrt man die Wirkungsrichtung der electromotorischen Kraft um, so fällt der Widerstand langsam, um dann wieder allmälig anzusteigen.

Man wird annehmen können, dass diese Erscheinungen einer eigentümlichen, in Ermangelung eines besseren Ausdrucks, als Polarisation zu bezeichnenden Bedingung, in die Guttapercha unter dem Einfluss einer electrischen Kraft tritt, ihre Entstehung verdanken. Die ganze Vorrichtung verhält sich einerseits wie eine Reihe von Leydener Flaschen, die man *par cascade* ladet, und andererseits wie eine Rittersche Secundärbatterie.

Verbindet man eine Reihe Leydener Flaschen von grosser Capacität hintereinander durch einen Draht von bedeutendem Widerstande (etwa, wie in den von Gaugain angestellten Untersuchungen, durch einen durchnässten Baumwollendocht), so bringt eine durch die Electroden dieser Cascadenbatterie wirkende electromotorische Kraft einen durch das Galvanometer angezeigten Strom, dessen Stärke fortdauernd so lange abnimmt, bis alle Flaschen zu der unter den obwaltenden Umständen erreichbaren Höhe geladen sind.

Der Widerstand, den eine solche Flaschenreihe dem Strome entgegensetzt, nimmt scheinbar mit der Dauer des Stromes zu, und er würde überhaupt über alle Grenzen hinaus anwachsen, wenn das die Belegungen trennende Dielectricum aus einem vollständigen Isolator bestände. Entfernt

Digitized by Google

man die electromotorische Kraft und verbindet die beiden Electroden der Cascadenbatterie mit einander, so tritt ein dem ladenden Strom entgegengerichteter Strom auf, der bei vollständiger Isolirung jeder innern Belegung von der ihr entsprechenden äussern genau dieselbe Electricitätsmenge wie der primäre Strom während der Dauer seiner Tätigkeit mit sich fortführen würde.

Aehnliche Erscheinungen kann man auch an der Secundärbatterie bemerken, nur dass hier die schliessliche Isolation nicht so gut und die Capacität einer Flächeneinheit der Electroden ausserordentlich viel grösser als bei der Leydener Batterie ist.

Verbindet man den Draht eines Kabels, nachdem man dasselbe in der angegebenen Weise während etwa einer halben Stunde von einem Strom hat durchfliessen lassen, mit der Electrode der isolirenden Bekleidung, so tritt auch hier ein Rückstrom ein, der einige Zeit anhält und das Kabel allmälig auf seinen ursprünglichen Zustand zurückbringt.

Die hier an dem Beispiele eines Kabels behandelten Phänomene entsprechen vollständig den unter dem Namen des electrischen Residuums an der Leydener Flasche längst bekannten.

Die Polarisation ist aber in Guttapercha und andern Dielectricis viel bedeutender als in Glas.

Die Polarisation scheint zunächst von den Richtungen in den betreffenden Substanzen abzuhängen und ausserdem zu ihrer Entstehung nicht sowohl die Wirkung einer electromotorischen Kraft, als vielmehr den Durchgang — sei es durch Verschiebung oder in anderer Weise — einer beträchtlichen Electricitätsmenge zu verlangen. Der Durchgang der Electricität nimmt eine bedeutende Zeit in Anspruch.

Sowie die Polarisation begonnen hat, tritt eine innere electromotorische Kraft auf, die in der Substanz dem Strom entgegenwirkt, und soweit anwächst, bis sie entweder einen dem primären Strome entgegengerichteten und an Stärke ihm gleichen Strom hervorgebracht hat, oder bis der Polarisationszustand durch die wirkliche Leitungsfähigkeit der Substanz sich allmälig verliert. Indessen erfordert die ganze Theorie der Erscheinungen, die wir als electrisches Residuum, electrische Absorption, Electrisirung oder Polarisation bezeichnen, noch die eingehendsten Untersuchungen, und wahrscheinlich werden wir noch einst bei dem Studium dieser Erscheinungen wichtige Entdeckungen über die innere Structur der Körper machen.

367. Der Widerstand der Dielectrica nimmt grösstenteils mit steigender Temperatur ab. Guttapercha hat zum Beispiel bei 0°C. einen zwanzigmal so grossen Widerstand als bei 24° C. Nach Bright und Clark steht die Formel

$$R = r \,.\, 0{,}8878^t,$$

in der R den Widerstand des Guttapercha bei der Temperatur $T + t$ und r den bei der Temperatur T angiebt, die Zahl aber zwischen 0,8878 und 0.9

Digitized by Google

schwankt, in genügender Uebereinstimmung mit ihren direct ausgeführten Messungen. Hockin hat die merkwürdige Tatsache verificirt, dass Guttapercha erst einige Stunden auf der bestimmten Temperatur sich befinden muss, ehe es den dieser Temperatur entsprechenden Widerstand aufweist.

Auf den Widerstand des Kautschuks übt die Wärme keinen so grossen Einfluss aus, wie auf den des Guttapercha.

Der Widerstand des Guttapercha hängt auch von dem Drucke, unter dem sich dieses Material befindet, ab, und zwar wächst der Widerstand sehr beträchtlich, wenn man es comprimirt.

Ich teile hier nach Jenkin*) die in Ohms gemessenen und auf Cubikmeter bezogenen Widerstände verschiedener in den namhaft gemachten Kabeln benutzter Guttaperchasorten mit.

Name des Cabels.	Widerstand.
Red Sea	$0{,}267 \times 10^{12}$ bis $0{,}362 \times 10^{12}$
Malta-Alexandria	$1{,}23 \times 10^{12}$
Persian Gulf	$1{,}80 \times 10^{12}$
Second Atlantic	$3{,}42 \times 10^{12}$
Hoopers Persian Gulf Core .	$74{,}7 \times 10^{12}$
Gutta percha bei 24° C. . . .	$3{,}53 \times 10^{12}$

Dazu füge ich noch die folgende aus Buffs in Artikel 271 erwähnten Versuchen abgeleitete Tabelle für den in Ohms gemessenen und wieder auf Cubikmeter bezogenen Widerstand des Glases bei verschiedenen Temperaturen hinzu.

Temperatur.	Widerstand.
200° C.	227000
250°	13900
300°	1480
350°	1035
400°	735

369. Neuerdings hat Varley**) die Bedingungen untersucht, unter denen ein Strom durch verdünnte Gase hindurchgeht. Er findet, dass die electromotorische Kraft E eines durch ein Gas fliessenden Stromes aus zwei Teilen besteht, aus einer Constante E_0 und aus einem Gliede, welches dem Ohmschen Gesetz entspricht. Demnach soll

$$E = E_0 + RC$$

sein.

Er brauchte zum Beispiel, um einen Strom zum Hindurchgehen durch eine mit Gas gefüllte Röhre zu bringen, die electromotorische Kraft von

*) *Cantor Lectures.*
**) *Proc. R. S.* 1871, Jan. 12.

Digitized by Google

323 Daniellschen Elementen. Hatte der Strom erst zu fliessen begonnen, so genügten 304 Daniells, um ihn noch gerade zu erhalten. Die durch ein Galvanometer gemessene Stromintensität ergab sich dann als proportional der Anzahl von Zellen, die die Daniellsche Batterie mehr als 304 besass. Die Ablenkung der Galvanometernadel betrug nämlich bei 305 Zellen 2, bei 306 Zellen 4, bei 307 Zellen 6 u. s. f. bis die Anzahl der Zellen auf 380 gestiegen war, wo das Galvanometer eine Ablenkung 150, das heisst, von $(380—304) \times 1{,}97$ anzeigte.

Diese Experimente scheinen auf eine gewisse Polarisation der Electroden hinzuweisen, die einer electromotorischen Kraft von 304 Daniells äquivalent sein würde. Der Strom wäre dann, bis er die electromotorische Kraft von 304 Daniells erreichte, vollauf durch die Etablirung des Polarisationszustandes in Anspruch genommen gewesen. Später als die Batterie mehr als 304 Zellen erhielt, wurde der Ueberschuss der electromotorischen Kraft über der Kraft, die gerade nötig war, um die volle Polarisation der Electroden herzustellen, zur Unterhaltung eines electrischen Stromes nach der Ohmschen Regel verwendet.

Der Strom geht also durch verdünnte Gase nach ähnlichen Gesetzen wie durch Electrolyte, wo man ja ebenfalls auf die Polarisation der Electroden Rücksicht nehmen muss.

Hierher gehören auch die Thomsonschen in Art. 57 beschriebenen Versuche, welche das Resultat ergaben, dass die electromotorische Kraft, welche einen Funken durch die Luft von einem Körper zu einem andern treibt, nicht proportional der Schlagweite, sondern proportional der um eine Constante vermehrten Schlagweite sein soll. Man kann die electromotorische Kraft, die der zur Schlagweite zu addirenden Constante entspricht, als Aequivalent für die Polarisation der Electroden betrachten.

370. Weitere Untersuchungen über den Durchgang der Electricität durch Gase sind von Wiedemann und Rühlmann*) angestellt worden. Sie benutzten eine Holtzsche Influenzmaschine zur Hervorbringung der Ströme und liessen die Electricität sich zwischen zwei kugelförmigen Electroden, die innerhalb eines das verdünnte Gas enthaltenden metallenen Gefässes befestigt waren, entladen. Im allgemeinen geschahen die Entladungen in discontinuirlicher Folge, das zwischen zwei aufeinanderfolgende Entladungen verstrichene Zeitintervall wurde mit Hilfe eines um die Axe der Holtzschen Maschine rotirenden Spiegels bestimmt. Die Bilder der Entladungen wurden mit einem Heliometer beobachtet und die beiden Hälften des in bekannter Weise zerschnittenen Objectivglases so lange justirt bis das erste Bild einer Entladung mit dem zweiten Bild der nachfolgenden Entladung zusammenfiel. Dadurch waren sie in den Stand gesetzt, schön übereinstimmende Resultate zu erlangen. Das Endergebnis war, dass die bei jeder Entladung fortgeführte Electricitätsmenge durch

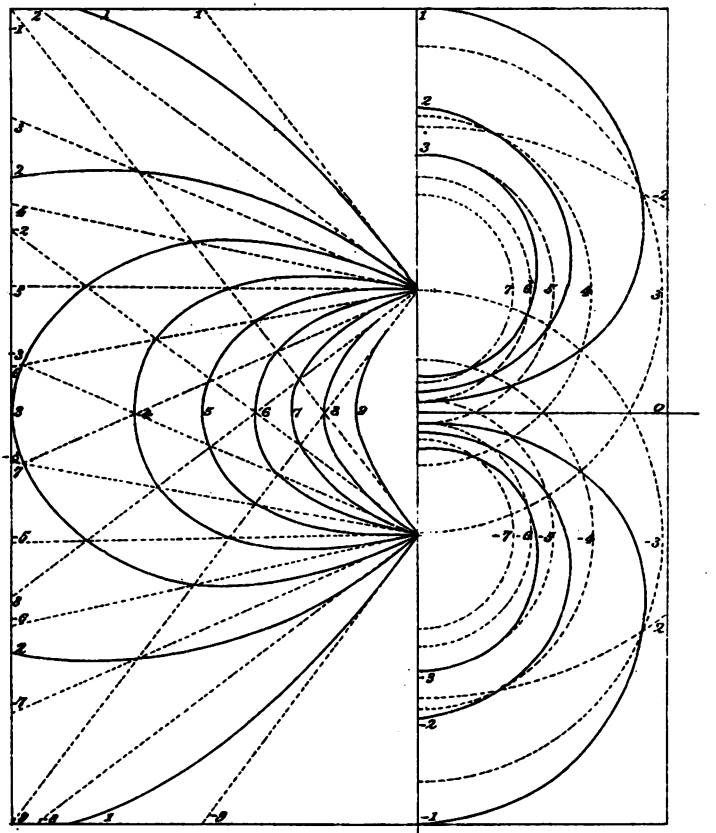
* *Berichte der Kgl. Sächs. Gesellschaft*, 1871 Oct. 20.

Digitized by Google

die Natur und Dichtigkeit des Gases und durch die Entfernung und Form der Electroden bestimmt wurde, dagegen weder von der Stärke des ladenden Stromes noch von dem Material, aus dem die Electroden gebildet waren, abhing. Die Untersuchungen der genannten Physiker bestätigten auch die von Faraday aufgestellte Behauptung, derzufolge die electrische Spannung (Art. 48) beim Eintreten einer disruptiven Entladung auf einem electrisirten Conductor kleiner ist, wenn der Conductor eine negative als wenn er eine positive Ladung besitzt, dass aber, wenn eine Entladung vor sich geht, weit mehr Electricität von einer positiv als von einer negativ electrisirten Fläche mitgenommen wird.

Sie sind auch bestrebt gewesen, die seiner Zeit (Art. 57) erwähnte Hypothese, dass das an den Flächen der Electroden condensirte Gas eine bedeutende Rolle bei der Entladung spielt, durch Tatsachen zu unterstützen, und sie bemerken, dass am meisten Gas auf der positiven Electrode condensirt gefunden wird.

Digitized by Google

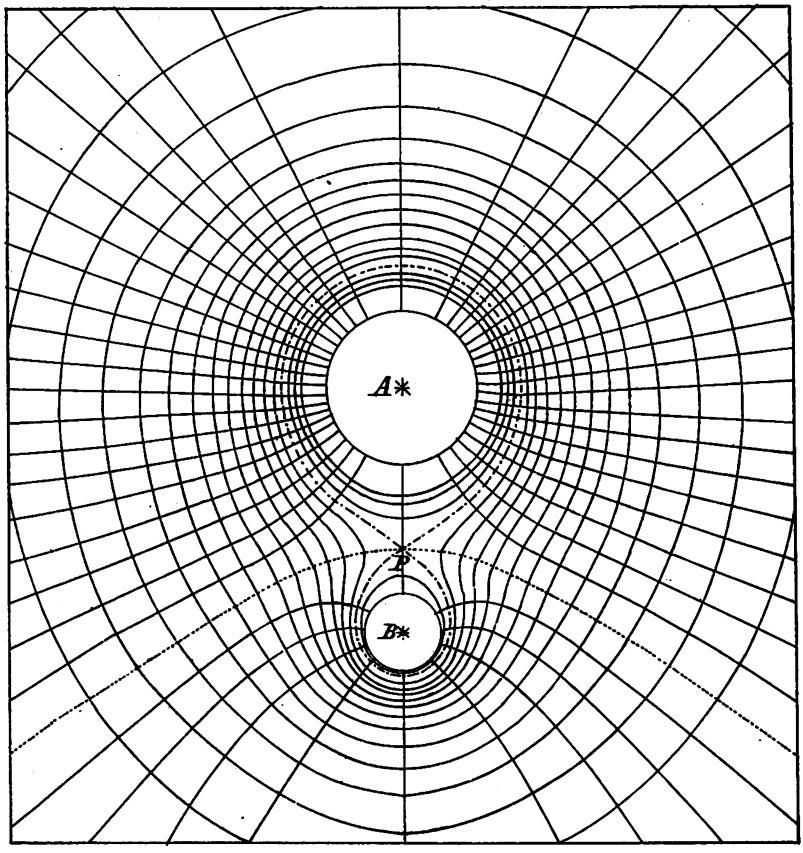


Kraftlinien. Niveaulinien.

Methode Kraft- und Niveaulinien zu zeichnen.

Digitized by Google

Digitized by Google



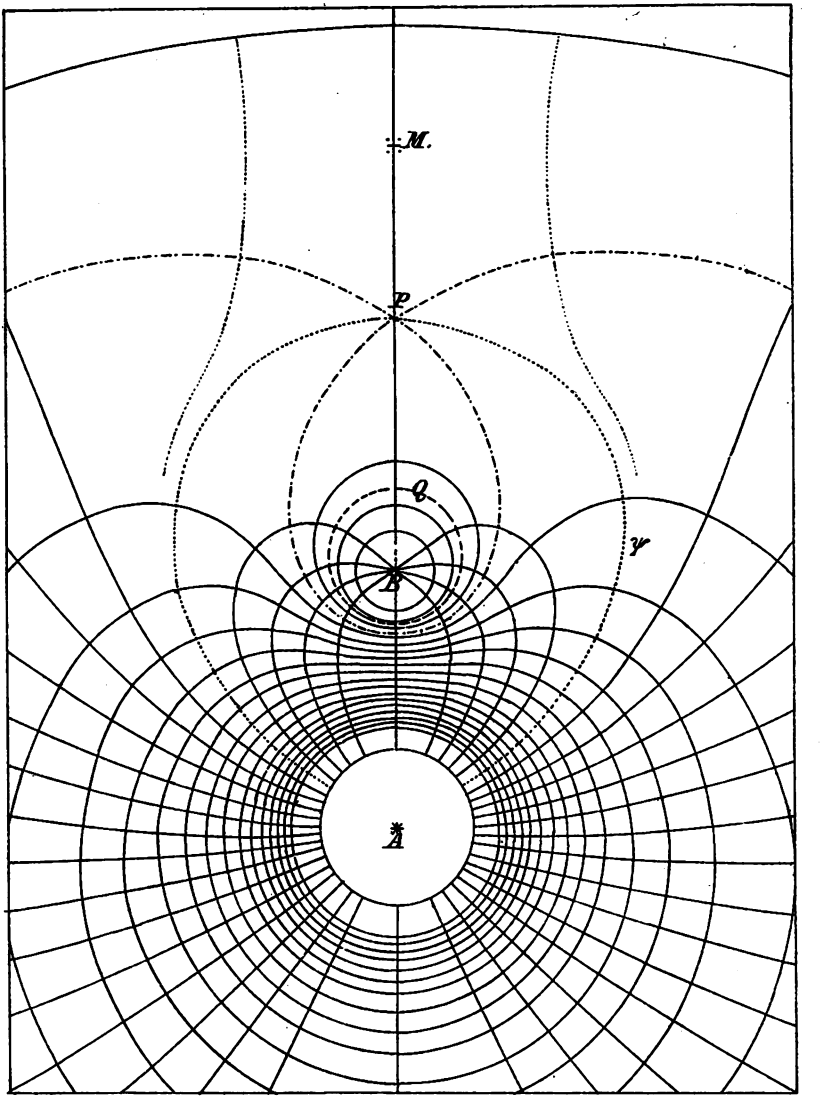
Kraftlinien und Niveauflächen.

A = 20. B = 5. P, Gleichgewichtspunkt. AP = $\frac{2}{3}$ AB.

4 : 1

Digitized by Google

Digitized by Google

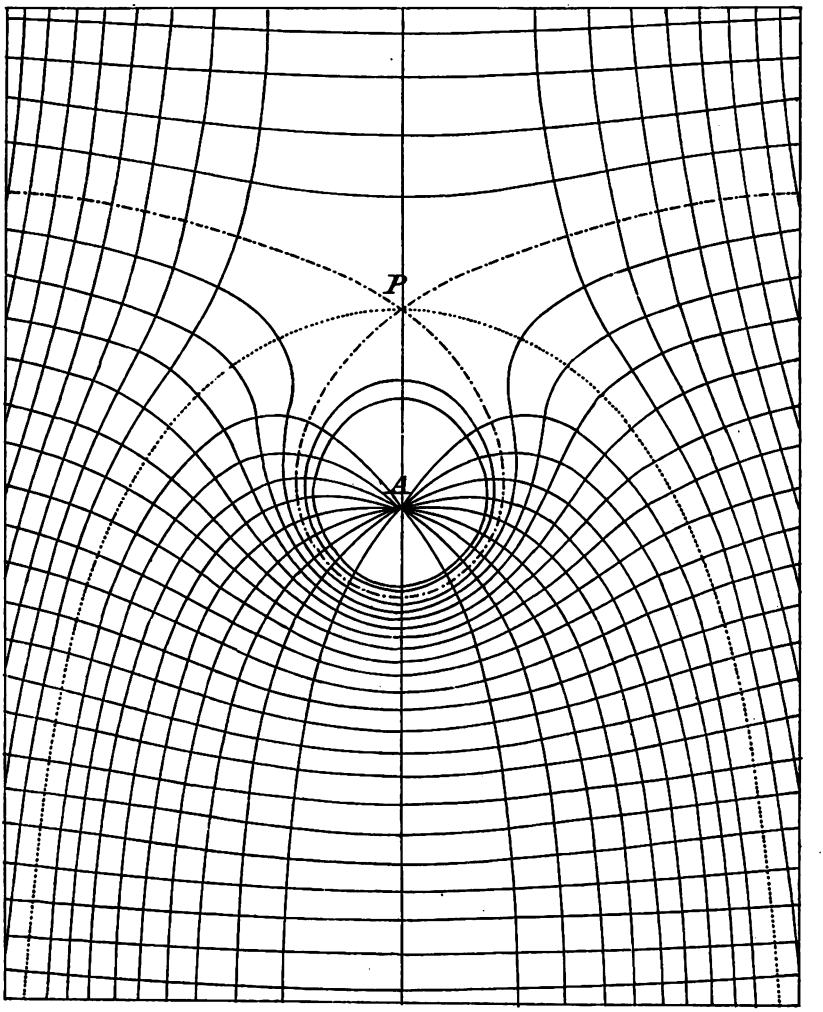


Kraftlinien und Niveauflächen.

$A = 20$. $B = 5$. P, Gleichgewichtspunkt. $AP = 2AB$.
Q, Niveaufläche von Potential Null, kugelförmig.
M. Punkt der grössten Wirkung längs der Axe.
γ Kraftlinie $\gamma = 0{,}1$.

Digitized by Google

Digitized by Google

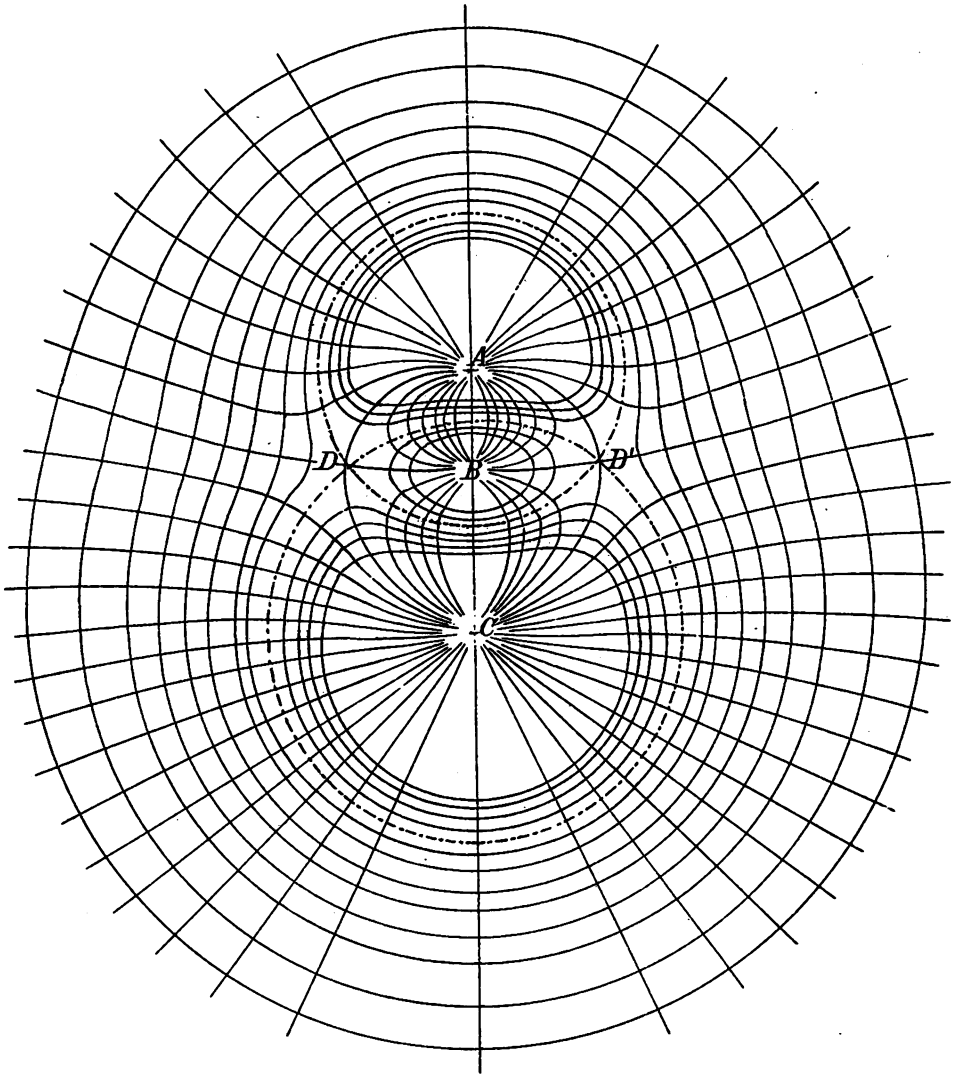


Kraftlinien und Niveauflächen.

A=10.

Digitized by Google

Digitized by Google

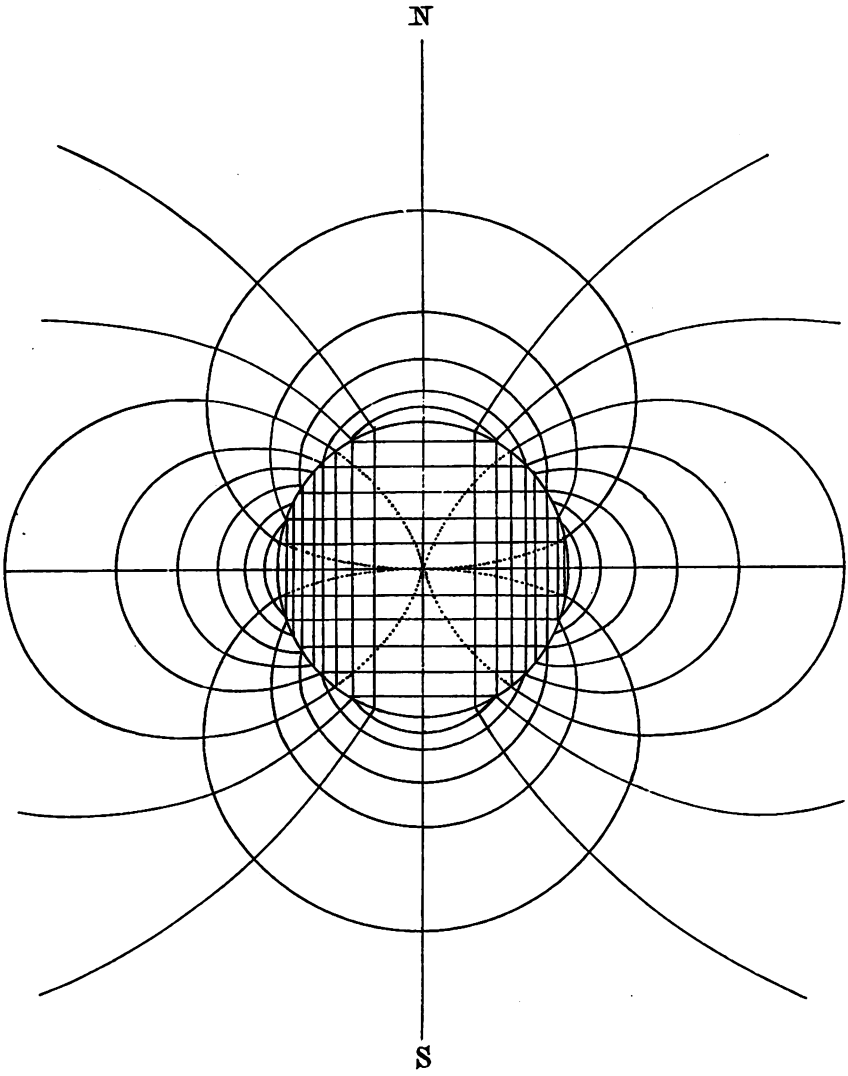


Kraftlinien und Niveauflächen.

A = 15 B = -12. C = 20.

Digitized by Google

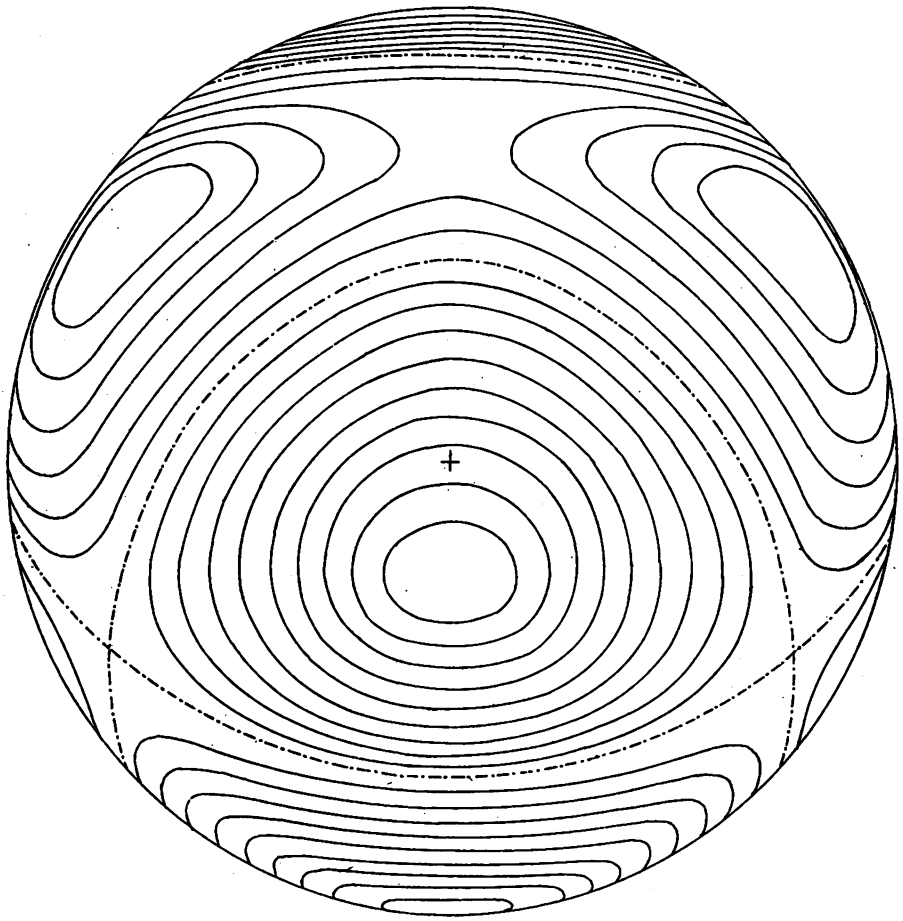
Digitized by Google



Kraft- und Niveaulinien in der diametralen Schnittebene einer Kugel, auf der die Flächendichte der Electricität nach einer harmonischen Kugelfunction des ersten Grades variirt.

Digitized by Google

Digitized by Google

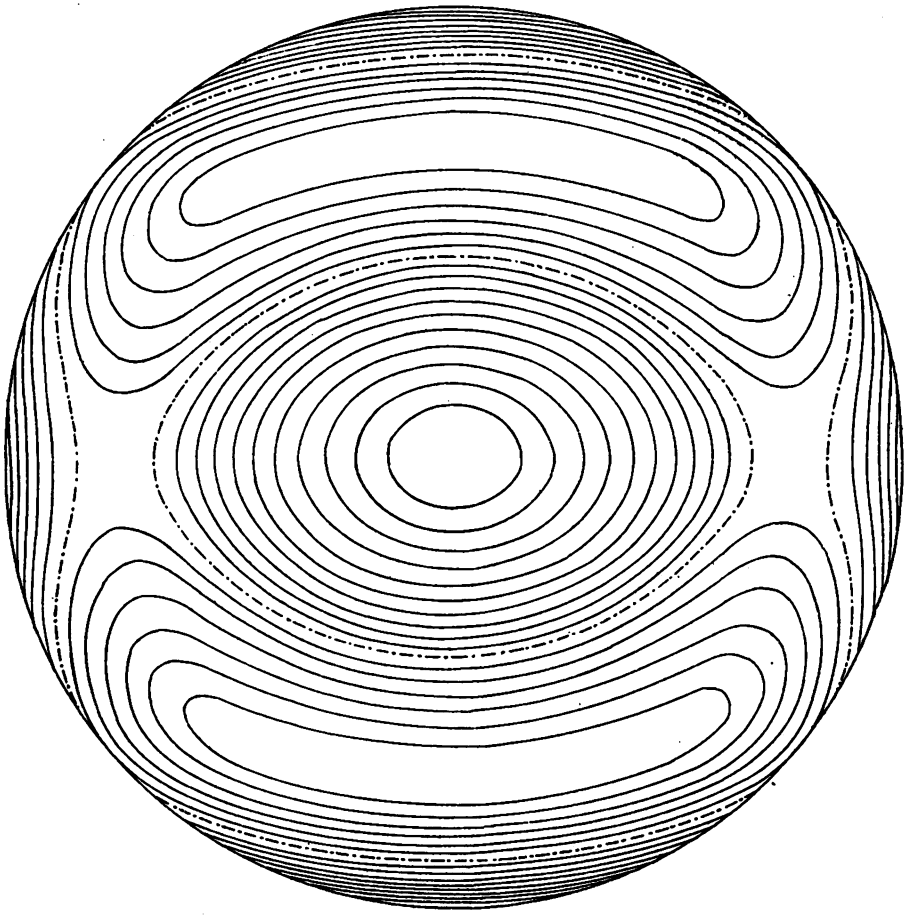


Harmonische Kugelfunction der dritten Ordnung.

$n = 3.$

Digitized by Google

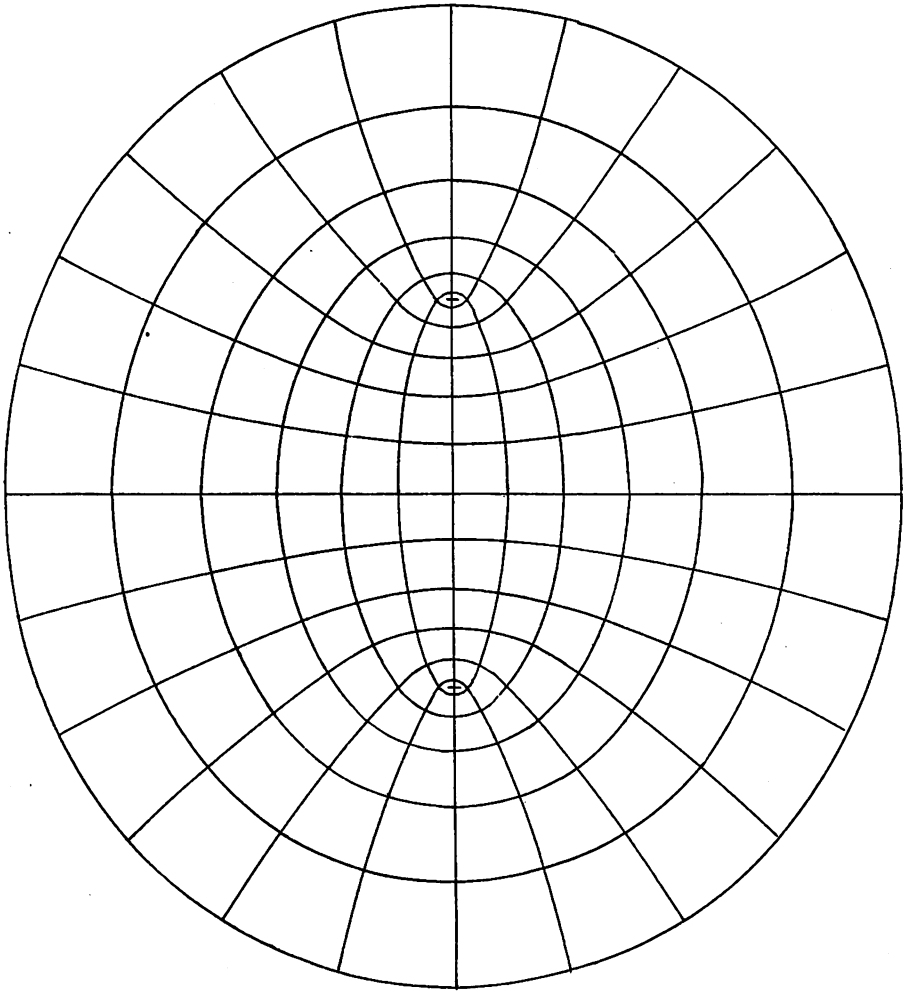
Digitized by Google



Harmonische Kugelfunction der vierten Ordnung.

Digitized by Google

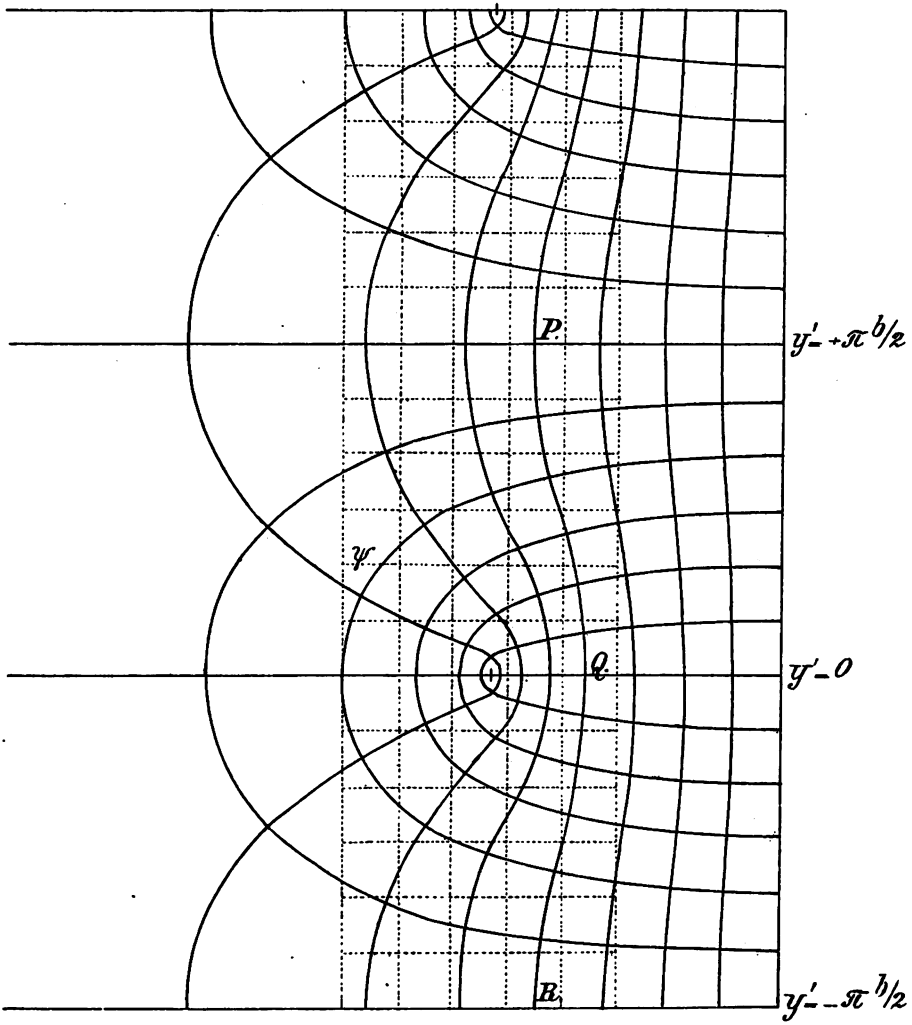
Digitized by Google



Confocale Ellipsen und Hyperbeln.

Digitized by Google

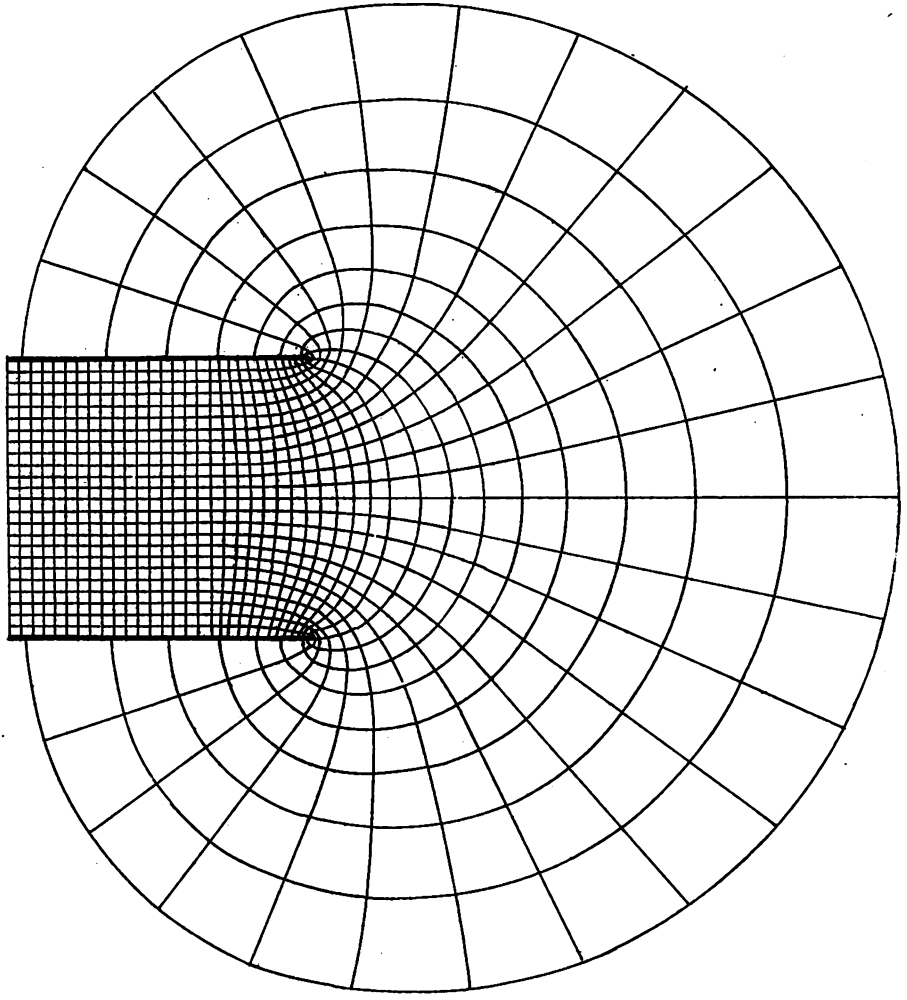
Digitized by Google



Kraftlinien (PQR) und Niveauflächen (ψ) in der Nähe einer Platte.
y' = 0.

Digitized by Google

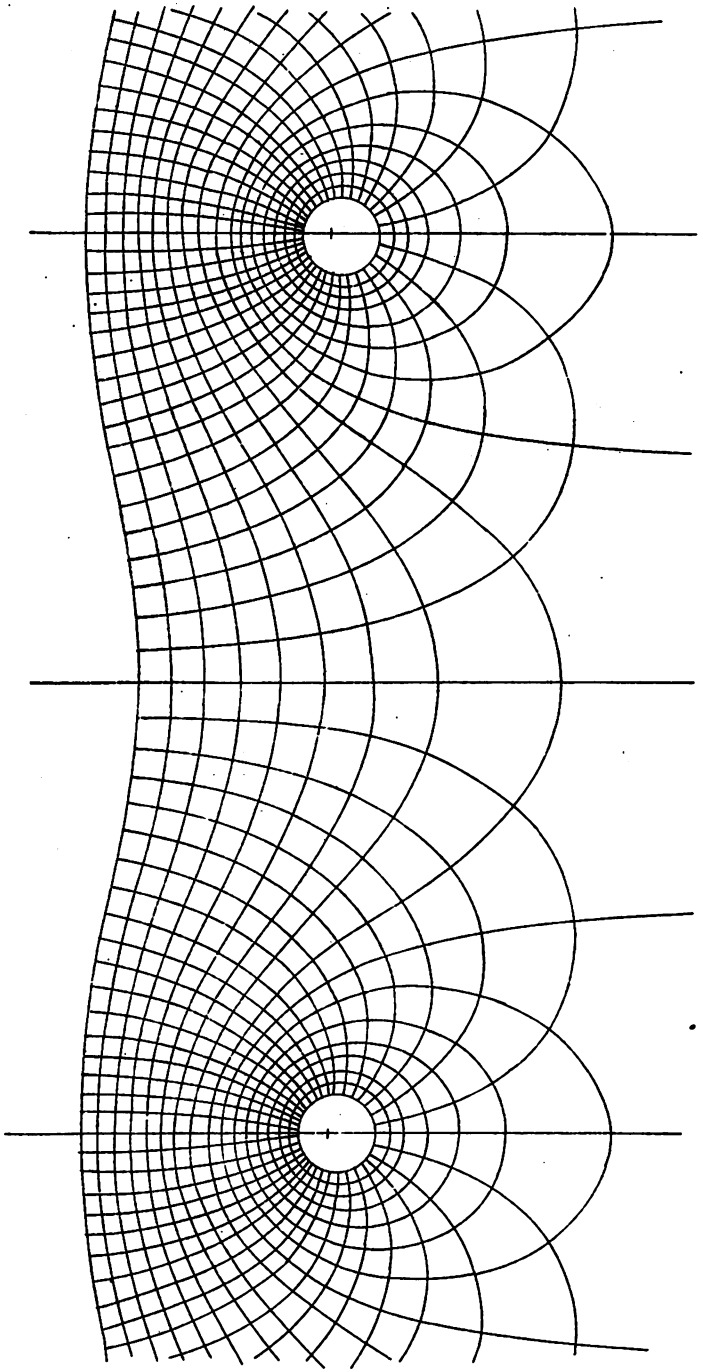
Digitized by Google



Kraftlinien und Niveauflächen zwischen zwei Platten.

Digitized by Google

Digitized by Google



Kraftlinien und Niveauflächen in der Nähe eines Gitters.

Digitized by Google

Druck von H.S. Hermann in Berlin, S.W. Beuthstr. 8.

Staatliche
Bibliothek
Bamberg

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

SBB013401703287

Digitized by Google